Эксперимент по методу Монте-Карло

Истинная модель

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X + u$$

Соответствующая модель

$$\hat{Y} = b_1 + b_2 X$$

$$b_2 = \frac{\sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum (X_i - \bar{X})^2} = \beta_2 + \sum a_t u_i$$

$$a_i = \frac{X_i - \bar{X}}{\sum (X_j - \bar{X})^2}$$

Согласно материалу, представленном в предыдущей презентации, мы видим, что ошибка ответственна за вариации b_2 при фиксированной компоненте β_2.

Мы математически продемонстрировали, что ожидание ошибки равно нулю, а, следовательно, b_2 является несмещенной оценкой of β_2.

Эксперимент по методу Монте-Карло

Истинная модель **Соответствующая модель**

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X + u \qquad \hat{Y} = b_1 + b_2 X$$

$$b_2 = \frac{\sum (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sum (X_i - \overline{X})^2} = \beta_2 + \sum a_t u_i$$

$$a_i = \frac{X_i - \overline{X}}{\sum (X_j - \overline{X})^2}$$

На этом слайде мы непосредственно исследуем влияние ошибки на b_2, используя эксперимент Монте-Карло (имитационный эксперимент).

Эксперимент по методу Монте-Карло

Выберите модель, в которой Y определяется по X, значениями параметров, and u

Эксперимент по методу Монте-Карло - это лабораторное исследование, обычно проводимое с целью оценки свойств регрессионных оценок в контролируемых условиях.

Эксперимент по методу Монте-Карло

Выберите модель, в которой Y определяется по X, значениями параметров, and u

Мы будем использовать эксперимент по методу Монте-Карло для исследования поведения регрессионных коэффициентов OLS , применимо к простой модели регрессии.

Эксперимент по методу Монте-Карло

Выберите модель, в которой Y определяется по X, значениями параметров, and u

Выберете данные X

Выберете значения параметров

Будем считать, что Y определяется переменной X и остаточным членом u.

Выберем данные (фактические значения) для X, а также значения для параметров.

Эксперимент по методу Монте-Карло

Выберите модель, в которой Y определяется по X, значениями параметров, and u

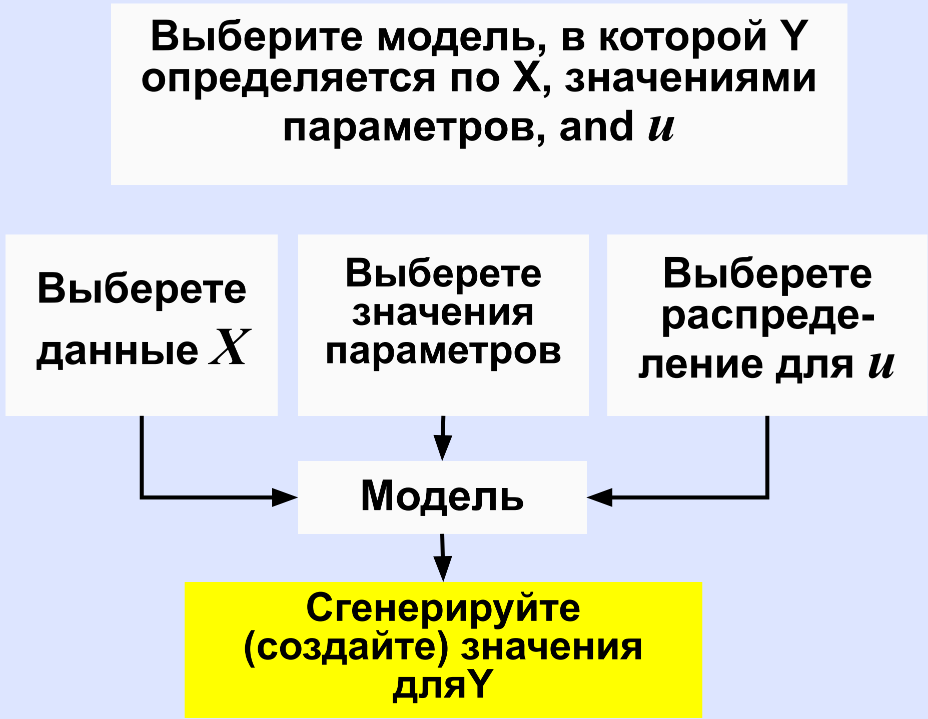
Выберете данные X

Выберете значения параметров s

Выберете распреде-ление для u

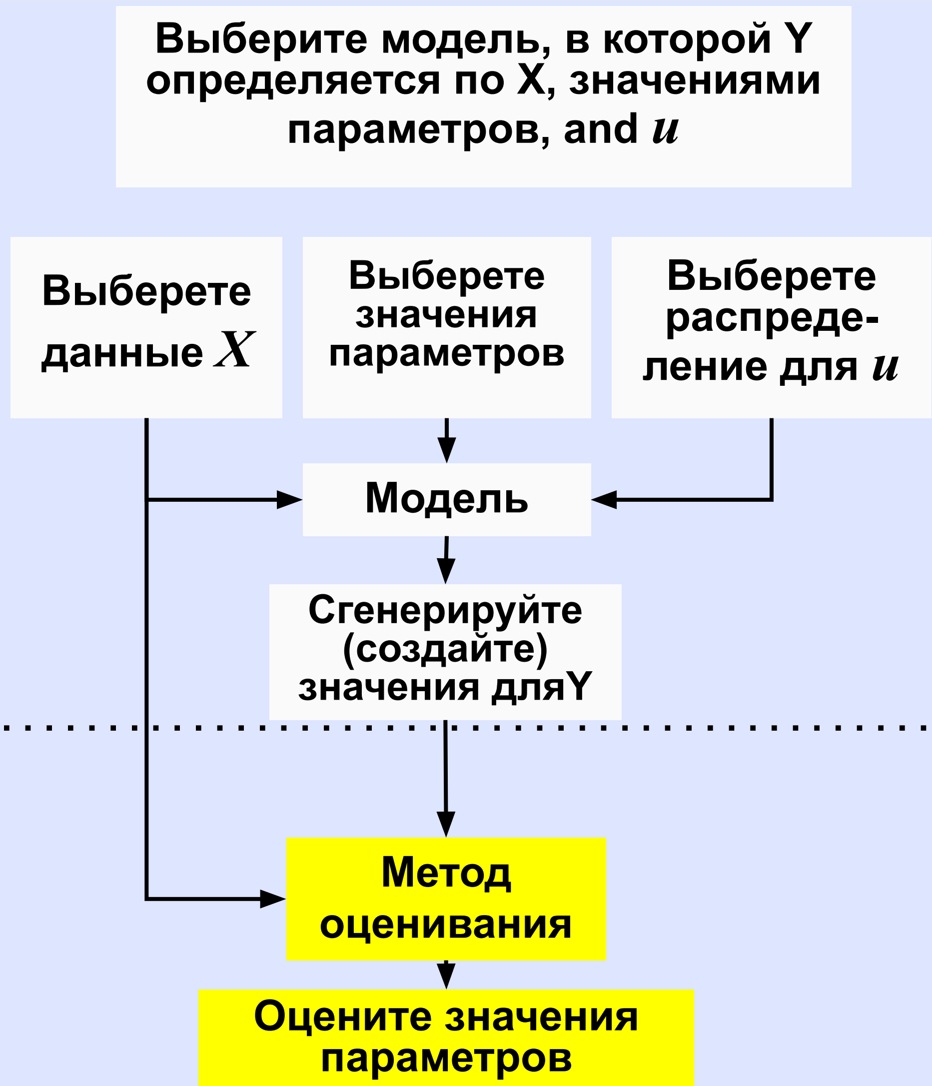
Мы также будем генерировать значения для остаточного члена случайным образом из известного распределения.

Эксперимент по методу Монте-Карло



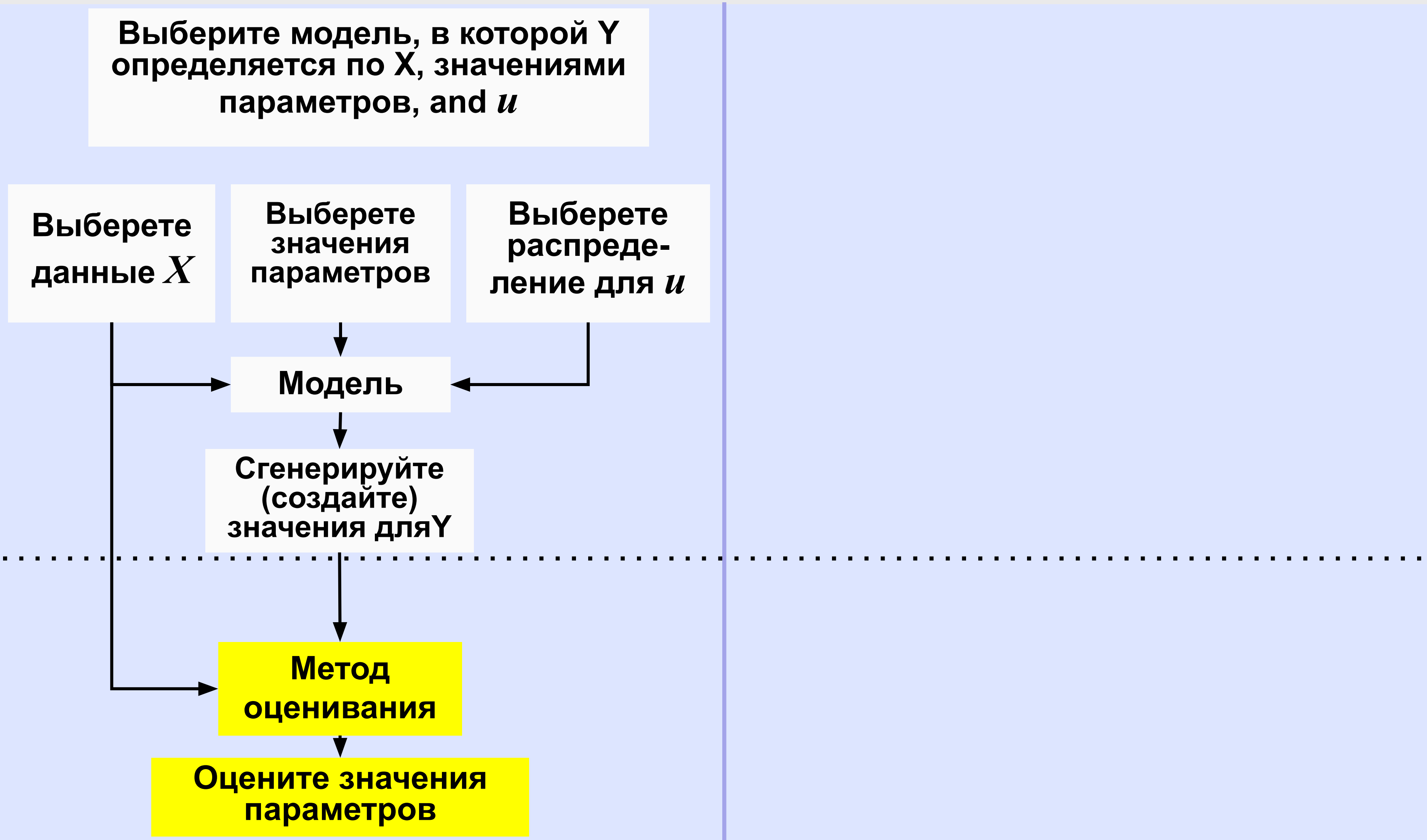
Значения Y в образце будут определяться значениями X, параметрами и значениями остаточного члена.

Эксперимент по методу Монте-Карло



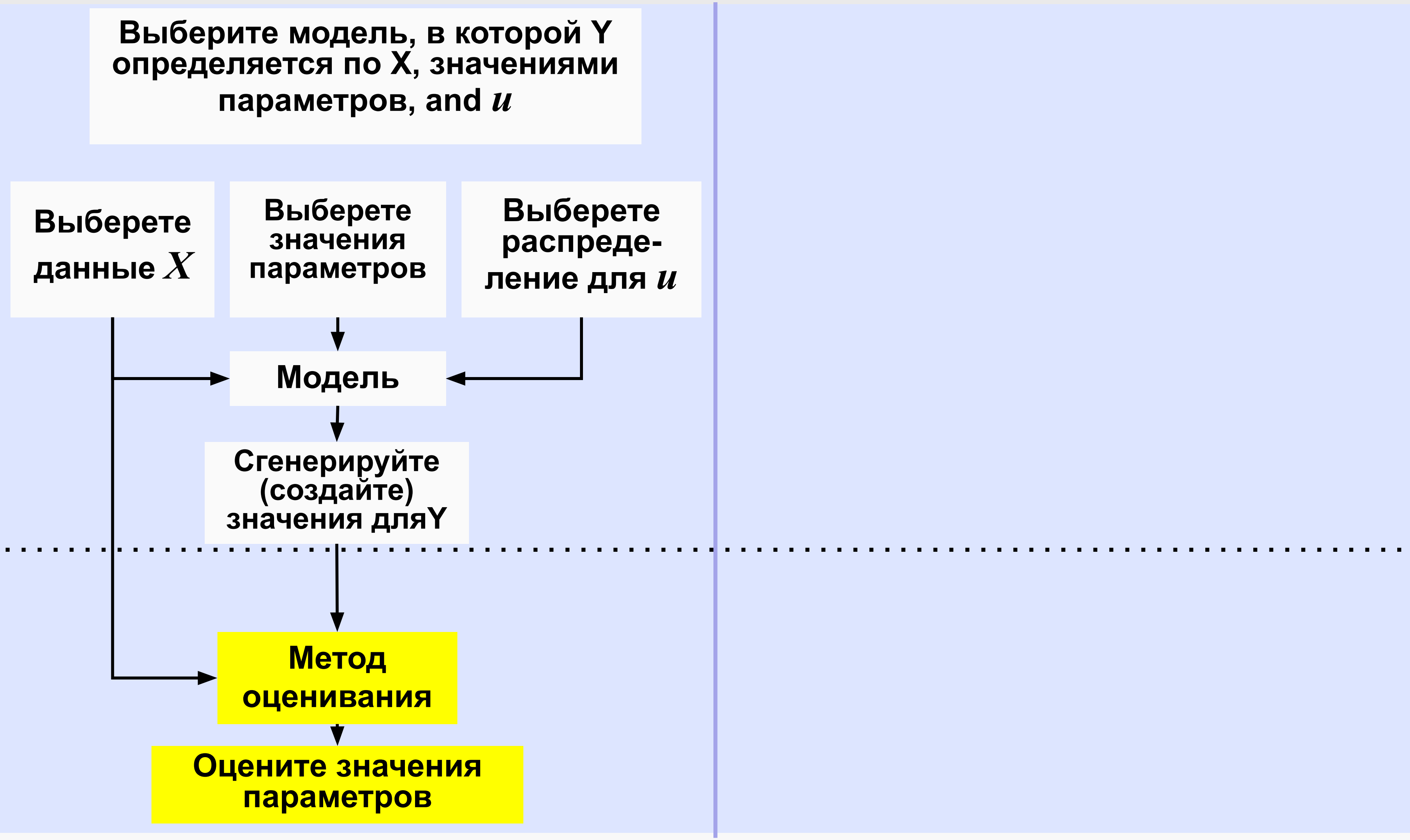
Затем мы будем использовать метод регрессии для получения оценок параметров, используя только данные по Y и X.

Эксперимент по методу Монте-Карло



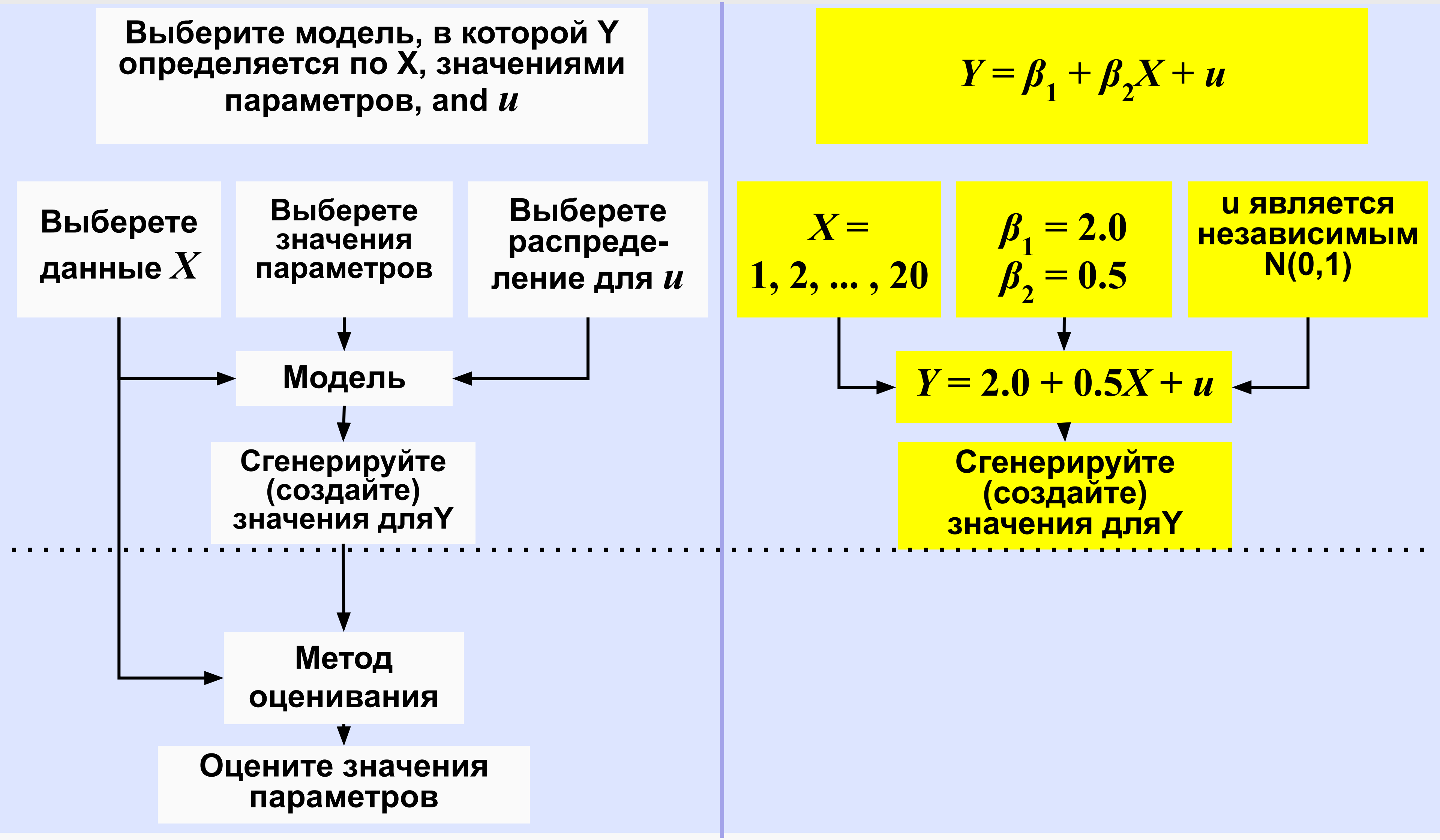
Мы можем повторять этот процесс множество раз, сохраняя одни и те же данные для X и одинаковые значения параметров, но используя новые, случайно генерируемые значения для остаточного члена.

Эксперимент по методу Монте-Карло



Таким образом, мы можем получить распределения вероятностей для регрессионных оценок, которые позволяют нам, например, проверить, являются ли они предвзятыми или непредвзятыми

Эксперимент по методу Монте-Карло

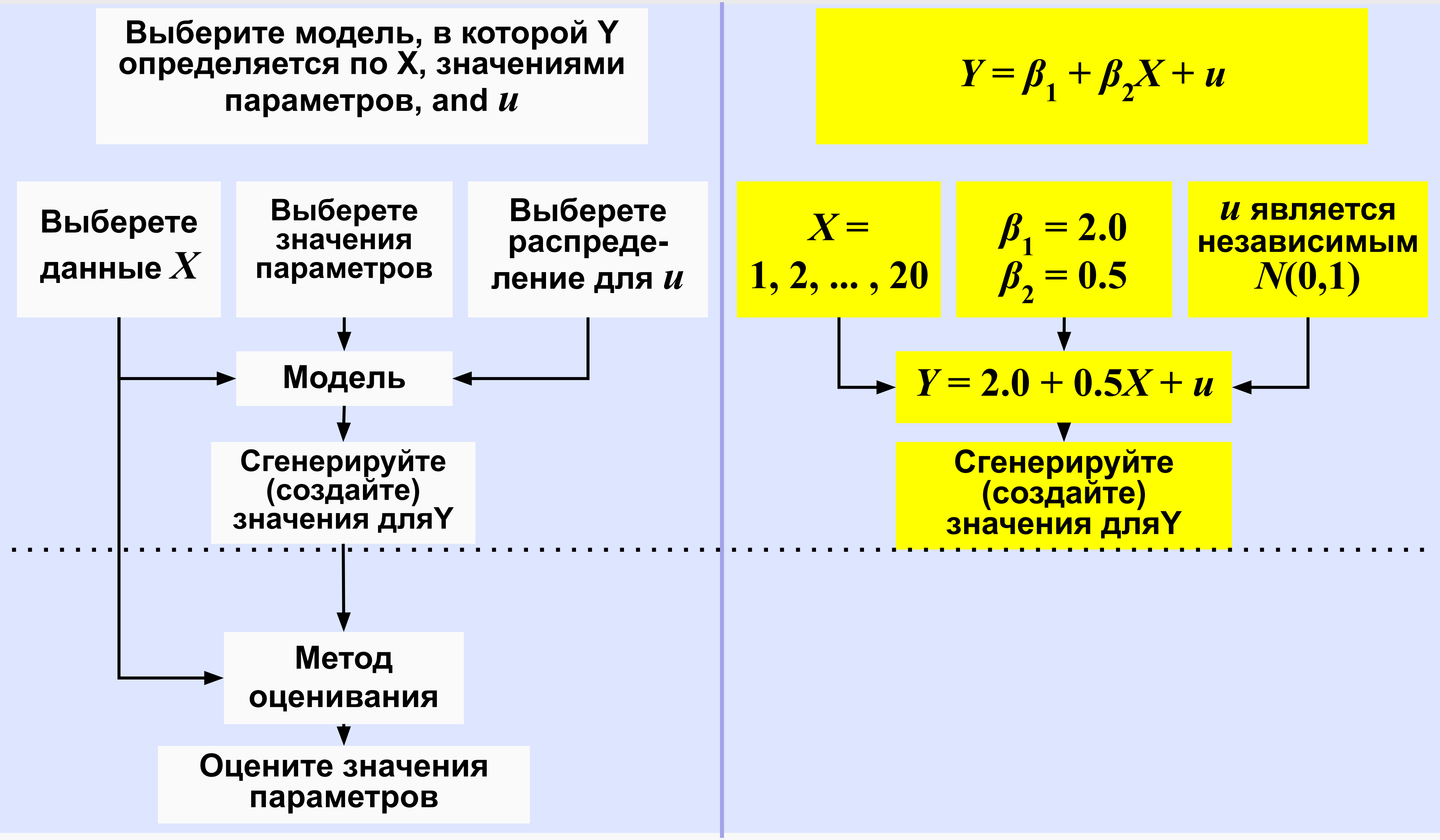


В этом эксперименте мы имеем 20 наблюдений (в примере).

X принимает значения 1, 2, ..., 20.

β_1 равно 2.0 and β_2 равно 0.5.

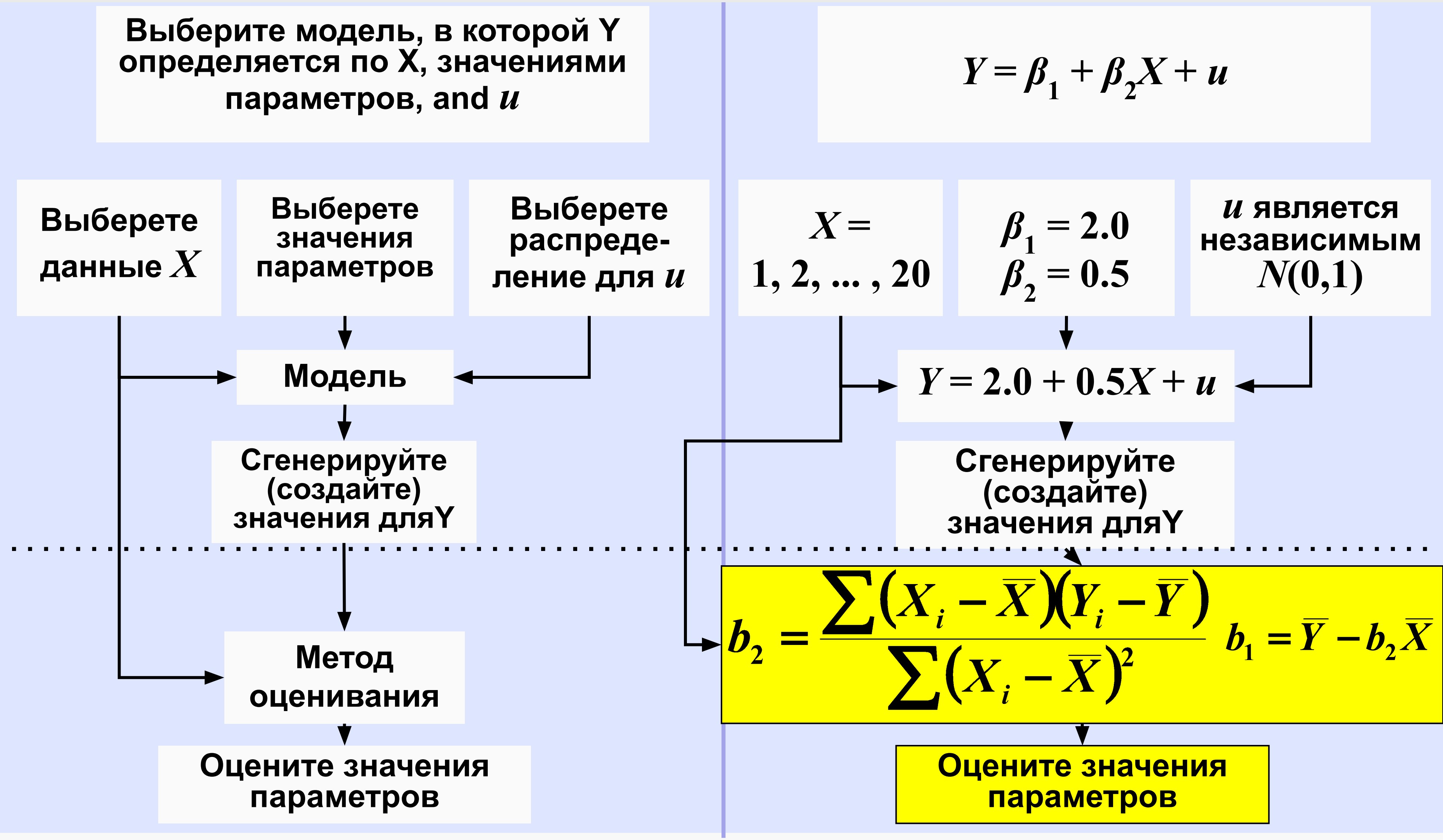
Эксперимент по методу Монте-Карло



Остаточный член генерируется случайным образом с использованием нормального распределения с нулевым средним и единичной дисперсией.

Следовательно, мы генерируем значения Y

Эксперимент по методу Монте-Карло



Затем мы оцениваем регрессию Y на X, используя метод оценки OLS, и посмотрим, насколько наши оценки b_1 и b_2 соответствуют истинным значениям β_1 and β_2.

Эксперимент по методу Монте-Карло

$$Y = 2.0 + 0.5X + u$$

X	$2.0+0.5X$	u	Y	X	$2.0+0.5X$	u	Y
1					7.5 1.599.0		
2					8.0 –0.92		
3					8.5 –0.71		
4				.0 –0.25 8.7			
5					9.5 1.6911.		
6					10.00.1510.		
7				0.50.0210.52			
8				1.0–0.11 10.			
9				1.5–0.91 10.			
10					12.01.4213.		

На данном слайде представлены значения X, выбранные совершенно произвольно

Эксперимент по методу Монте-Карло

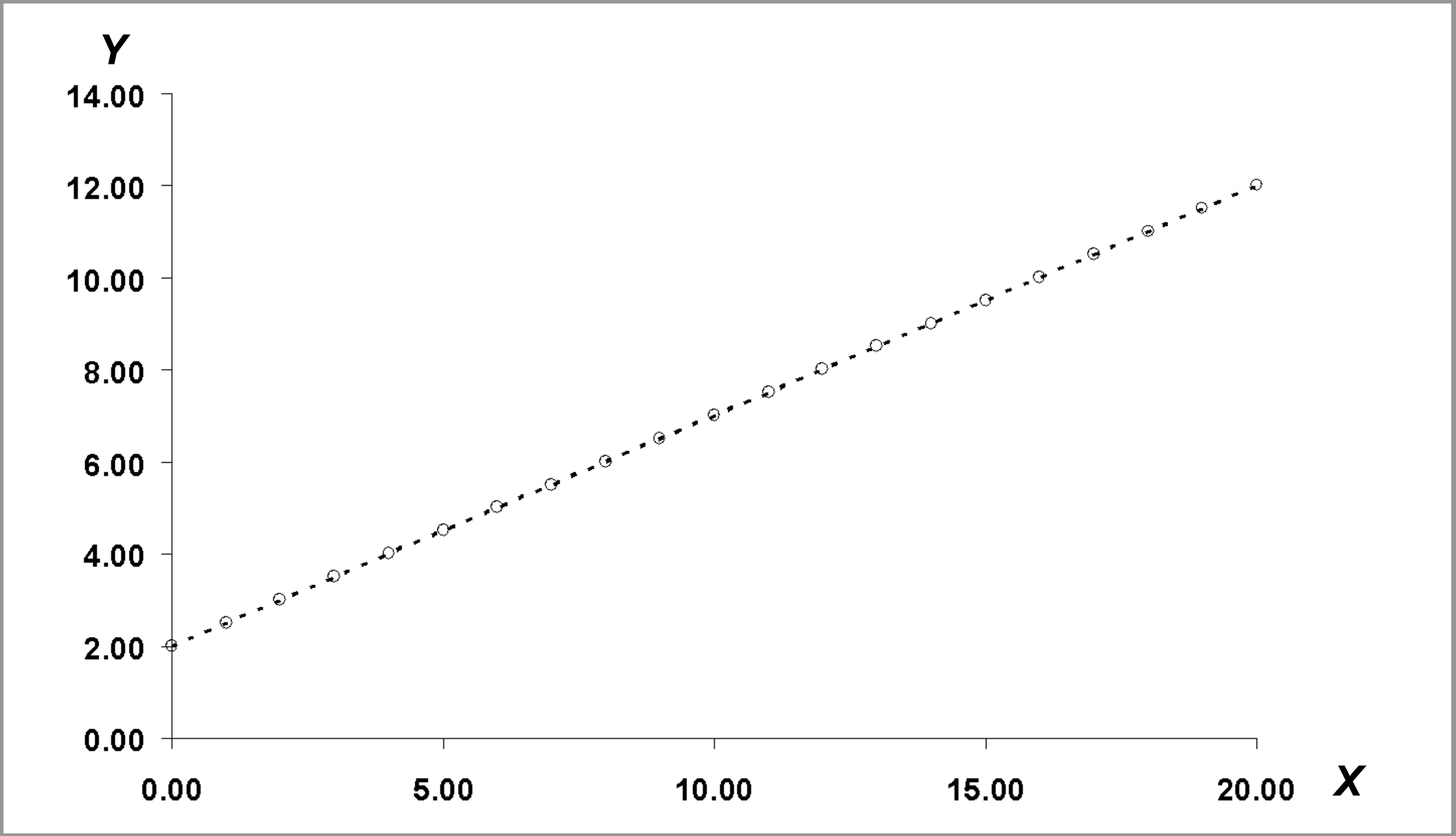
$$Y = 2.0 + 0.5X + u$$

X	$2.0+0.5X$	u	Y	X	$2.0+0.5X$	u	Y
1	2.5				7.5	1.599.09	
2	3.0				8.0	–0.92	7.08
3	3.5				8.5	–0.71	7.79
4	4.0			.0	–0.25	8.75	
5	4.5				9.5	1.6911.19	
6	5.0				10.00.1510.15		
7	5.5			0.50.0210.52			
8	6.0			1.0–0.11		10.89	
9	6.5			1.5–0.91		10.59	
10	7.0				12.01.4213.42		

Учитывая выбор чисел для β_1 and β_2, мы можем получить нестахостическую компоненту *Y*.

Эксперимент по методу Монте-Карло

$$Y = 2.0 + 0.5X + u$$



Нестахостическая компонента отображена на графике.

Эксперимент по методу Монте-Карло

$$Y = 2.0 + 0.5X + u$$

X	$2.0+0.5X$	u	Y	X	$2.0+0.5X$	u	Y
1	2.5	–0.59			7.5	1.599.09	
2	3.0	–0.24			8.0	–0.92	7.08
3	3.5	–0.83			8.5	–0.71	7.79
4	4.0	0.034.03		.0	–0.25	8.75	
5	4.5	–0.38			9.5	1.6911.19	
6	5.0	–2.19			10.00.1510.15		
7	5.5	1.036.53		0.50.0210.52			
8	6.0	0.246.24		1.0	–0.11	10.89	
9	6.5	2.539.03		1.5	–0.91	10.59	
10	7.0	–0.13			12.01.4213.42		

Затем мы произвольно генерируем значение остаточного члена для каждого наблюдения с использованием распределения N (0,1) (нормальное распределение с нулевым средним и единичной дисперсией).

Эксперимент по методу Монте-Карло

$$Y = 2.0 + 0.5X + u$$

X	$2.0+0.5X$	u	Y	X	$2.0+0.5X$	u	Y
1	2.5	–0.59	1.9111		7.5	1.599.09	
2	3.0	–0.24			8.0	–0.92	7.08
3	3.5	–0.83			8.5	–0.71	7.79
4	4.0	0.034.03		.0	–0.25	8.75	
5	4.5	–0.38			9.5	1.6911.19	
6	5.0	–2.19			10.00.1510.15		
7	5.5	1.036.53		0.50.0210.52			
8	6.0	0.246.24		1.0	–0.11	10.89	
9	6.5	2.539.03		1.5	–0.91	10.59	
10	7.0	–0.13			12.01.4213.42		

Так, например, значение Y в первом наблюдении равно 1.91, а не 2.50.

Эксперимент по методу Монте-Карло

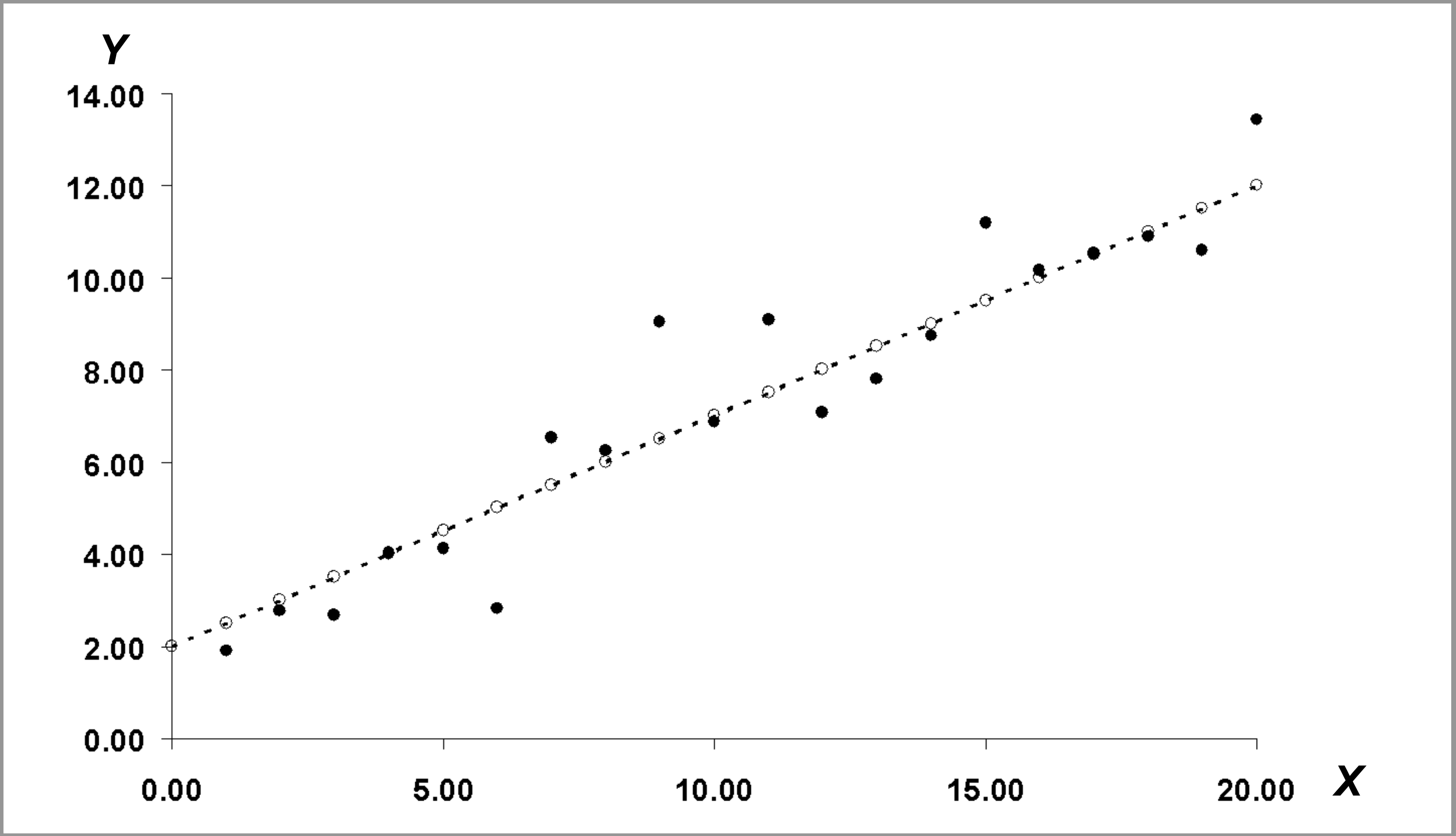
$$Y = 2.0 + 0.5X + u$$

X	$2.0+0.5X$	u	Y	X	$2.0+0.5X$	u	Y
1	2.5	–0.59	1.9111		7.5	1.599.09	
2	3.0	–0.24	2.7612		8.0	–0.92	7.08
3	3.5	–0.83	2.6713		8.5	–0.71	7.79
4	4.0	0.034.0314		9.0	–0.25	8.75	
5	4.5	–0.38	4.1215		9.5	1.6911.19	
6	5.0	–2.19	2.8116		10.00.1510.15		
7	5.5	1.036.5317		10.50.0210.52			
8	6.0	0.246.2418		11.0	–0.11	10.89	
9	6.5	2.539.0319		11.5	–0.91	10.59	
10	7.0	–0.13	6.8720		12.01.4213.42		

Аналогично, мы генерируем значения Y для других 19 наблюдений.

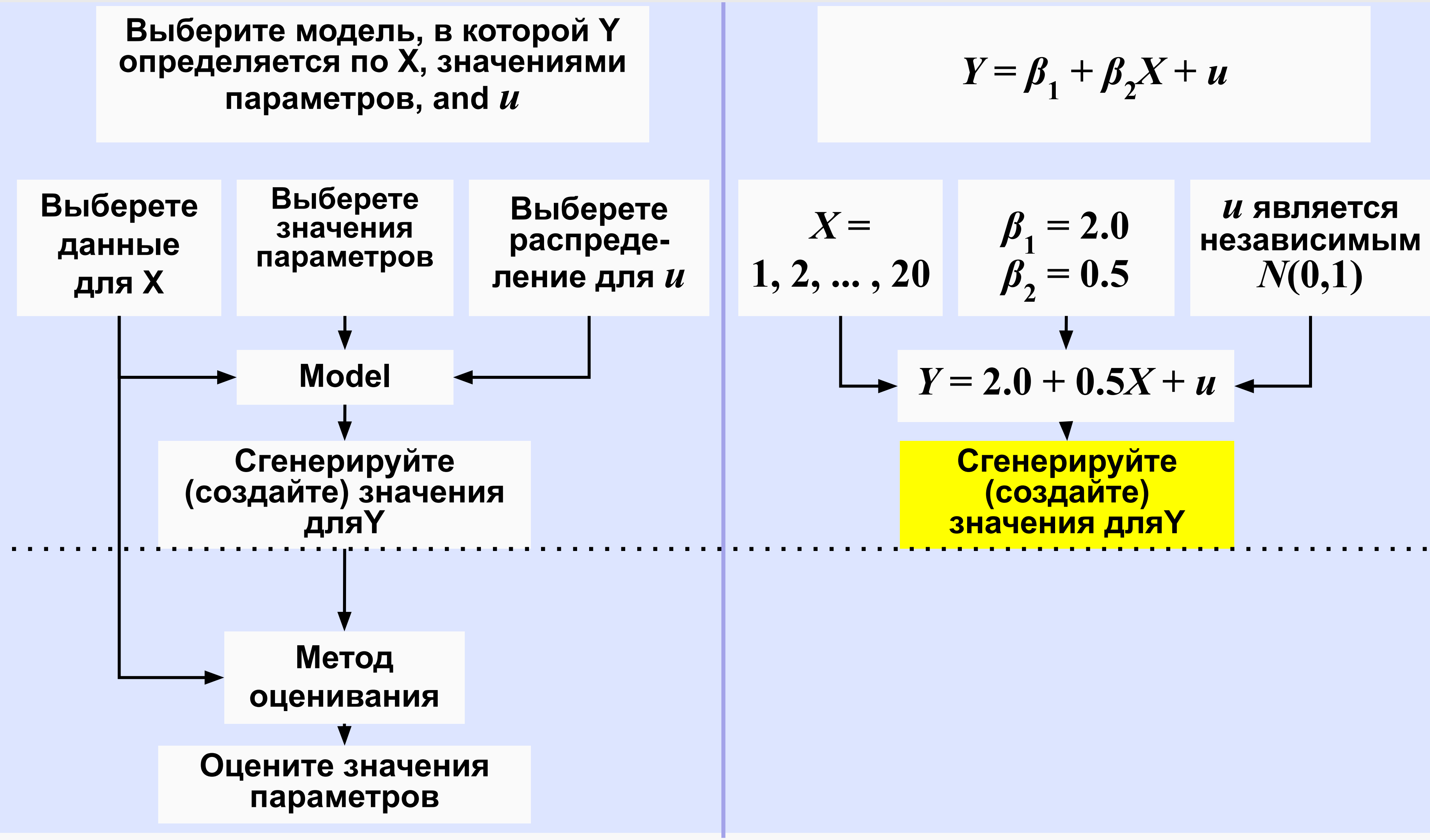
Эксперимент по методу Монте-Карло

$$Y = 2.0 + 0.5X + u$$



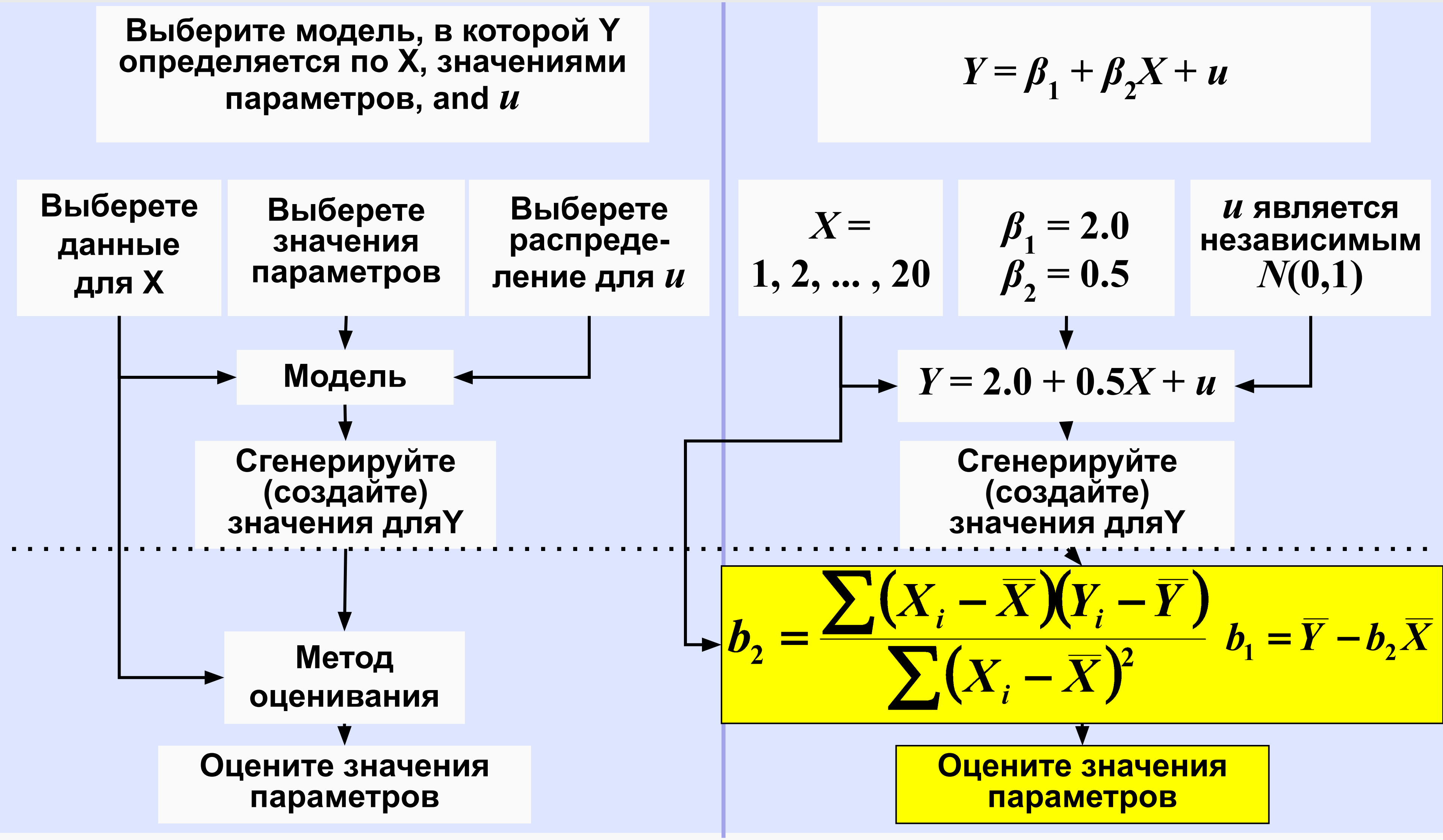
20 наблюдений отображены графически на данном слайде.

Эксперимент по методу Монте-Карло



Мы достигли данного момента в эксперименте по методу Монте-Карло.

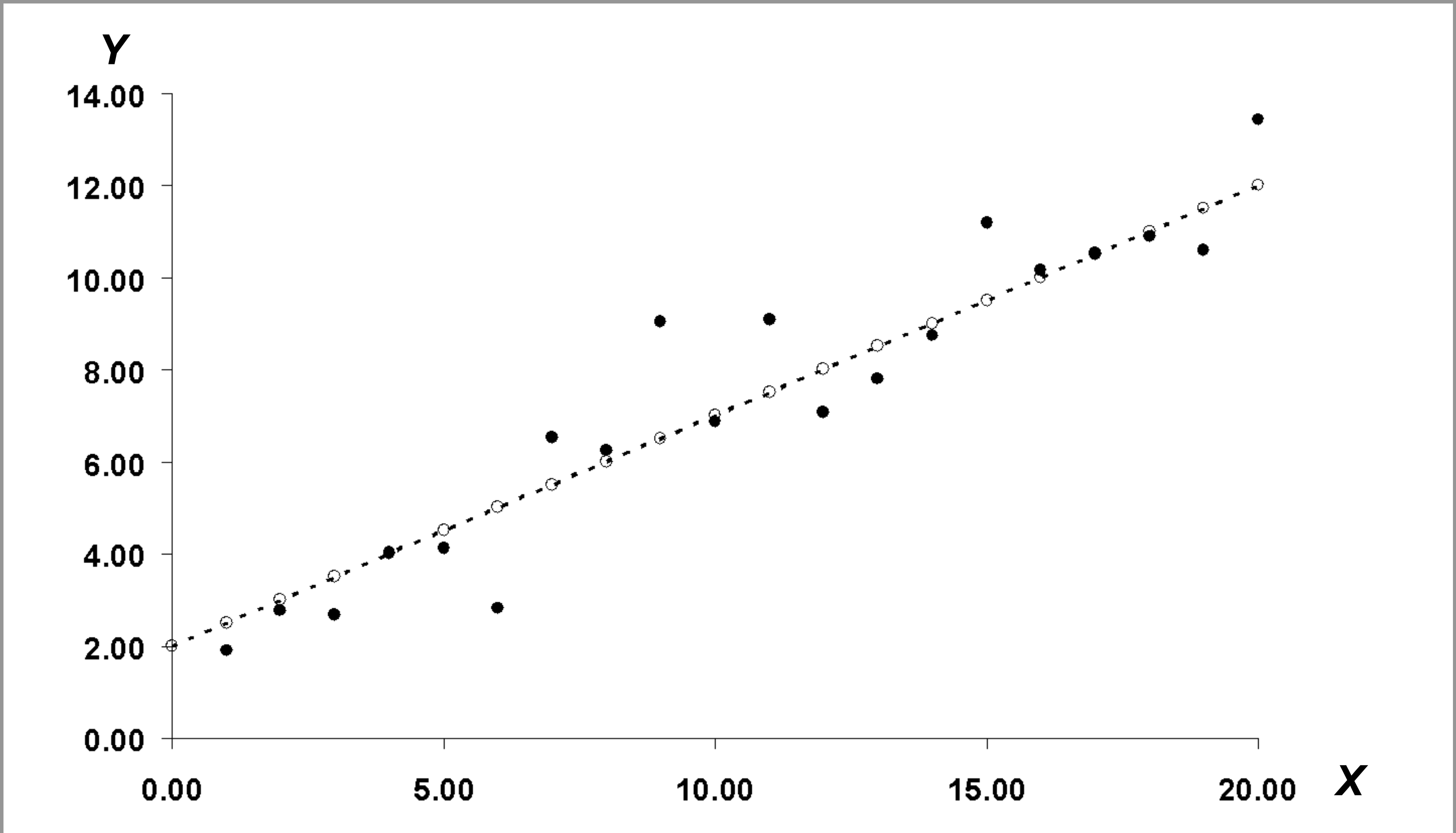
Эксперимент по методу Монте-Карло



Теперь мы применим метод оценки OLS для b_1 and b_2 к данным для X and Y, и посмотрим, насколько хорошо оценки соответствуют истинным значениям.

Эксперимент по методу Монте-Карло

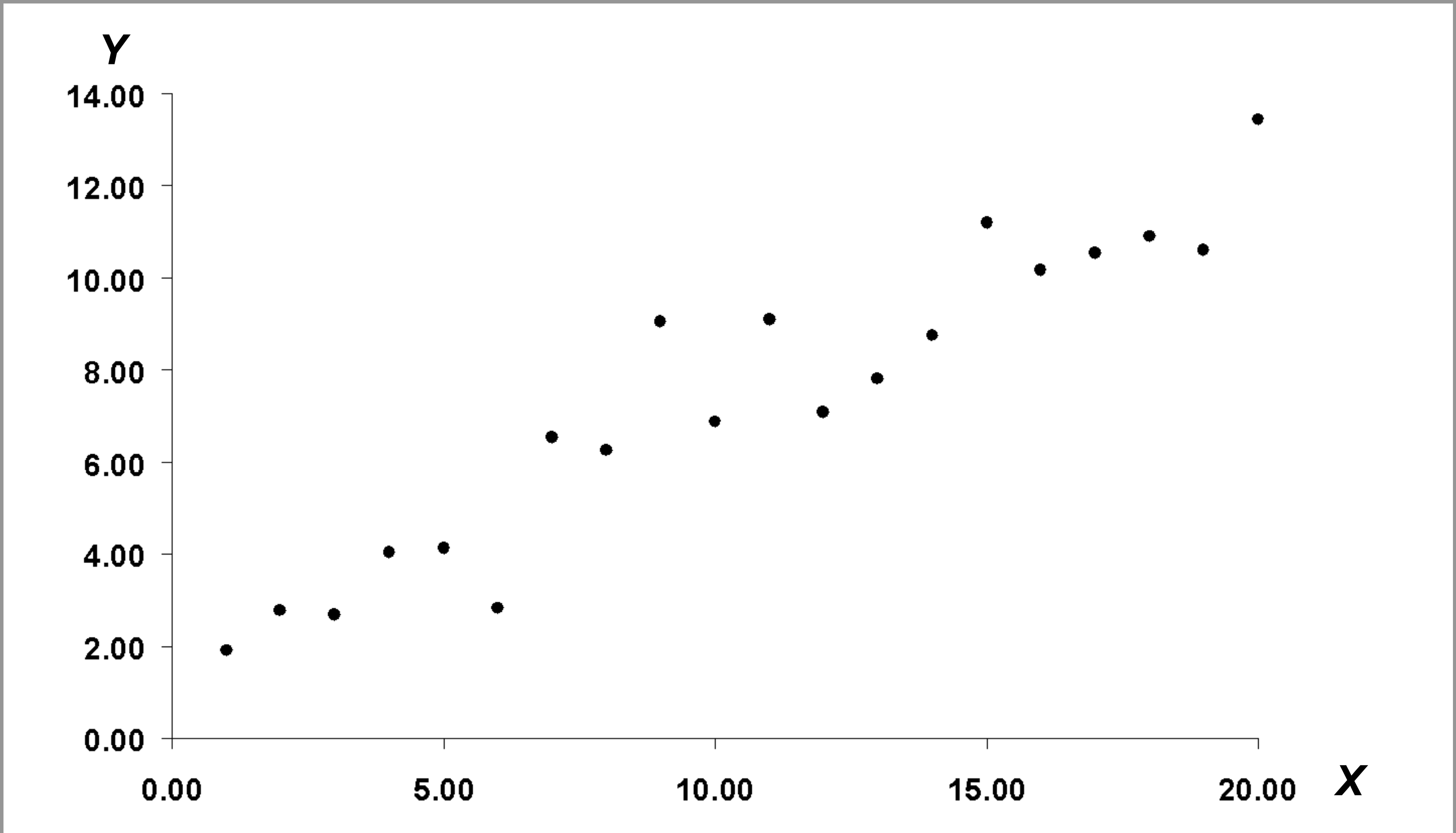
$$Y = 2.0 + 0.5X + u$$



На данном слайде снова представлена диаграмма дисперсии (корреляционная диаграмма).

Эксперимент по методу Монте-Карло

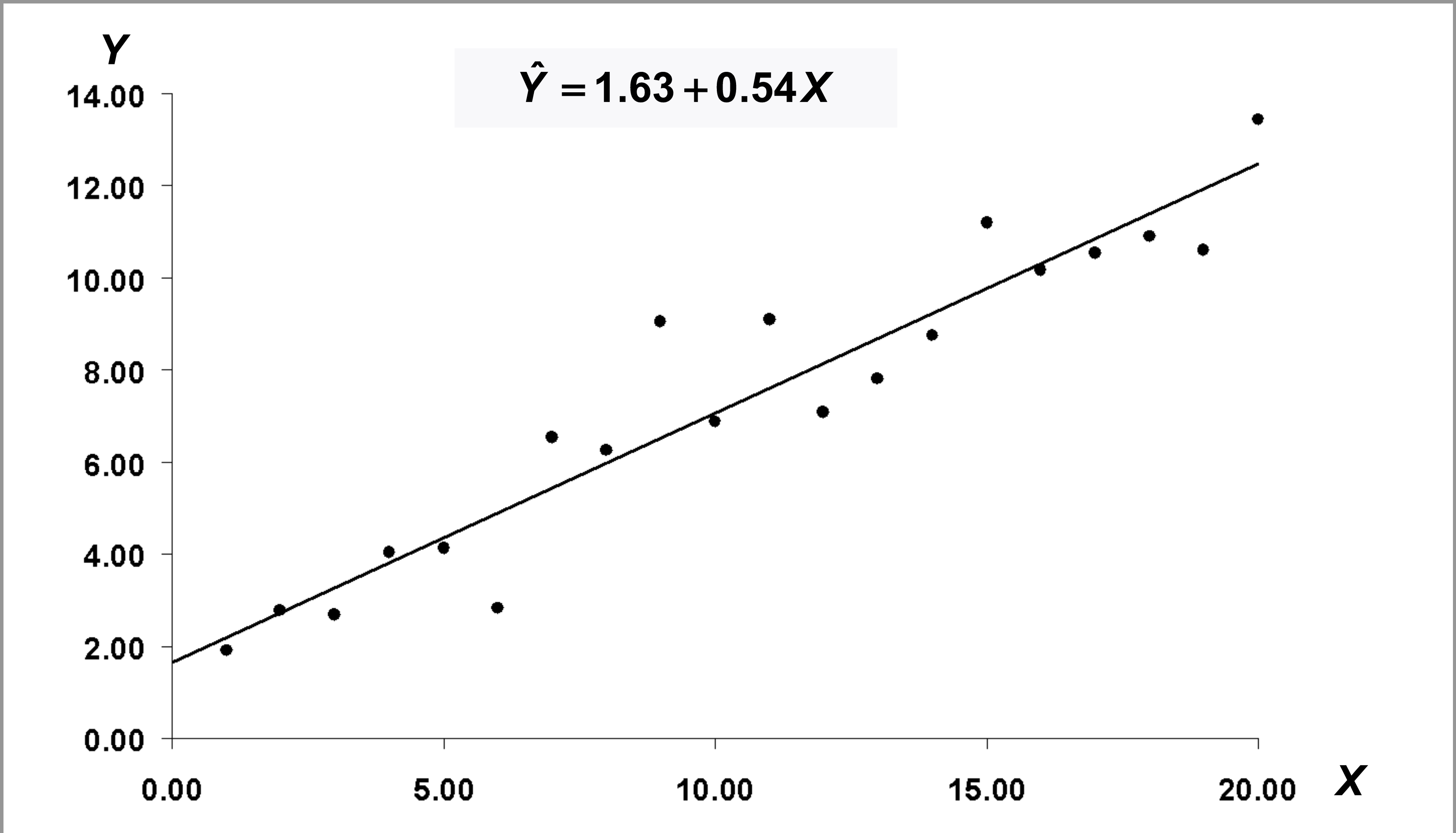
$$Y = 2.0 + 0.5X + u$$



Метод оценки использует только наблюдаемые данные для *X* and *Y*.

Эксперимент по методу Монте-Карло

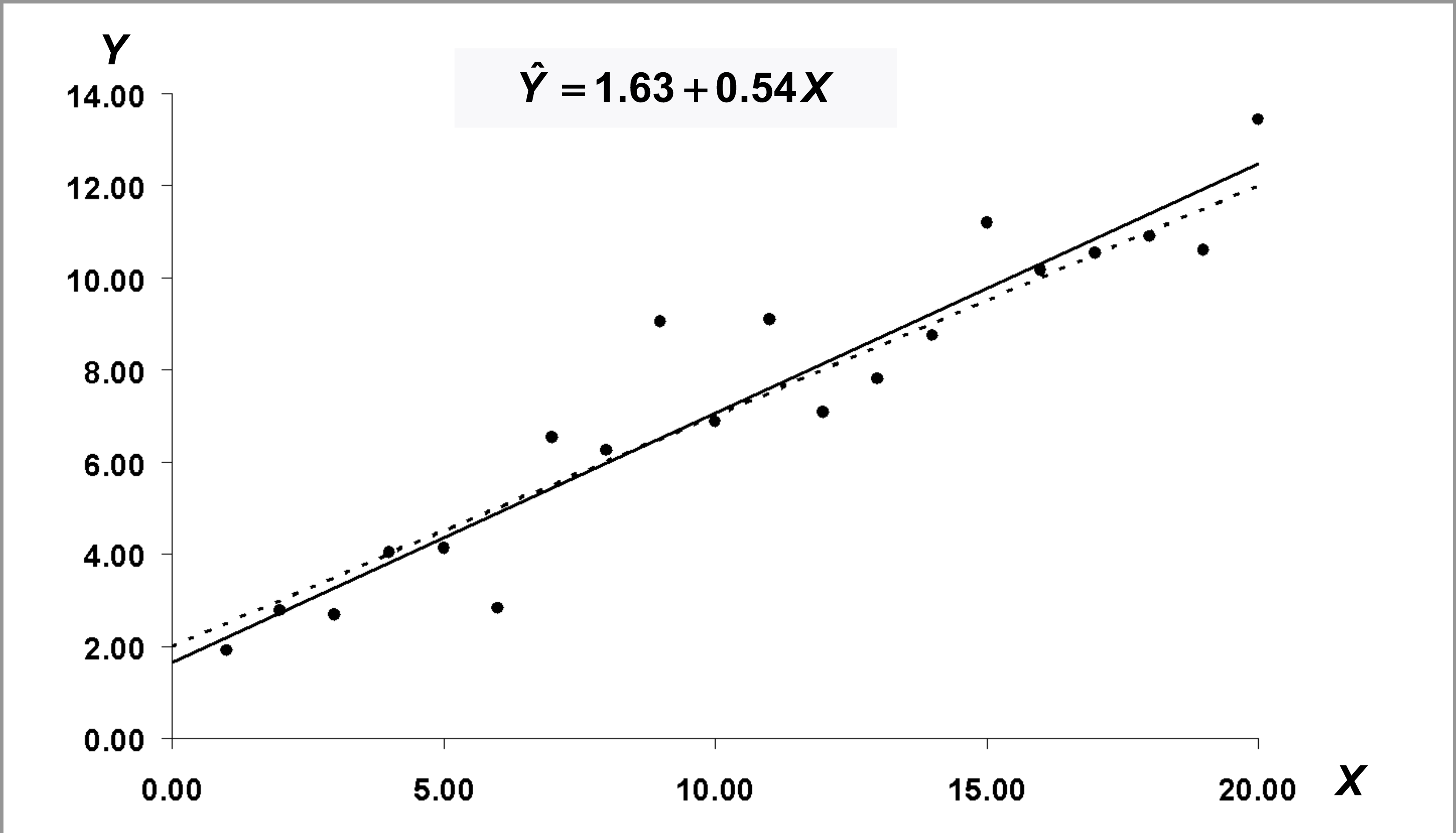
$$Y = 2.0 + 0.5X + u$$



На слайде представлено уравнение регрессии, соответствующее данным.

Эксперимент по методу Монте-Карло

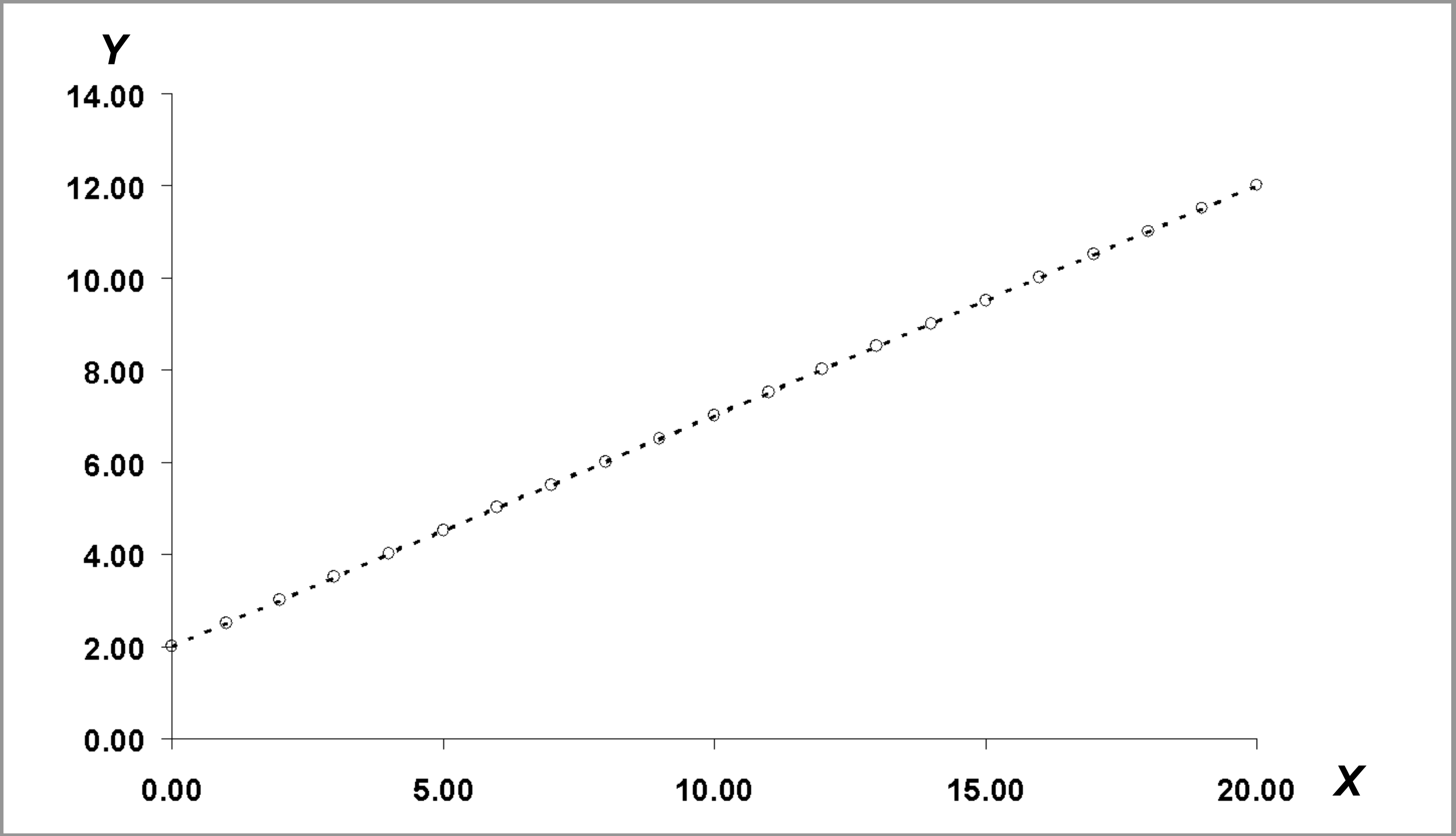
$$Y = 2.0 + 0.5X + u$$



Для сравнения также представлена нестохастическая компонента действительной связи. β_2 (истинное значение 0.50) было завышено, а β_1 (истинное значение 2.00) было занижено.

Эксперимент по методу Монте-Карло

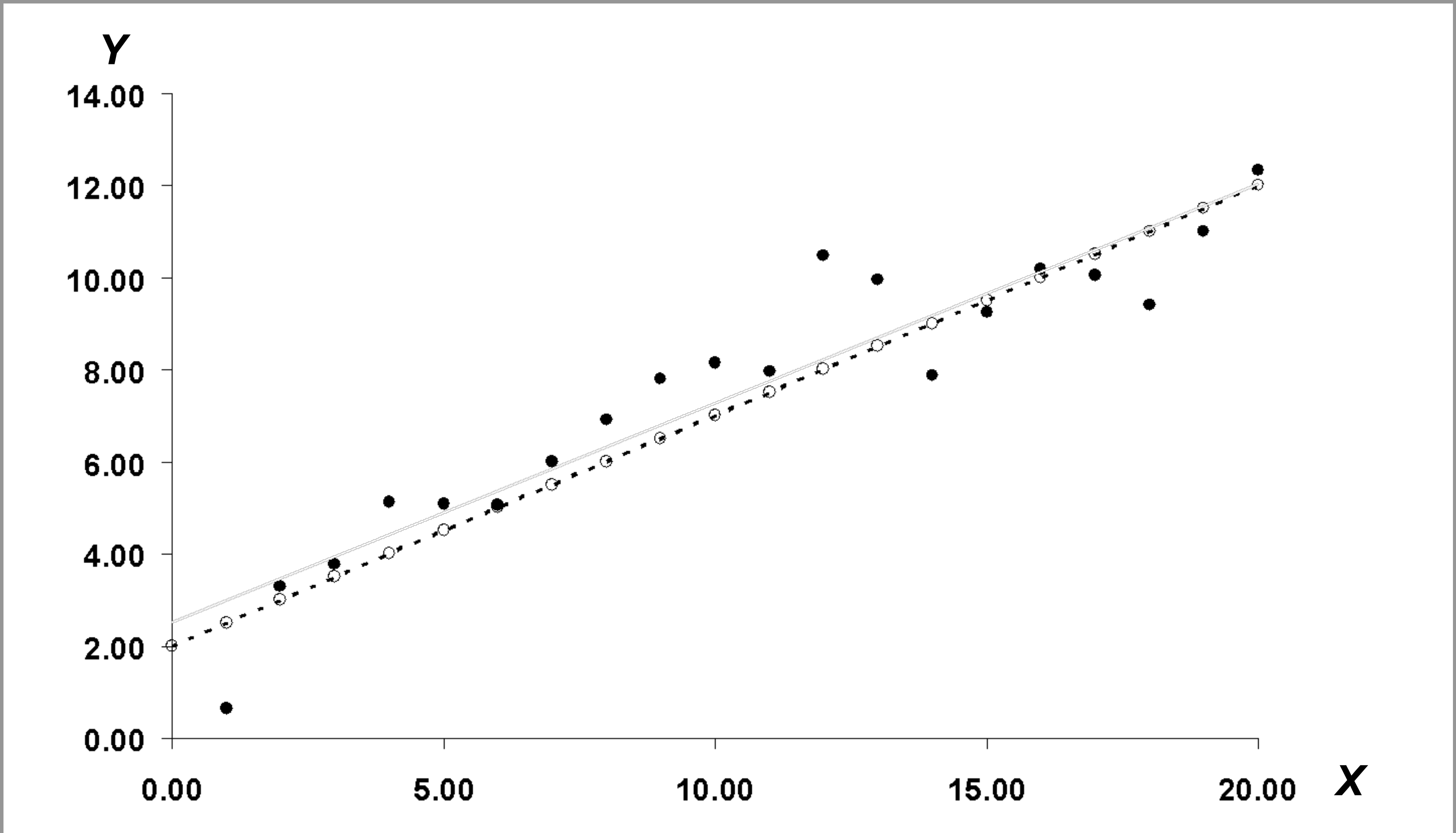
$$Y = 2.0 + 0.5X + u$$



Мы повторим процесс, начиная с тех же нестахостических компонент *Y*.

Эксперимент по методу Монте-Карло

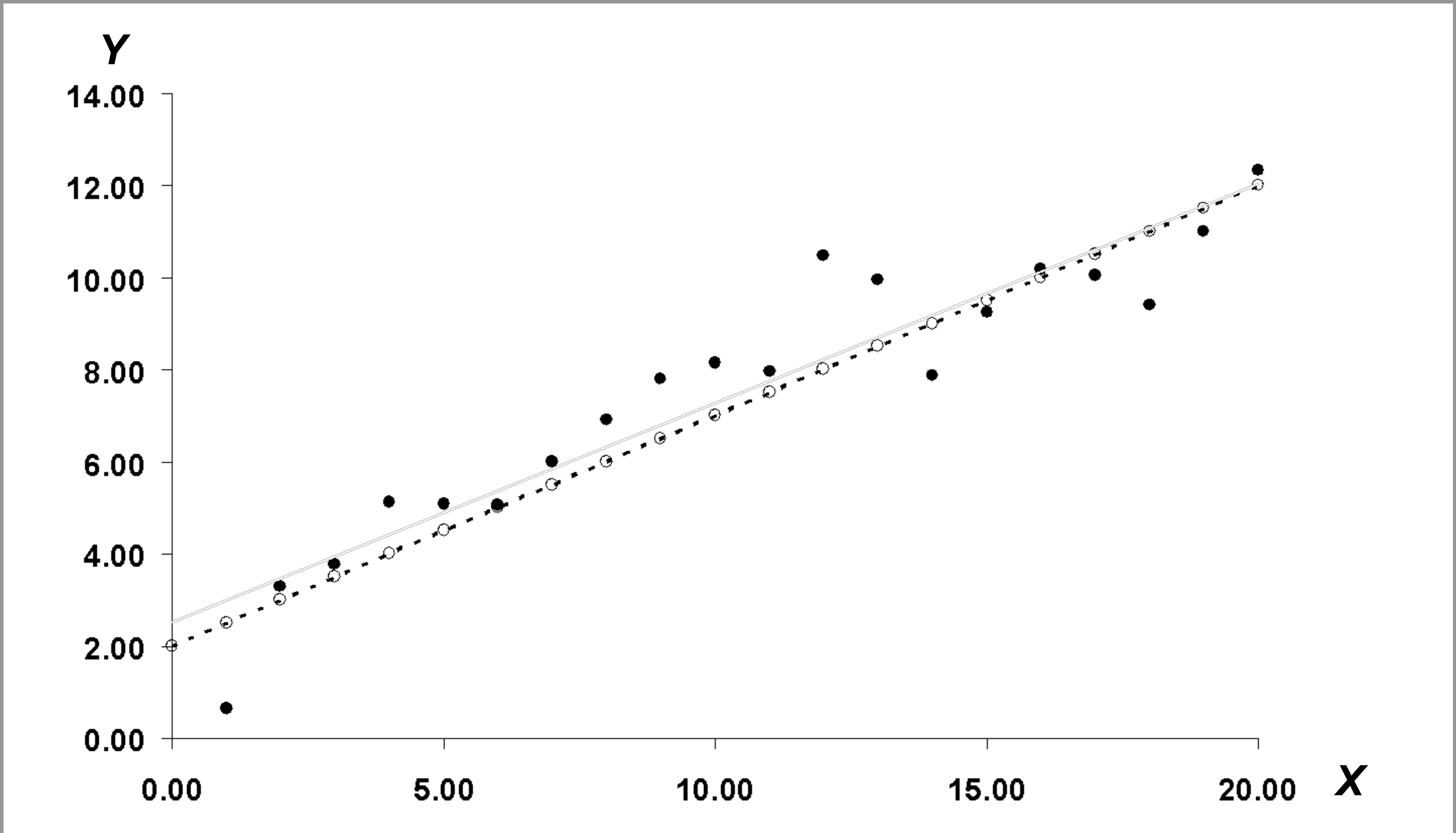
$$Y = 2.0 + 0.5X + u$$



Как и раньше, значения Y изменяются путем добавления случайно генерируемых значений остаточного члена.

Эксперимент по методу Монте-Карло

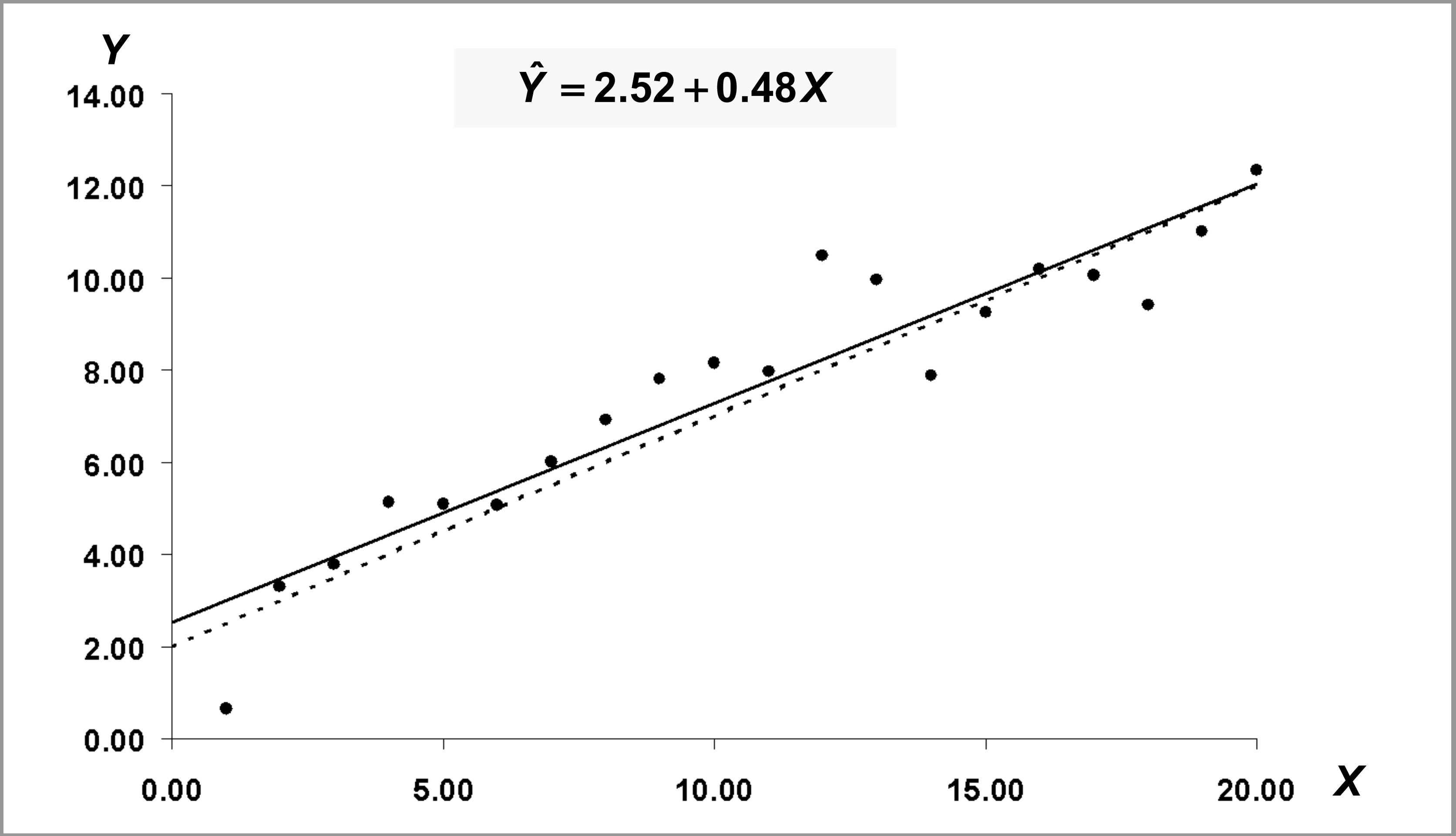
$$Y = 2.0 + 0.5X + u$$



Новые значения остаточного члена взяты из того же распределения N (0,1), что и предыдущие, но, не учитывая совпадение, будут отличаться от них.

Эксперимент по методу Монте-Карло

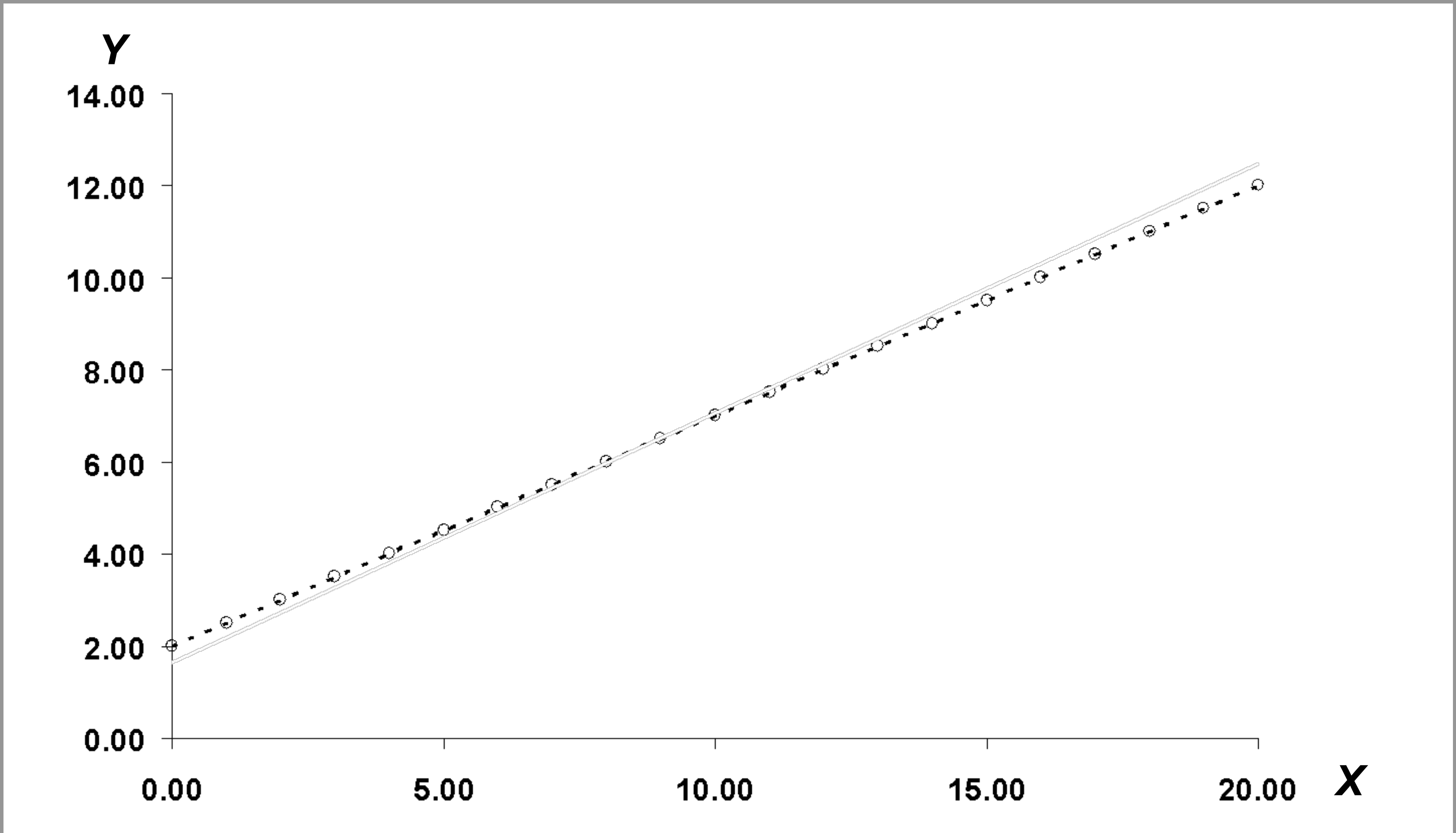
$$Y = 2.0 + 0.5X + u$$



На этот раз коэффициент наклона был занижен, а константа (параметр отсечения) - завышен.

Эксперимент по методу Монте-Карло

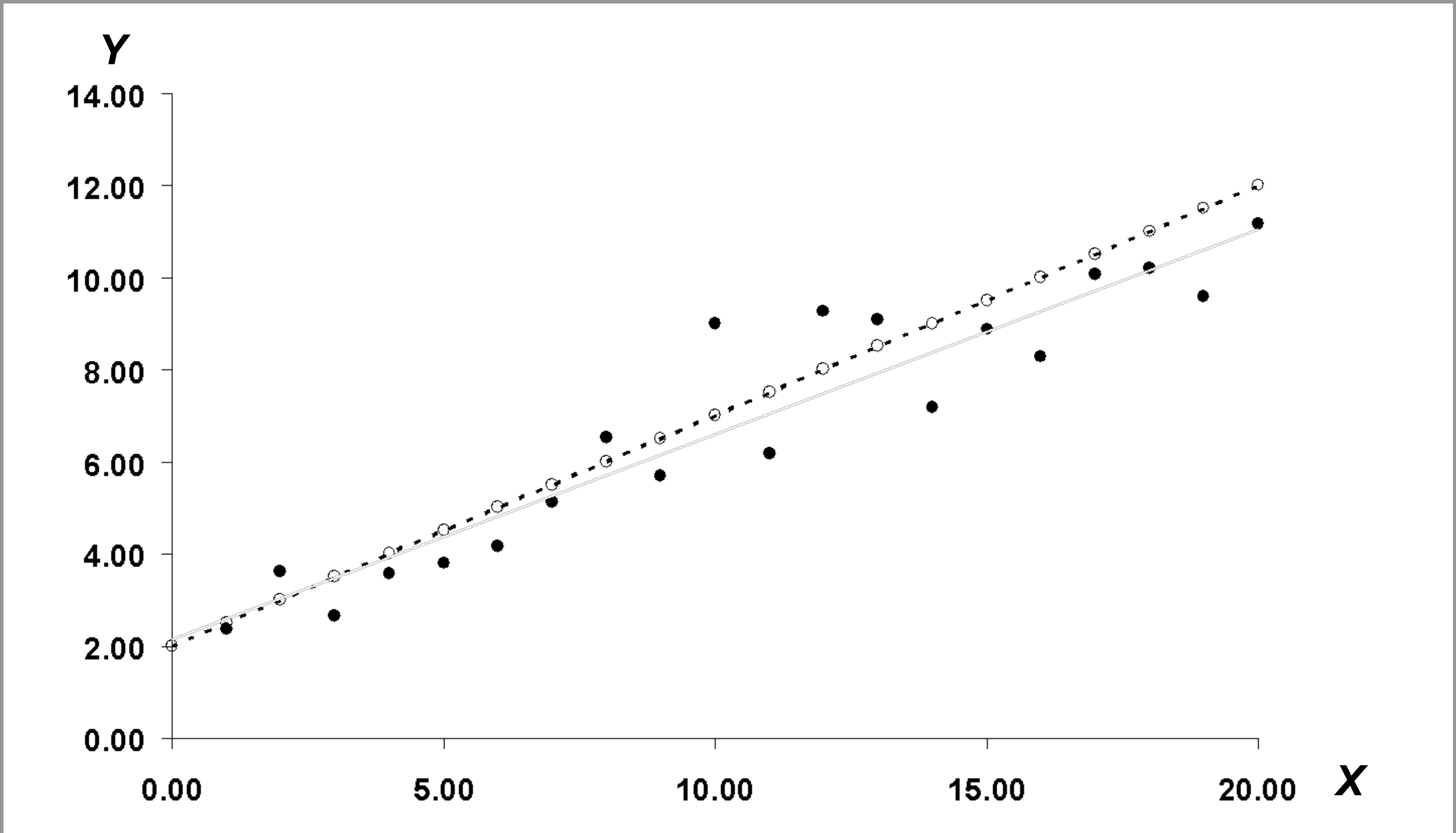
$$Y = 2.0 + 0.5X + u$$



Повторим процесс еще раз.

Эксперимент по методу Монте-Карло

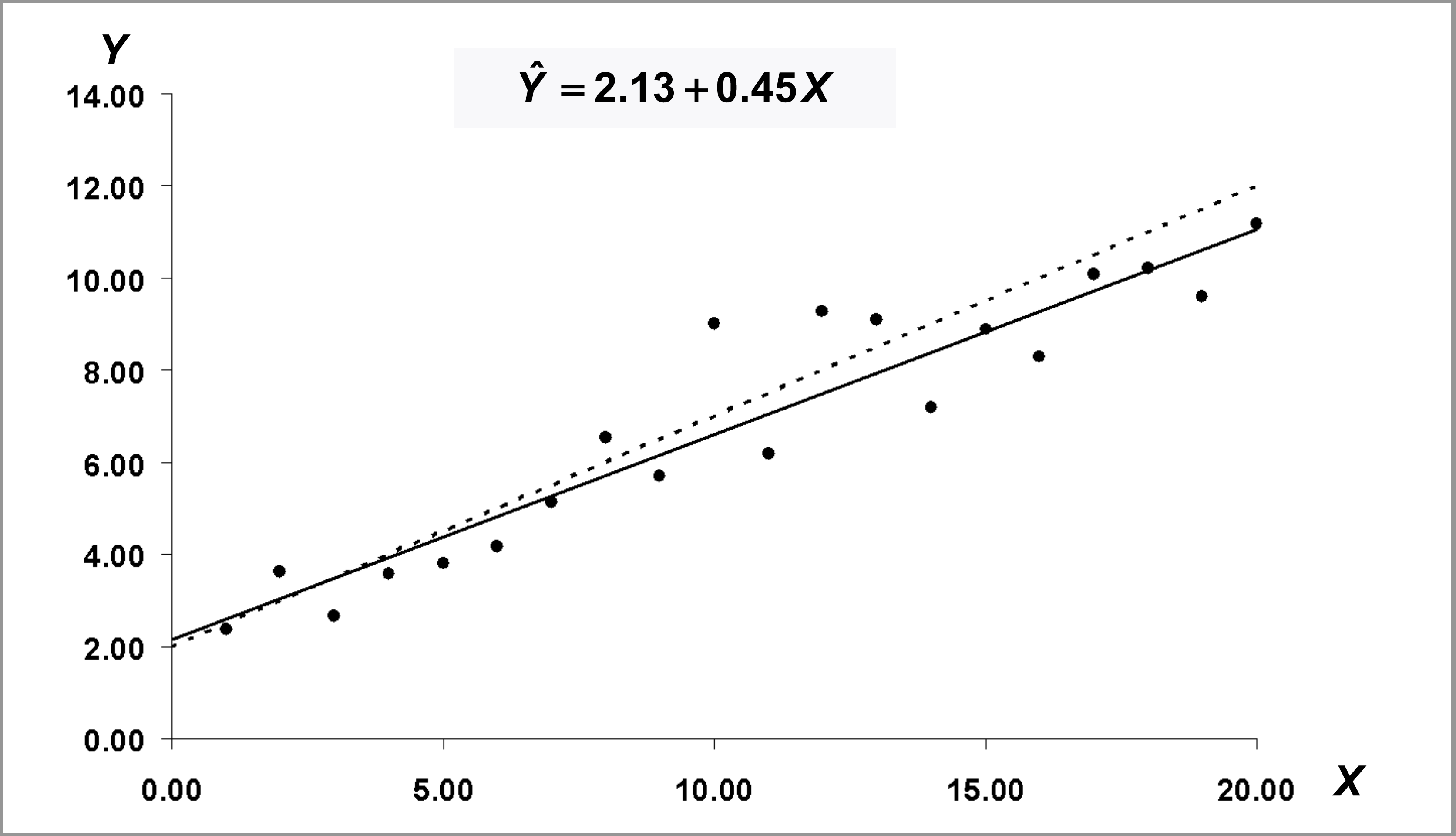
$$Y = 2.0 + 0.5X + u$$



Для генерации значений Y использовался новый набор случайных чисел.

Эксперимент по методу Монте-Карло

$$Y = 2.0 + 0.5X + u$$



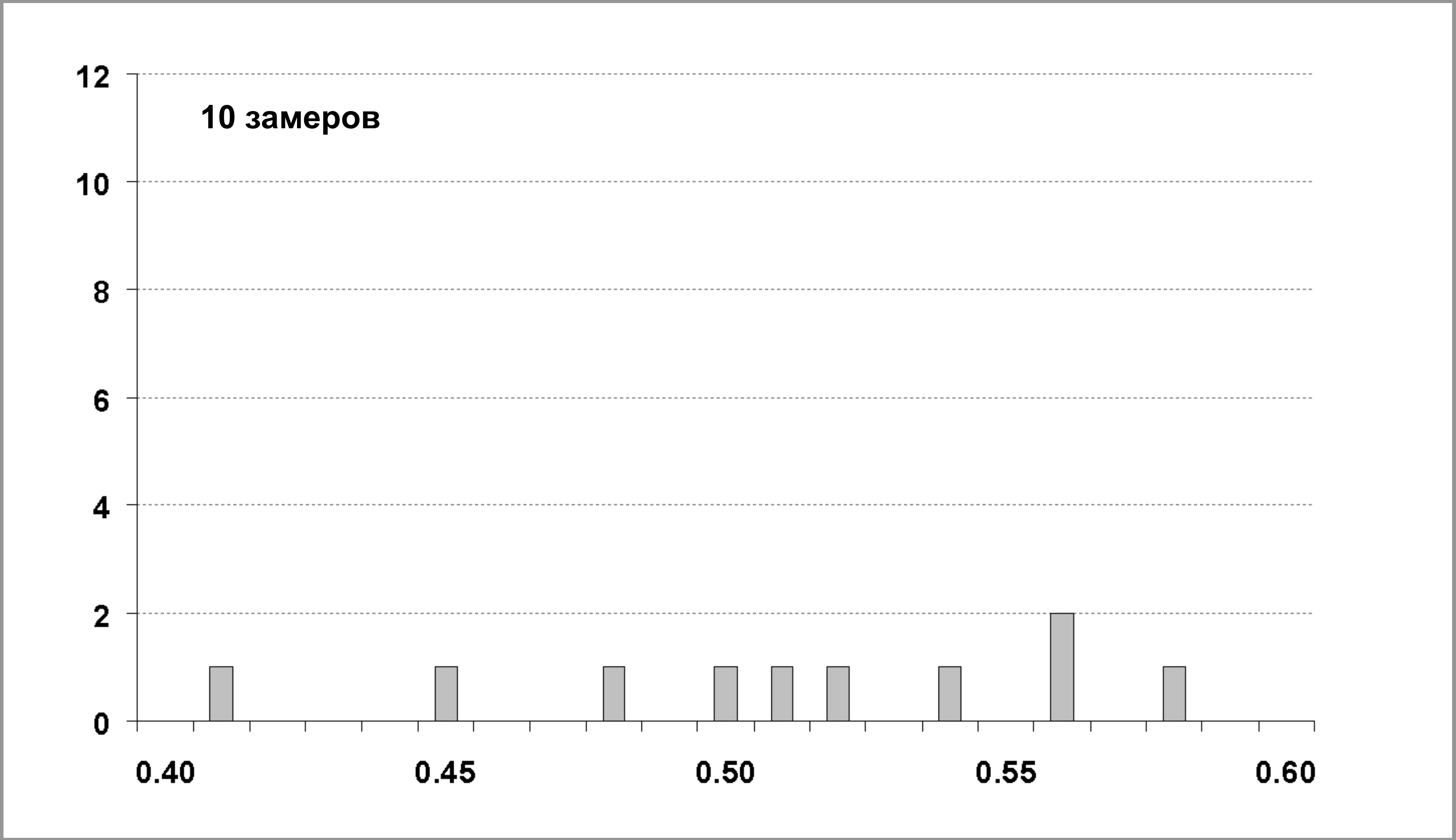
Как и в прошлый раз, коэффициент наклона был занижен, а константа (параметр отсечения) - завышен.

Эксперимент по методу Монте-Карло

Модель	b_1	b_2
1	1.63	0.54
2	2.52	0.48
3	2.13	0.45
4	2.14	0.50
5	1.71	0.56
6	1.81	0.51
7	1.72	0.56
8	3.18	0.41
9	1.26	0.58
10	1.94	0.52

В таблице приведены результаты трех регрессий и добавлены полученные результаты, повторяющие этот процесс еще семь раз.

Эксперимент по методу Монте-Карло



На данном слайде представлена гистограмма для оценок β_2.

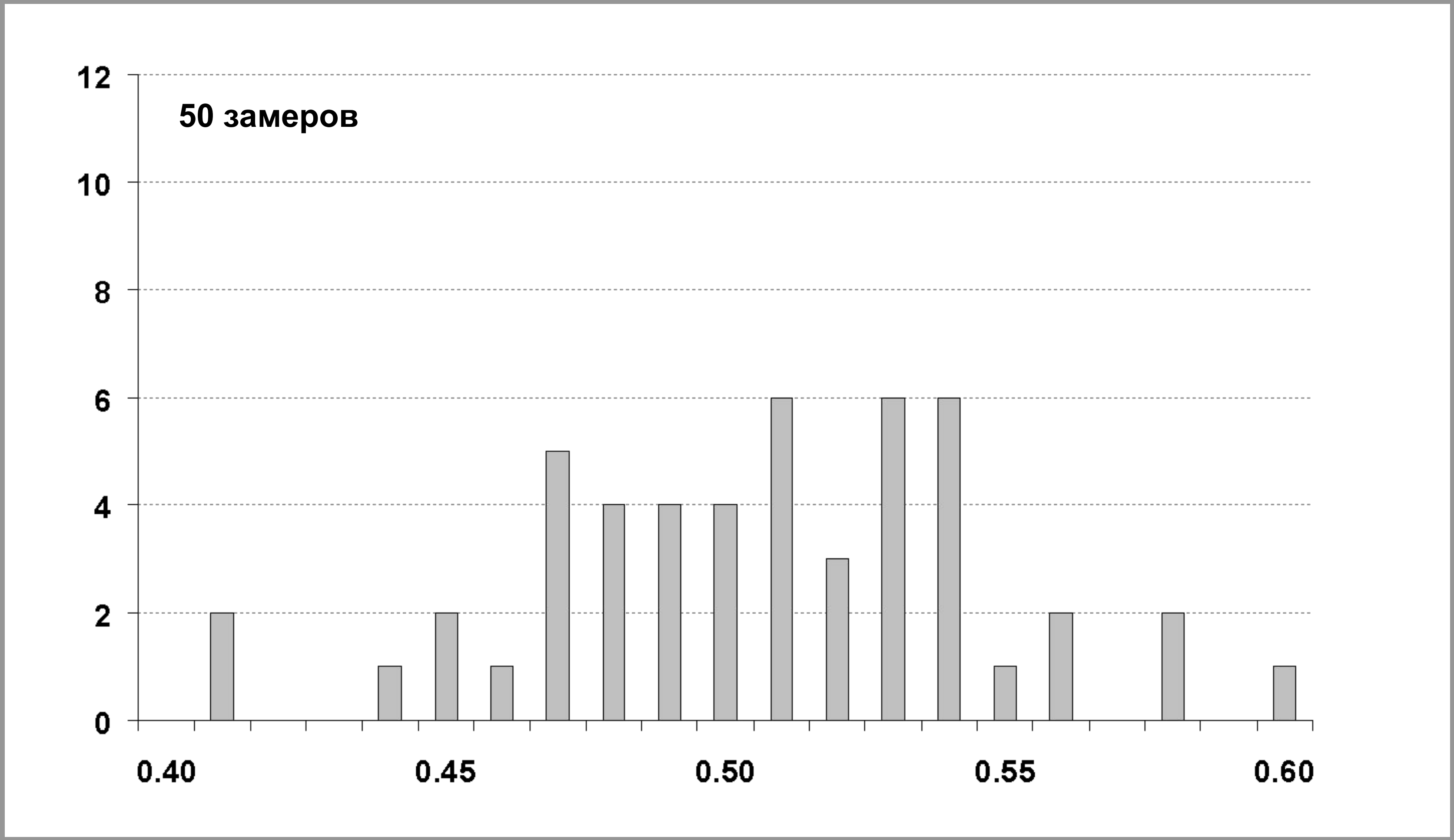
Особых изменений не было замечено.

Эксперимент по методу Монте-Карло

1-10	11-20	21-30	31-40	41-50
0.54	0.49	0.54	0.52	0.49
0.48	0.54	0.46	0.47	0.50
0.45	0.49	0.45	0.54	0.48
0.50	0.54	0.50	0.53	0.44
0.56	0.54	0.41	0.51	0.53
0.51	0.52	0.53	0.51	0.48
0.56	0.49	0.53	0.47	0.47
0.41	0.53	0.47	0.55	0.50
0.58	0.60	0.51	0.51	0.53
0.52	0.48	0.47	0.58	0.51

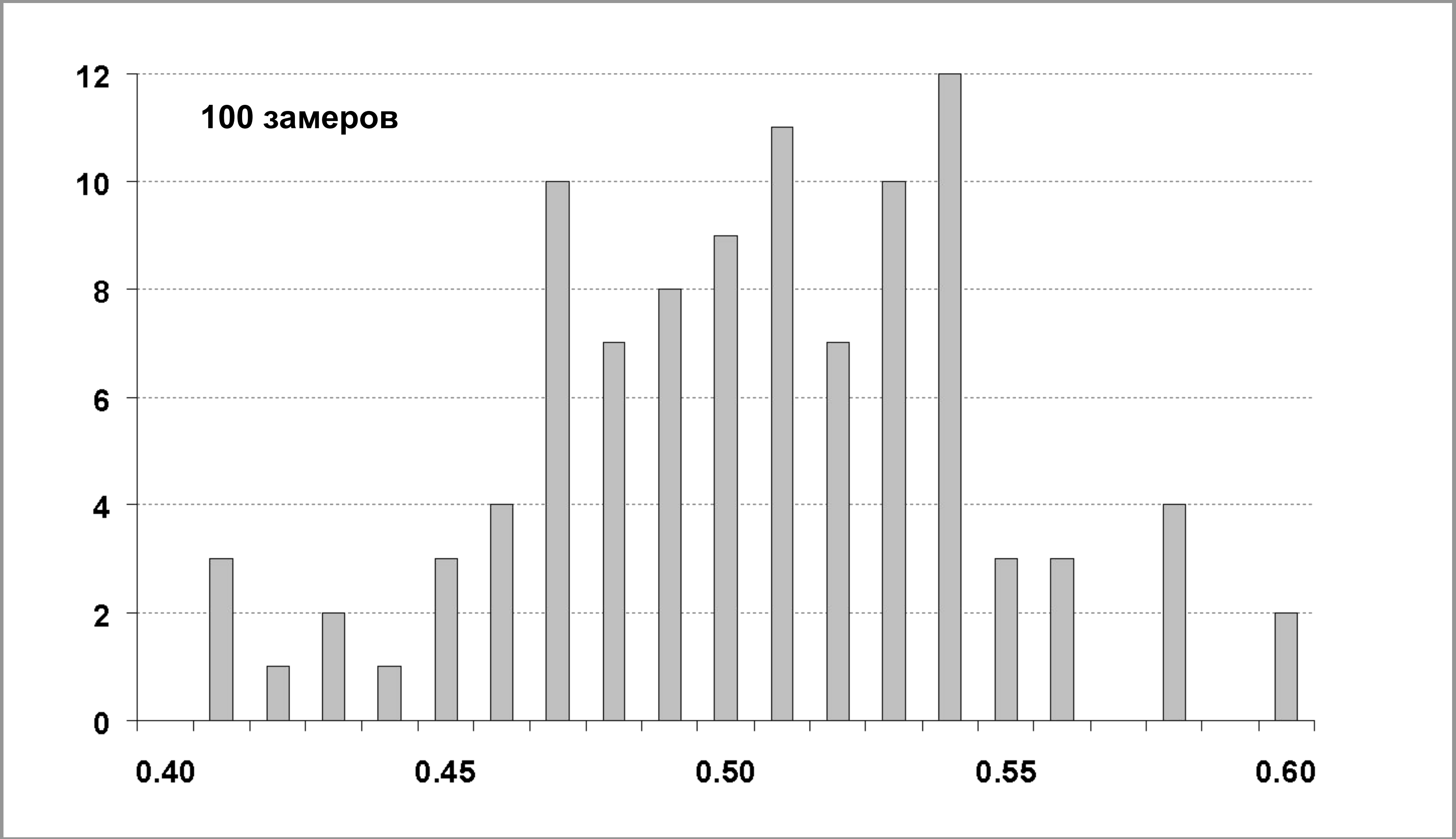
В данной таблице приведены оценки β_2 , полученные в ходе повторения процесса еще 40 раз.

Эксперимент по методу Монте-Карло



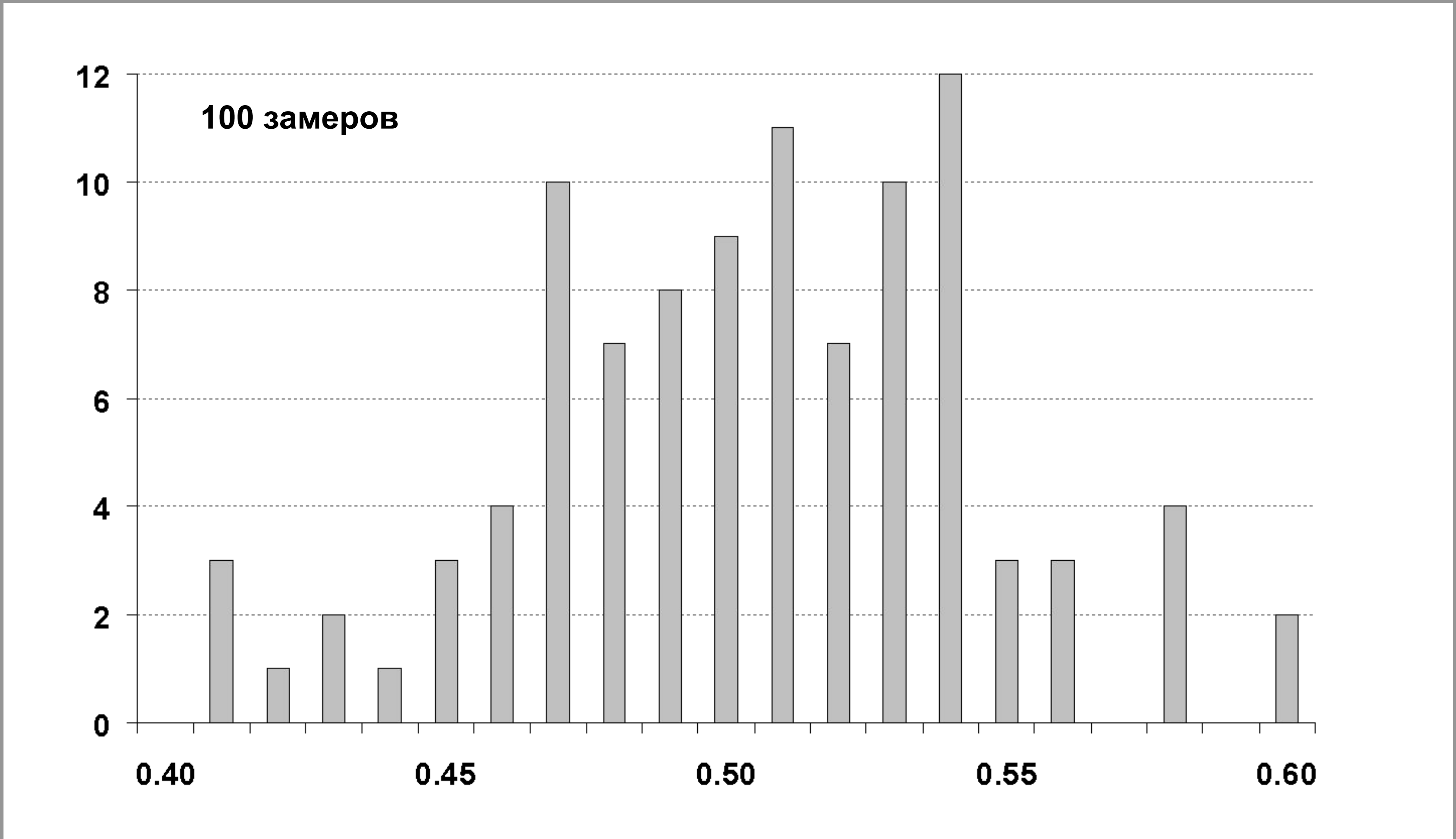
Гистограмма начинает проявлять центральную тенденцию.

Эксперимент по методу Монте-Карло



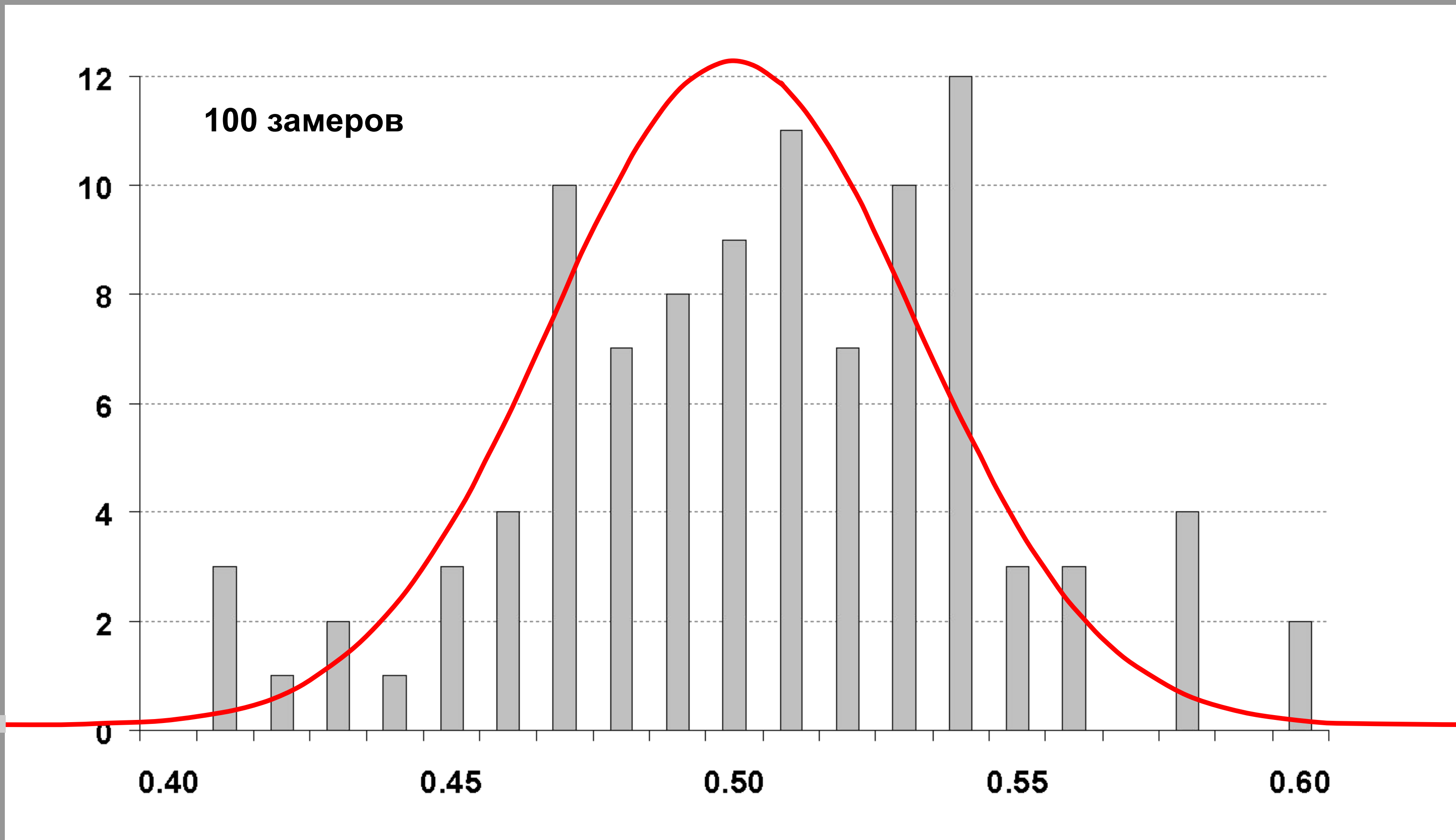
Это гистограмма со 100 повторениями. Мы видим, что распределение оказывается симметричным относительно истинного значения, подразумевая, что оценка несмещена.

Эксперимент по методу Монте-Карло



Однако, распределение все еще является довольно неровным. Было бы лучше повторить процесс 1,000,000 раз, возможно, даже больше.

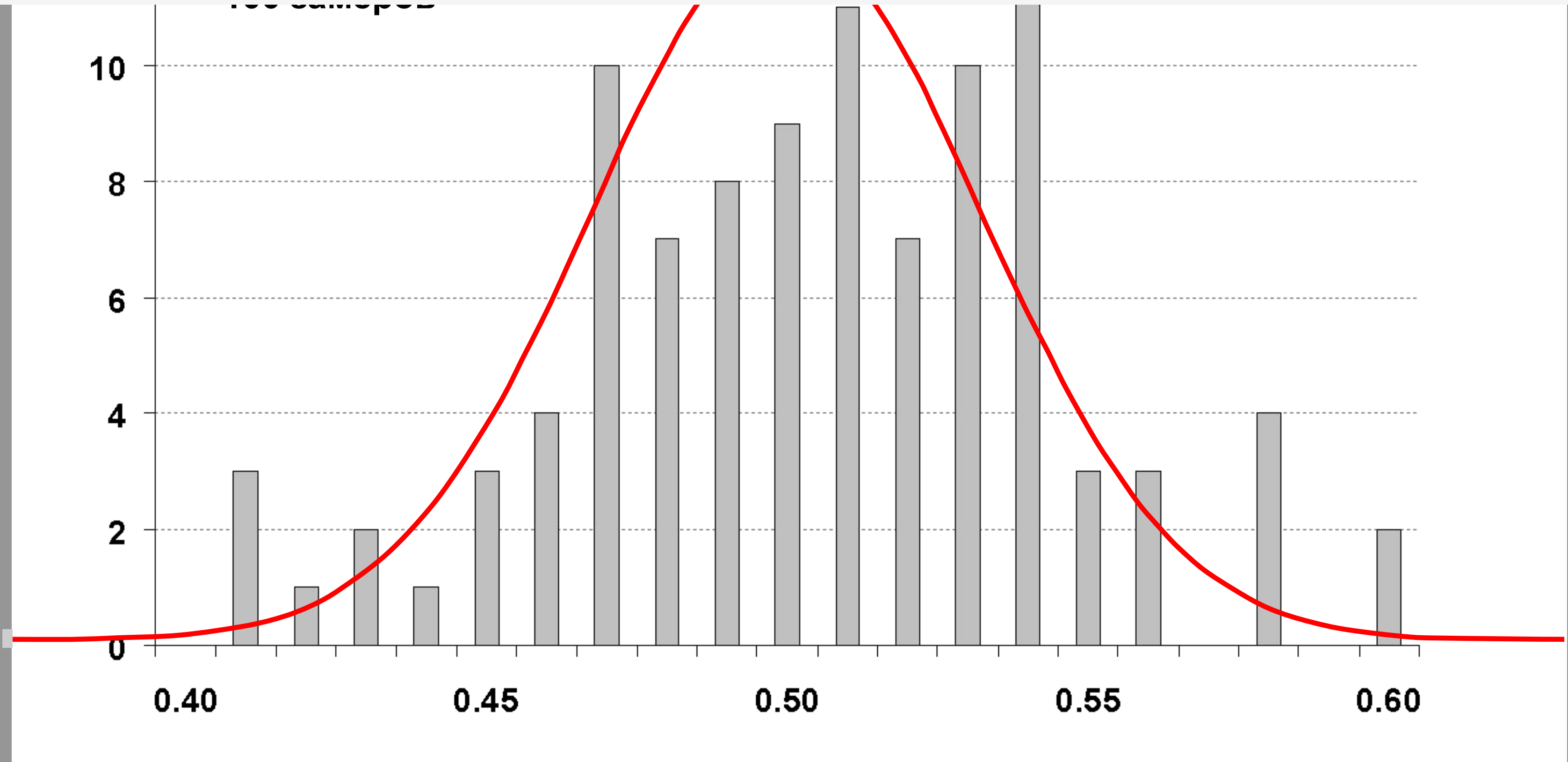
Эксперимент по методу Монте-Карло



Красная кривая показывает предельную форму распределения. Оно симметрично вокруг истинного значения, что указывает на то, что метод оценивания объективен.

Эксперимент по методу Монте-Карло

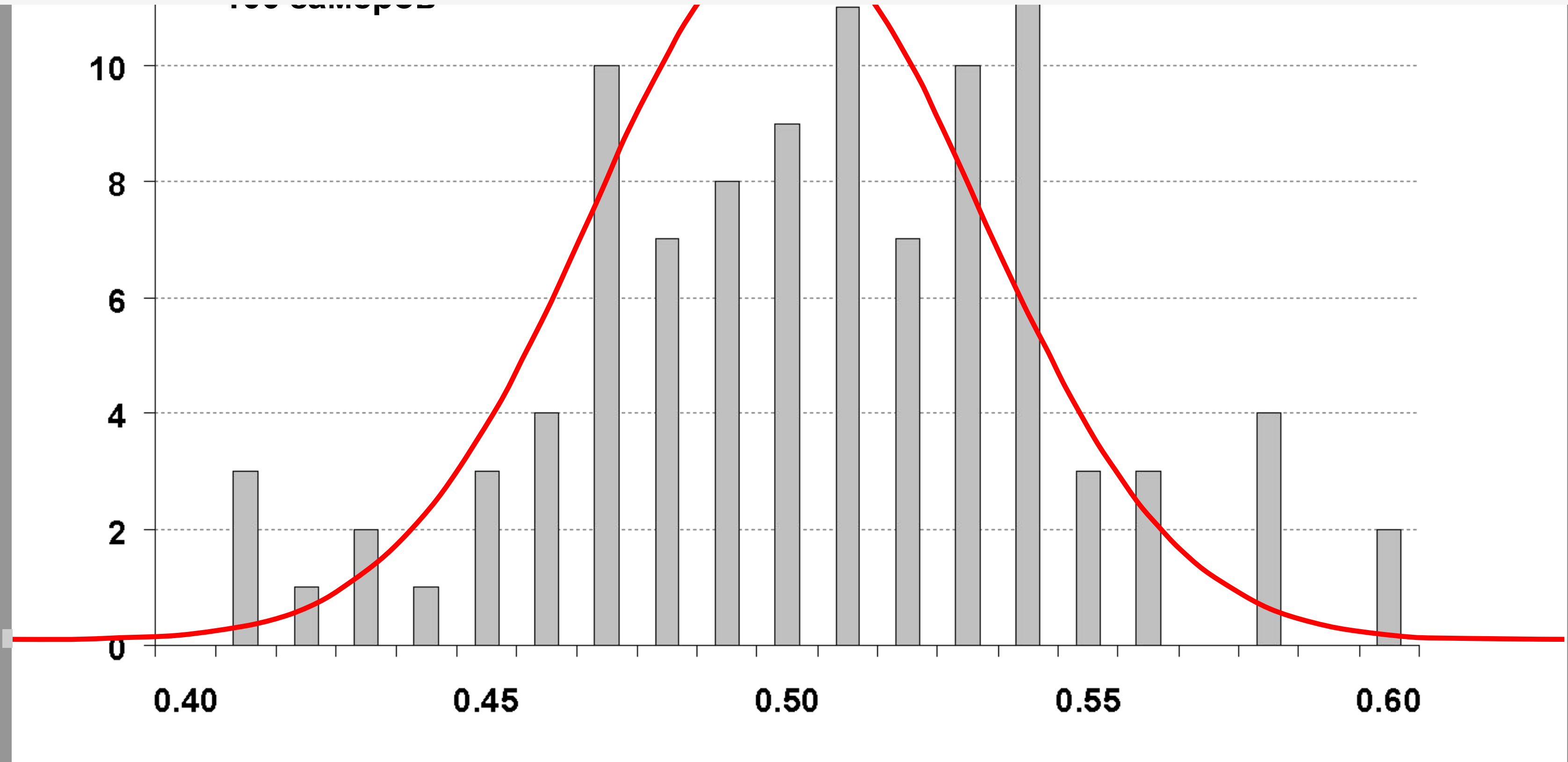
$$b_2 = \frac{\sum (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sum (X_i - \overline{X})^2} = \beta_2 + \sum a_t u_i$$



Распределение нормальное, так как случайная составляющая коэффициента представляет собой взвешенную линейную комбинацию значений остаточного члена в наблюдениях в образце. Мы продемонстрировали это в предыдущем слайд-шоу.

Эксперимент по методу Монте-Карло

$$b_2 = \frac{\sum (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sum (X_i - \overline{X})^2} = \beta_2 + \sum a_t u_i$$



Мы предполагаем (Аксиома А.6), что остаточный член в каждом наблюдении имеет нормальное распределение. Линейная комбинация нормально распределенных случайных величин имеет нормальное распределение.