

Интерактивное пособие для подготовки учащихся к ОГЭ (раздел «Геометрия»)

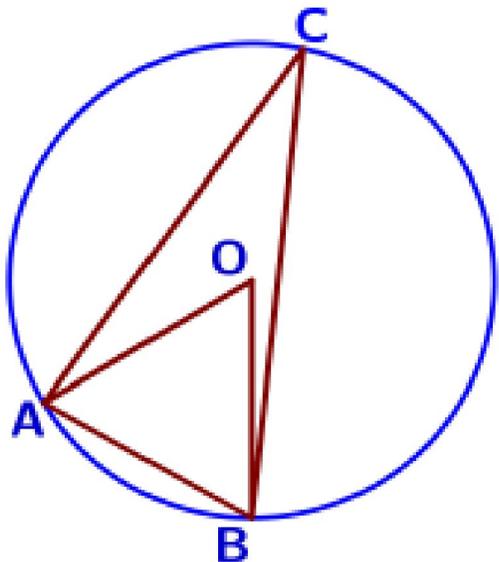
Задание 17

«Окружность»

Учитель математики МОУ СОШ №3

г. Хвалынска

Грибанова Татьяна Алексеевна



ДАНО:

$$\angle AOB = 59^\circ$$

НАЙТИ: $\angle ACB$

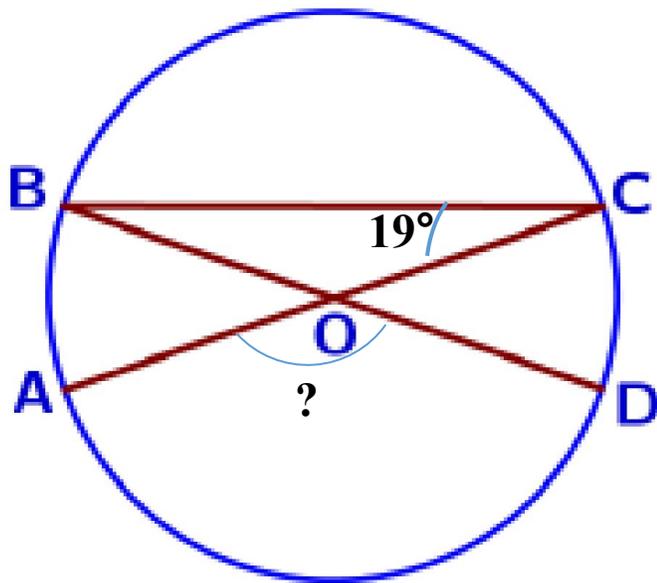
Шаг 1

Вписанный угол ACB равен половине центрального угла AOB .

Шаг 2

$$\angle ACB = 59^\circ : 2 = 29,5$$

Шаг 1



Дуга AB в 2 раза больше вписанного угла ACB, который опирается на нее. Диаметр BD отсекает дугу BD равную 180° (половина окружности)

Шаг 2

$$\text{Дуга } AB = 19^\circ \cdot 2 = 38^\circ$$

$$\text{Дуга } AD = 180^\circ - 38^\circ = 142^\circ$$

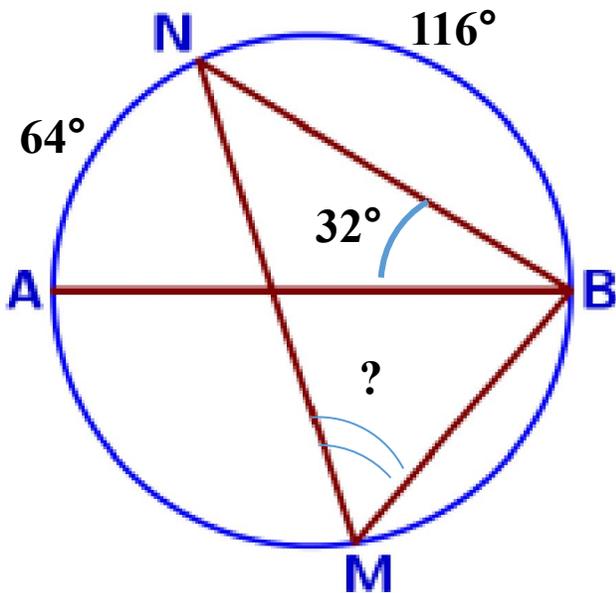
$\angle AOD$ (центральный) равен дуге, на которую он опирается, т. е. AD

$$\angle AOD = 142^\circ$$

ДАНО:

AC-диаметр; BD-диаметр;
 $\angle ACB = 19^\circ$

НАЙТИ: $\angle AOD$



ДАНО:

AB-диаметр; $\angle NBA = 32^\circ$

Найти: $\angle NMB$

Шаг 1

Вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается

$$\text{Дуга } AN = 32 \cdot 2 = 64^\circ$$

Шаг 2

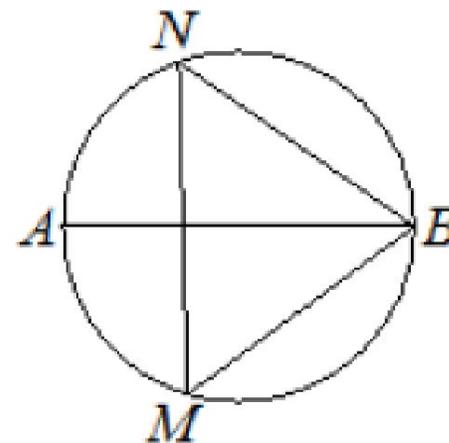
Дуга AB = 180° (половина окружности)

$$\text{Дуга } NB = 180^\circ - 64^\circ = 116^\circ$$

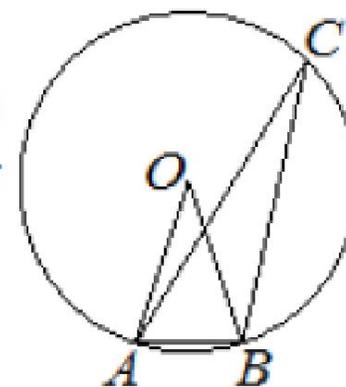
$$\angle NMB (\text{вписанный}) = 116^\circ : 2 = 58^\circ$$

Задания для самостоятельного решения

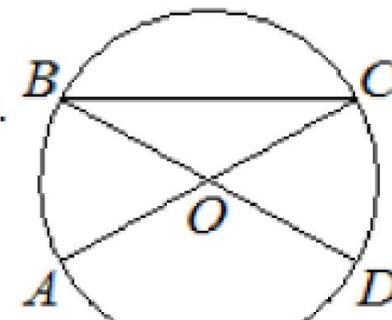
На окружности по разные стороны от диаметра AB взяты точки M и N . Известно, что $\angle NBA = 36^\circ$. Найдите угол NMB . Ответ дайте в градусах.

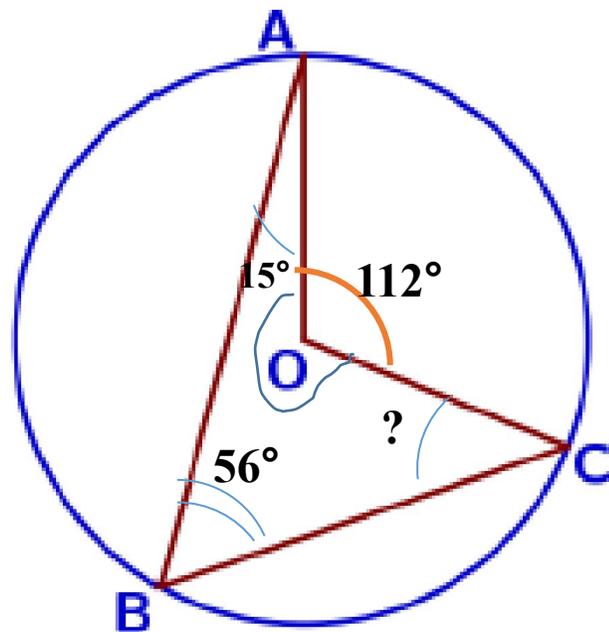


Треугольник ABC вписан в окружность с центром в точке O . Точки O и C лежат в одной полуплоскости относительно прямой AB . Найдите угол ACB , если угол AOB равен 27° . Ответ дайте в градусах.



В окружности с центром в точке O отрезки AC и BD — диаметры. Угол AOD равен 148° . Найдите угол ACB . Ответ дайте в градусах.





ДАНО:

$$\angle ABC = 56^\circ; \angle OAB = 15^\circ$$

НАЙТИ: $\angle BCO$

Шаг 1

ВАОС-четыреугольник.
Сумма всех его внутренних углов

Шаг 2

$\angle AOC(\text{внешний}) = 56^\circ * 2 = 112^\circ$, так как центральный опирается на дугу $AC = 56^\circ$

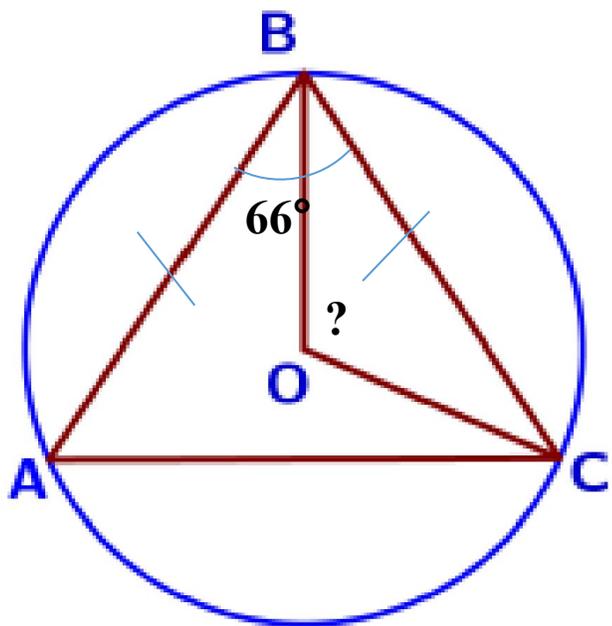
Шаг 3

Тогда $\angle AOC(\text{внутренний}) = 360^\circ - 112^\circ = 248^\circ$

Шаг 4

$$56^\circ + 15^\circ + 248^\circ + ? = 360^\circ$$

$$\angle BCO = ? = 41^\circ$$



ДАНО:

▲ ABC-равнобедренный;

AB=BC; $\angle ABC=66^\circ$

Найти: $\angle BOC$

Шаг 1

$\angle BAC = (180^\circ - 66^\circ) : 2 = 57^\circ$, так как сумма углов в треугольнике 180° и он равнобедренный.

Шаг 2

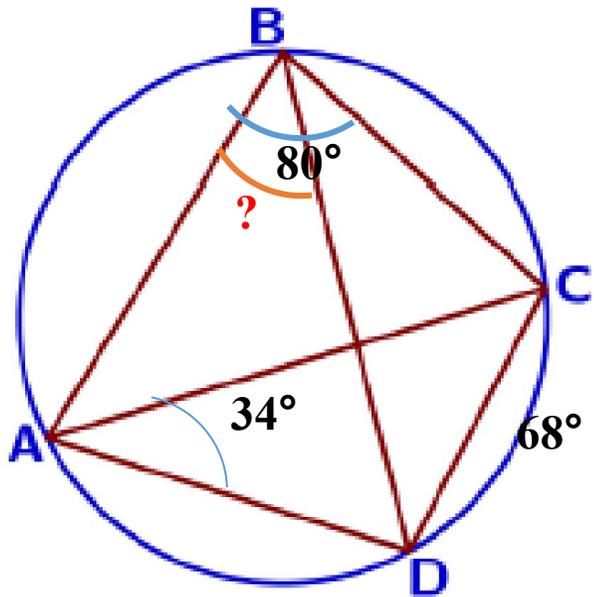
$\angle BOC$ -центральный и опирается на ту же дугу BC, что и угол BAC.

Шаг 3

Если центральный и вписанный углы опираются на одну и ту же дугу, то центральный в 2 раза больше вписанного.

Шаг 4

Значит, $\angle BOC = 2 * \angle BAC = 2 * 57^\circ = 114^\circ$



Дано:

$$\angle ABC = 80^\circ; \angle CAD = 34^\circ$$

Найти: $\angle ABD$

Шаг 1

Вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается.

Шаг 2

$$\text{Дуга } AC = 80^\circ * 2 = 160^\circ$$

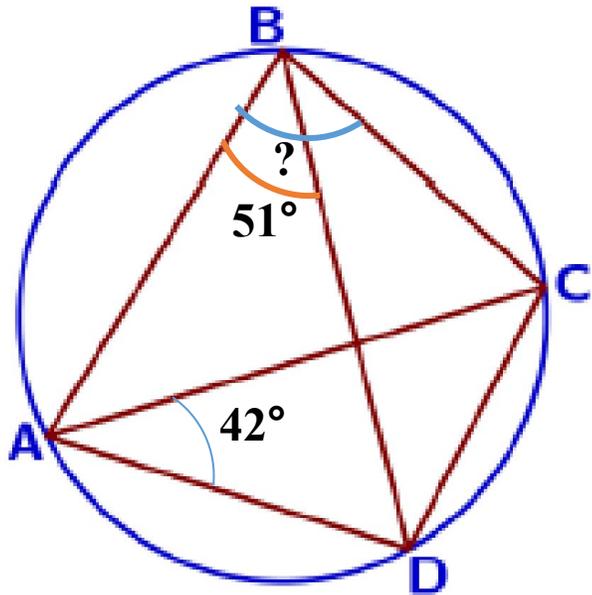
$$\text{Дуга } CD = 34^\circ * 2 = 68^\circ$$

Шаг 3

Искомый угол $\angle ABC$ опирается на дугу $AD = \text{дуга } AC - \text{дуга } CD = 160^\circ - 68^\circ = 92^\circ$.

Шаг 4

$$\angle ABD = \text{дуга } AD : 2 = 92^\circ : 2 = 46^\circ$$



Дано:

$$\angle ABD = 51^\circ; \angle CAD = 42^\circ$$

Найти: $\angle ABC$

Шаг 1

Вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается.

Шаг 2

$$\text{Дуга } AD = 51^\circ \cdot 2 = 102^\circ$$

$$\text{Дуга } CD = 42^\circ \cdot 2 = 84^\circ$$

Шаг 3

Искомый угол $\angle ABC$ опирается на дугу $AC = \text{дуга } AD + \text{дуга } CD = 102^\circ + 84^\circ = 186^\circ$.

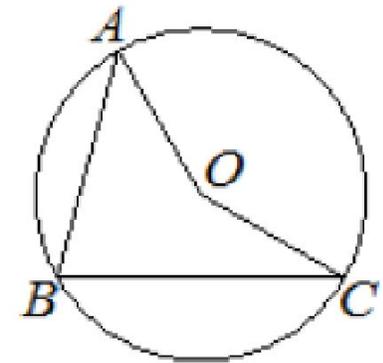
Шаг 4

$$\angle ABC = \text{дуга } AC : 2 = 186^\circ : 2 = 93^\circ$$

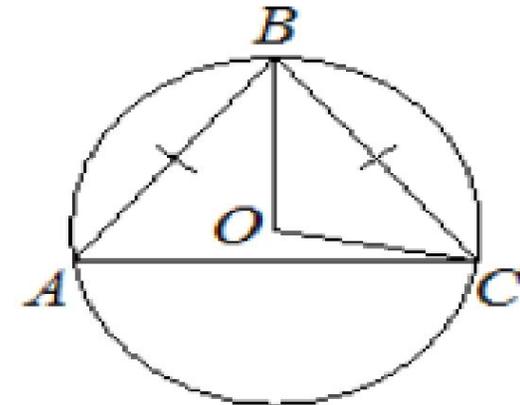
Задания для самостоятельного решения

Точка O — центр окружности, на которой лежат точки A , B и C . Известно, что $\angle ABC = 75^\circ$ и $\angle OAB = 43^\circ$.

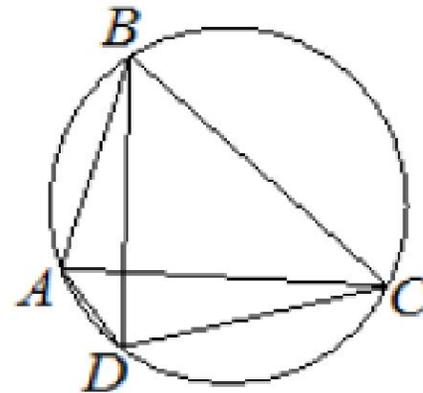
Найдите угол BCO . Ответ дайте в градусах.

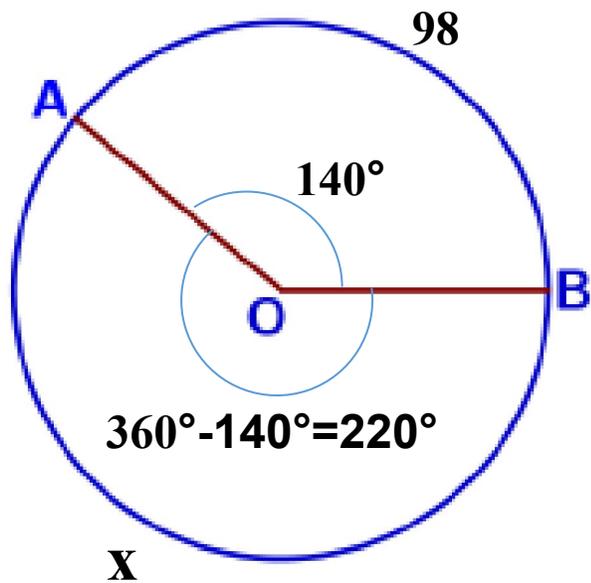


Окружность с центром в точке O описана около равнобедренного треугольника ABC , в котором $AB = BC$ и $\angle ABC = 79^\circ$. Найдите угол BOC . Ответ дайте в градусах.



Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ACB равен 70° , угол CAD равен 49° . Найдите угол ABD . Ответ дайте в градусах.





ДАНО:

$$\angle AOB = 140^\circ;$$

Длина меньшей дуги $AB = 98$.

Найти: длину большей дуги AB

Шаг 1

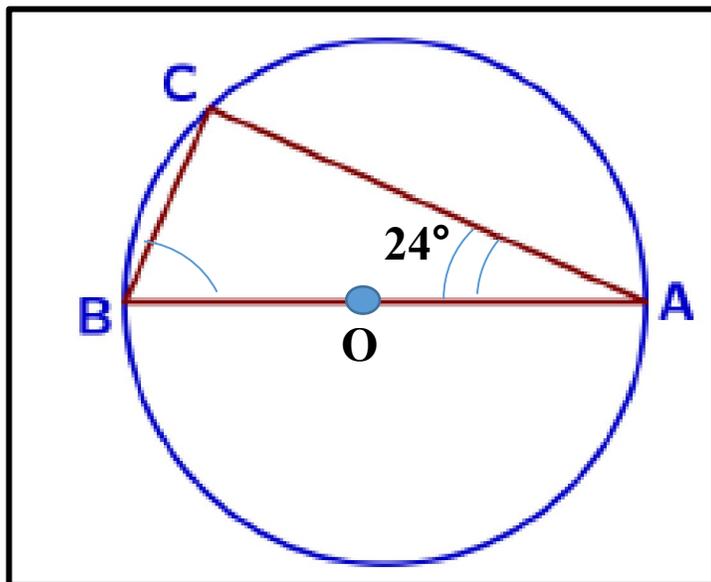
Длина большей дуги AB : длина меньшей дуги $AB =$ больший угол AOB : меньший угол AOB

Шаг 2

$$X : 98 = 220^\circ : 140^\circ$$

$$X * 140^\circ = 98 * 220^\circ \text{ (произведение крайних равно произведению средних)}$$

$$X = \text{большая дуга } AB = 154$$



*Центр окружности,
описанной около треугольника
ABC, лежит на стороне AB.*

$$\angle BAC = 24^\circ$$

Найти: $\angle ABC$

Шаг 1

*Если одна из сторон треугольника
является диаметром, то этот
треугольник прямоугольный.*

Шаг 2

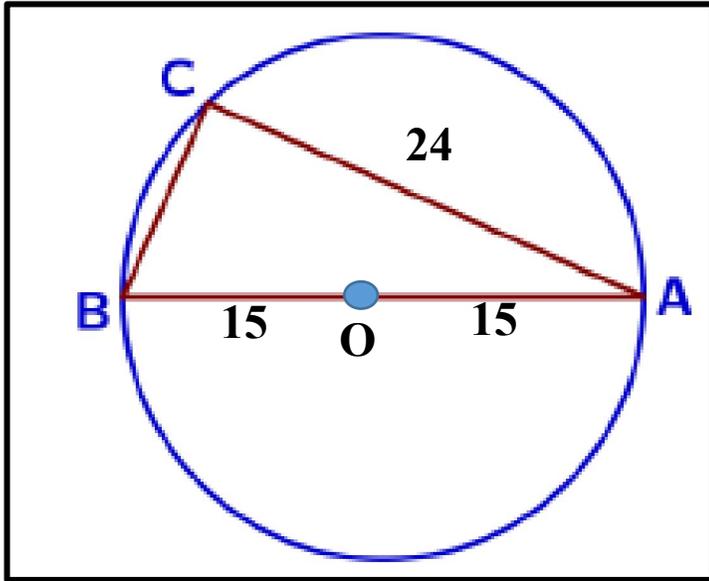
**Сумма острых углов прямоугольного
треугольника равна 90°**

Шаг 3

$$\angle ABC = 90^\circ - 24^\circ = 66^\circ$$

Шаг 1

Если одна из сторон треугольника является диаметром, то этот треугольник прямоугольный.



*Центр окружности, описанной около треугольника ABC, лежит на стороне AB. Радиус окружности равен 15; AC=24
Найти: BC*

Шаг 2

$$AB\text{-гипотенуза}=2*\text{радиус}=2*15=30$$

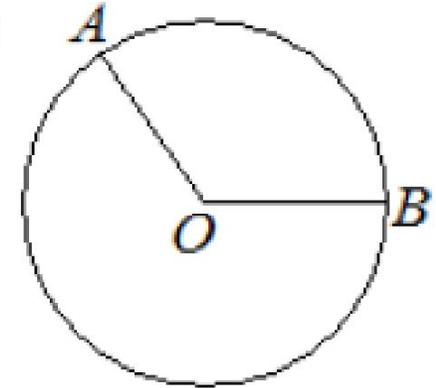
Шаг 3

По теореме Пифагора

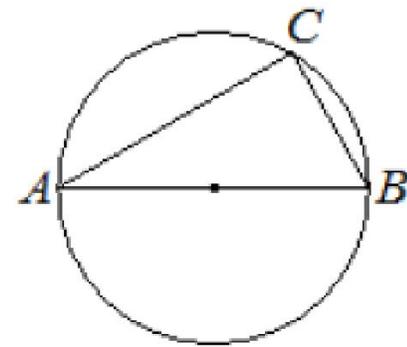
$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{AB*AB-AC*AC}= \\ &= \sqrt{30*30-24*24}=\sqrt{324}=18 \end{aligned}$$

Задания для самостоятельного решения

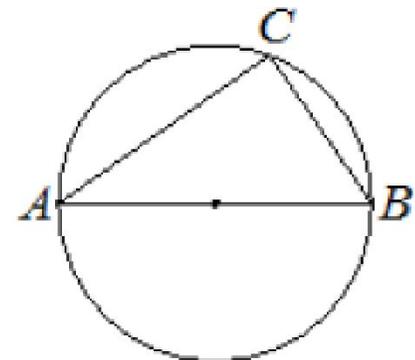
На окружности с центром в точке O отмечены точки A и B так, что $\angle AOB = 140^\circ$. Длина меньшей дуги AB равна 98. Найдите длину большей дуги AB .

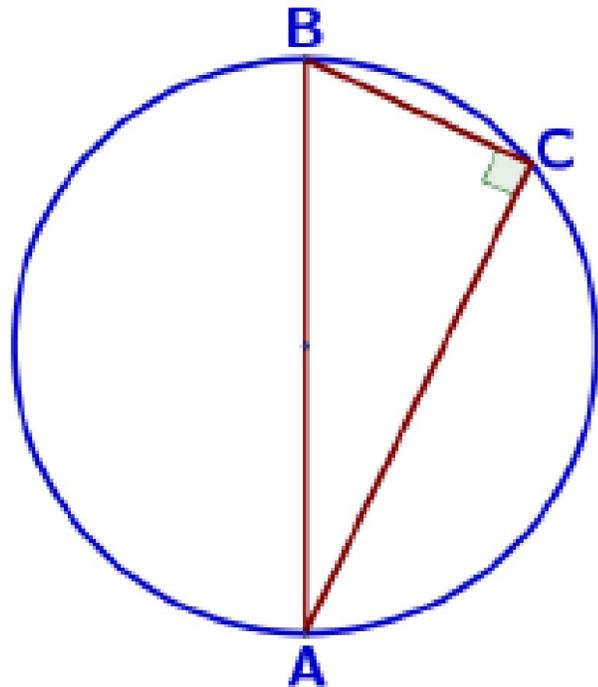


Центр окружности, описанной около треугольника ABC , лежит на стороне AB . Найдите угол ABC , если угол BAC равен 30° . Ответ дайте в градусах.



Центр окружности, описанной около треугольника ABC , лежит на стороне AB . Радиус окружности равен 20. Найдите BC , если $AC = 32$.





ДАНО:

$\angle C = 90^\circ$; $AC = 12$; $BC = 5$;

Найти: радиус описанной
окружности

Шаг 1

*Радиус, описанной около
прямоугольного треугольника,
окружности равен половине
гипотенузы*

Шаг 2

$$R = AB : 2;$$

$$AB = \sqrt{AC * AC + BC * BC} = \sqrt{12 * 12 + 5 * 5} = \\ = \sqrt{169} = 13;$$

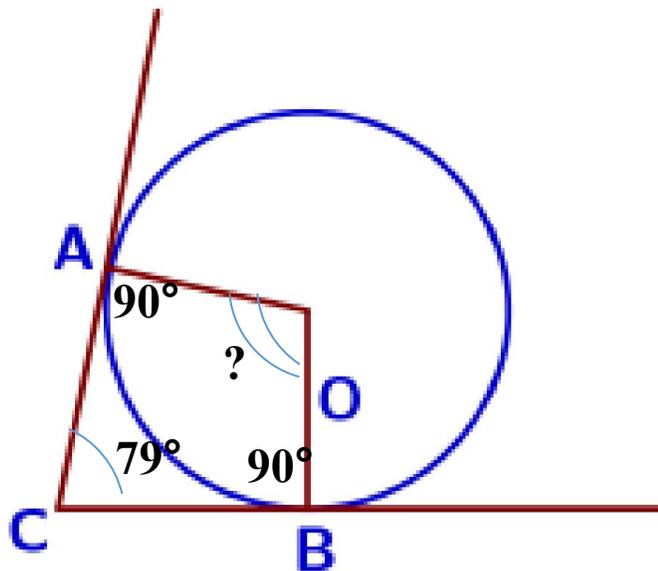
$$R = 13 : 2 = 6,5.$$

Шаг 1

Радиус окружности, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной.

Шаг 2

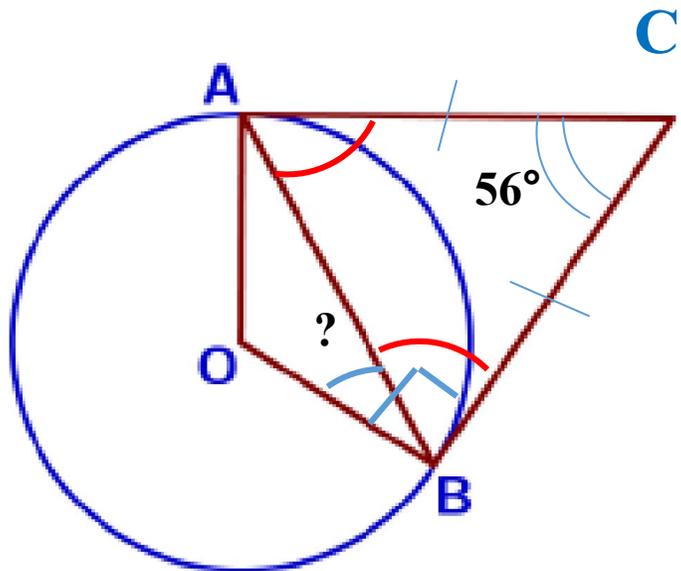
*Сумма углов четырехугольника $CAOB$ равна 360°
 $\angle AOB = 360^\circ - (90^\circ + 90^\circ + 79^\circ) = 101^\circ$*



ДАНО:

$$\angle C = 79^\circ$$

Найти: $\angle AOB$



ДАНО:

$$\angle C = 56^\circ$$

Найти $\angle ABO$

Шаг 1

Радиус окружности, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной.

$$\angle CBO = 90^\circ$$

Шаг 2

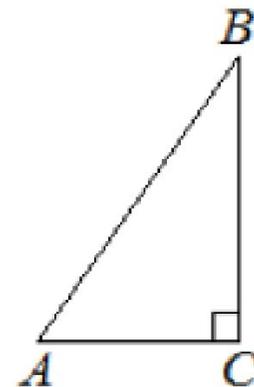
▲ $\triangle ACB$ -равнобедренный (отрезки касательных $AC = AB$);

$$\angle CBA = (180^\circ - 56^\circ) : 2 = 62^\circ$$

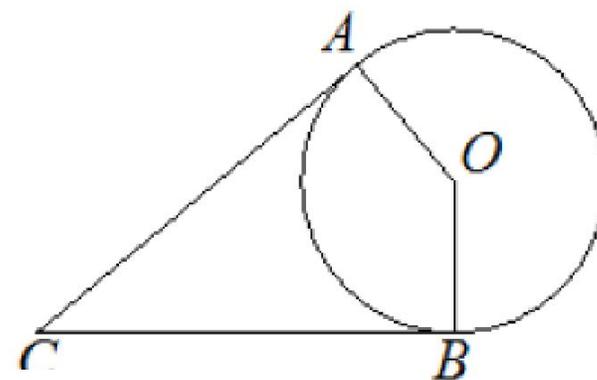
$$\angle ABO = 90^\circ - 62^\circ = 28^\circ$$

Задания для самостоятельного решения

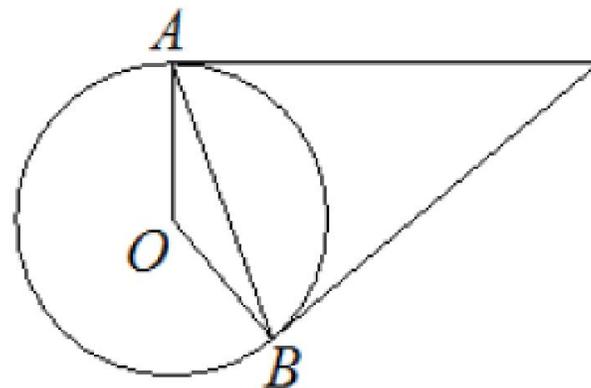
В треугольнике ABC известно, что $AC = 8$, $BC = 15$, угол C равен 90° . Найдите радиус описанной около этого треугольника окружности.



В угол C величиной 40° вписана окружность, которая касается сторон угла в точках A и B , точка O — центр окружности. Найдите угол AOB . Ответ дайте в градусах.



Касательные в точках A и B к окружности с центром в точке O пересекаются под углом 38° . Найдите угол ABO . Ответ дайте в градусах.



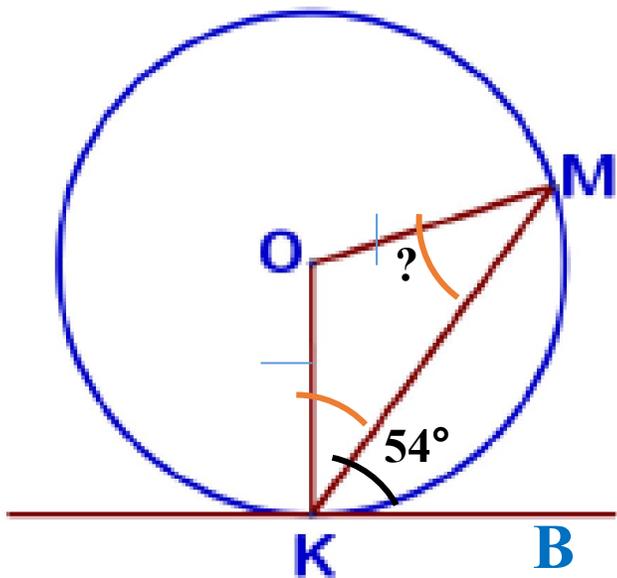
Шаг 1

Радиус окружности, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной.

$$\angle OKB = 90^\circ$$

Шаг 2

▲ *КОМ-равнобедренный (ОМ=ОК=радиусы)*
 $\angle K = \angle ОКМ = 90^\circ - 54^\circ = 86^\circ$

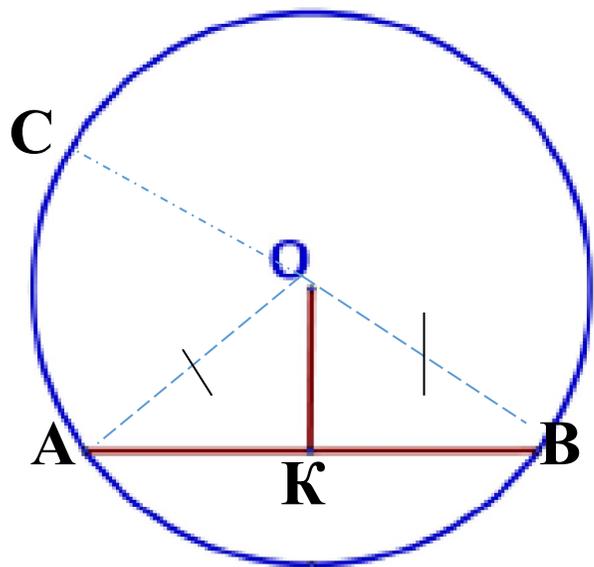


ДАНО:

KB-касательная;

$$\angle MKB = 54^\circ$$

Найти: $\angle ОКМ$



Шаг 1

▲ *AOB-равнобедренный (OA=OB-радиусы);*

OK-высота, медиана;

$$KB=72:2=36$$

Шаг 2

▲ *OKB-прямоугольный; OB-гипотенуза;*

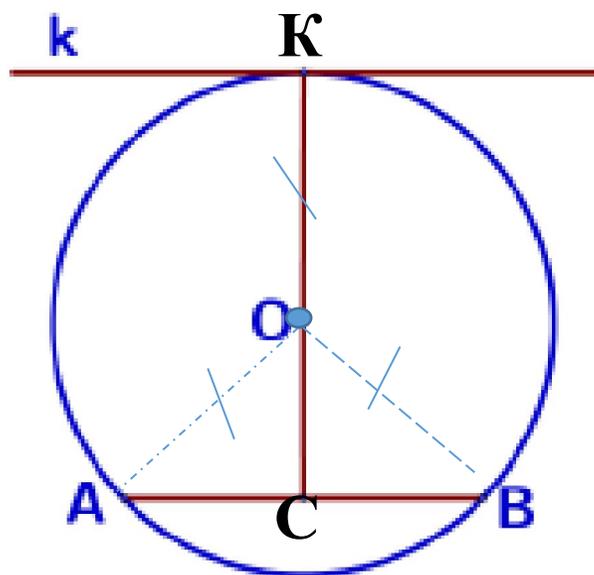
$$OB=\sqrt{OK*OK+KB*KB}=\sqrt{27*27+36*36}=\sqrt{2025}=45;$$

$$\text{Диаметр} = 2*OB=2*45=90.$$

ДАНО: AB-хорда; OK-расстояние от центра O до хорды;

$$AB=72; OK=27;$$

Найти: диаметр окружности



Дано: k -касательная; AB -
хорда;
Радиус окружности=65;
 $AB=126$;
Найти: расстояние от хорды
 AB до касательной $K=CK$

Шаг 1

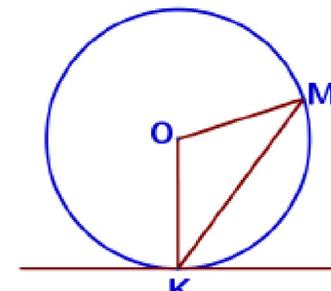
$CK=CO+OK$;
 $OK=OA=OB$ -радиусы=65;
▲ AOB -равнобедренный;
 OC -высота и медиана;
 $CB=AB:2=126:2=63$

Шаг 2

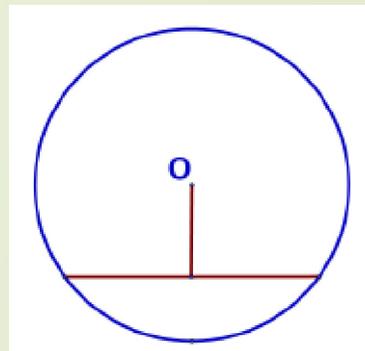
▲ OCB -прямоугольный;
 $CO=\sqrt{OB*OB-CB*CB}$;
 $CO=\sqrt{65*65-63*63}=\sqrt{256}=16$;
 $CK=CO+OK=16+65=81$.

Задания для самостоятельного решения

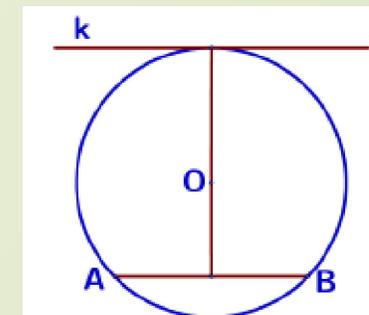
41. Прямая касается окружности в точке K . Точка O – центр окружности. Хорда KM образует с касательной угол, равный 75° . Найдите величину угла OMK . Ответ дайте в градусах.

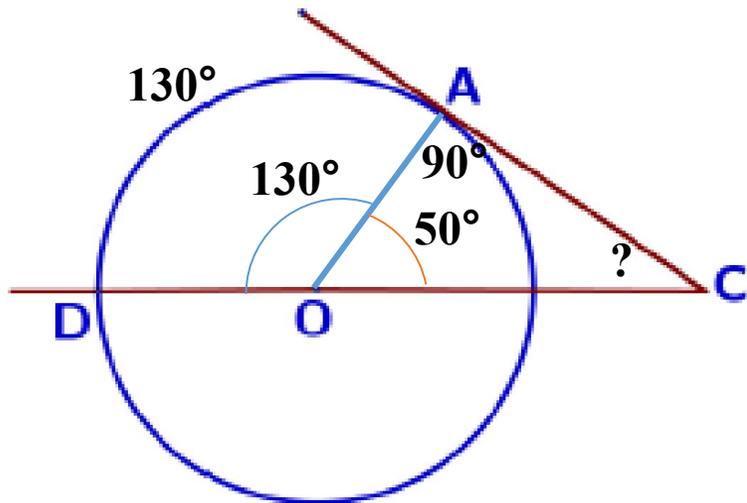


45. Длина хорды окружности равна 48, а расстояние от центра окружности до этой хорды равно 70. Найдите диаметр окружности.



59. Радиус окружности с центром в точке O равен 82, длина хорды AB равна 36. Найдите расстояние от хорды AB до параллельной ей касательной k .





ДАНО:

Дуга $AD=130^\circ$;

Найти: $\angle ACO$

Шаг 1

Радиус окружности, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной.

$$\angle OAC = 90^\circ$$

Шаг 2

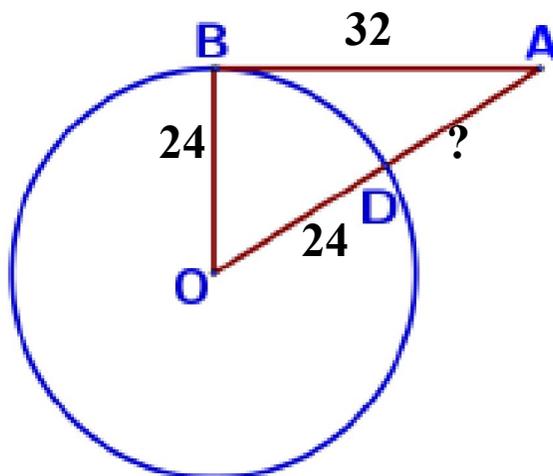
$\angle AOD = 130^\circ$ (так как он центральный и равен дуге AD);

$\angle AOC = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$ (так как он смежный);

В $\triangle AOC$ – прямоугольном $\angle O + \angle C = 90^\circ$;

$\angle ACO = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$.

Шаг 1



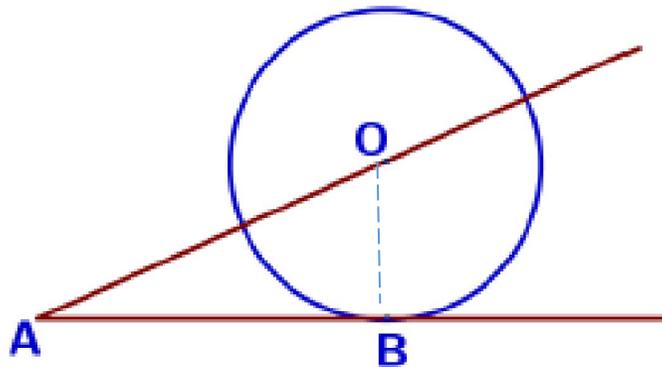
Радиус окружности, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной.

$$\angle OBA = 90^\circ$$

Шаг 2

Дано:
AB=32; радиус
окружности=24;
Найти: AD

OB-радиус окружности=24;
▲ OBA-прямоугольный;
 $AO = \sqrt{OB \cdot OB + AB \cdot AB} = \sqrt{24 \cdot 24 + 32 \cdot 32} = \sqrt{1600} = 40$;
AD=AO-радиус OD=40-24=16.



Шаг 1

Радиус окружности, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной.

$$\angle OBA = 90^\circ$$

Шаг 2

Дано:

$$AB=12; AO=13;$$

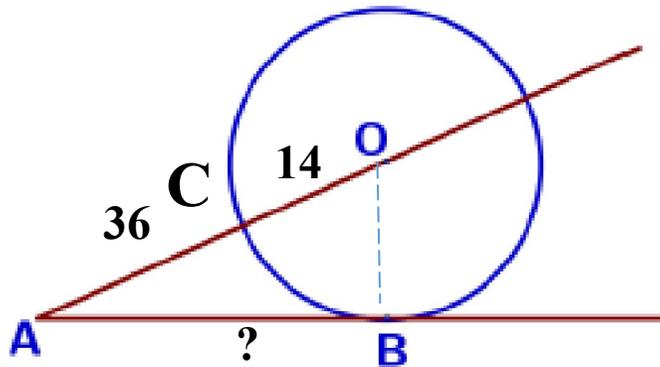
Найти:

радиус окружности(OB)

OB-радиус окружности;

▲ OBA-прямоугольный;

$$OB = \sqrt{AO^2 - AB^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{25} = 5;$$



Дано:
 $OC=14$; $AC=36$;

Найти: AB

Шаг 1

Радиус окружности, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной.

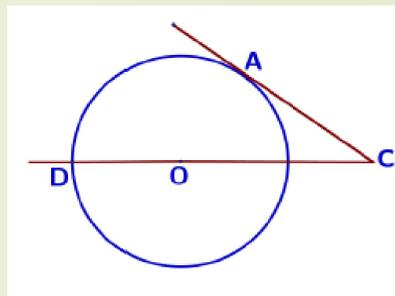
$$\angle OBA = 90^\circ$$

Шаг 2

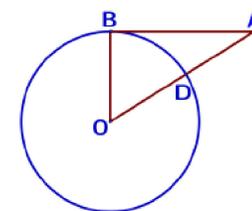
$OB=OC=14$ -радиусы окружности;
▲ OBA -прямоугольный; $AO=36+14=50$;
 $AB=\sqrt{AO*AO-OB*OB}=\sqrt{50*50-14*14}=\sqrt{2304}=48$;

Задания для самостоятельного решения

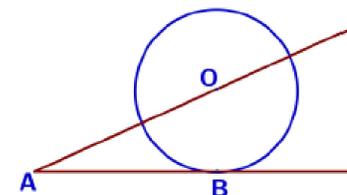
29. Найдите угол $АСО$, если его сторона $СА$ касается окружности, O – центр окружности, а дуга AD окружности, заключённая внутри этого угла, равна 140° .



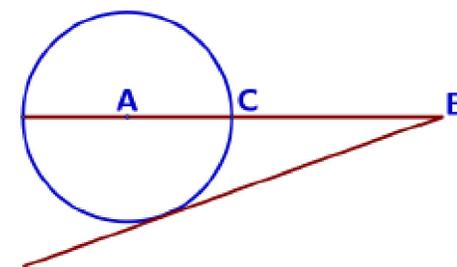
32. Отрезок $AB=48$ касается окружности радиуса 14 с центром O в точке B . Окружность пересекает отрезок AO в точке D . Найдите AD .

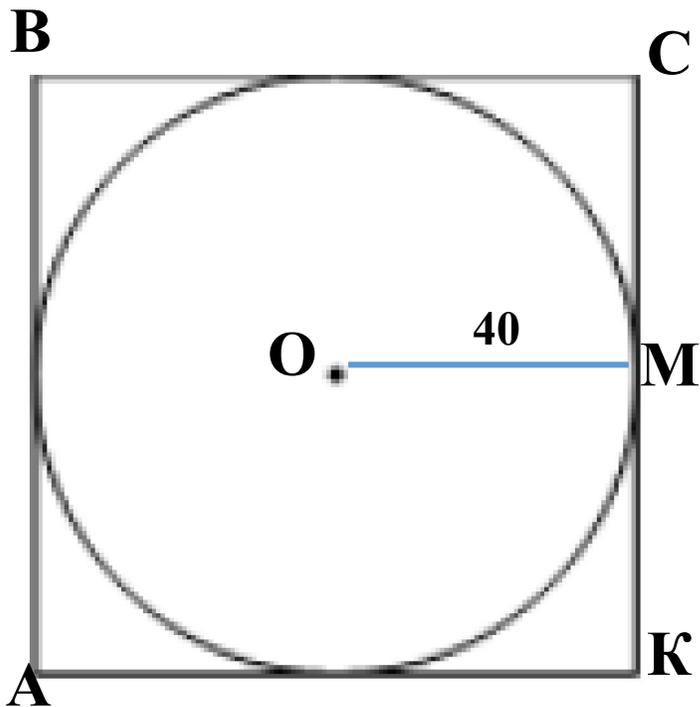


35. К окружности с центром в точке O проведены касательная AB и секущая AO . Найдите радиус окружности, если $AB=40$ см, $AO=85$ см.



38. На отрезке AB выбрана точка C так, что $AC=6$ и $BC=4$. Построена окружность с центром A , проходящая через C . Найдите длину отрезка касательной, проведённой из точки B к этой окружности.





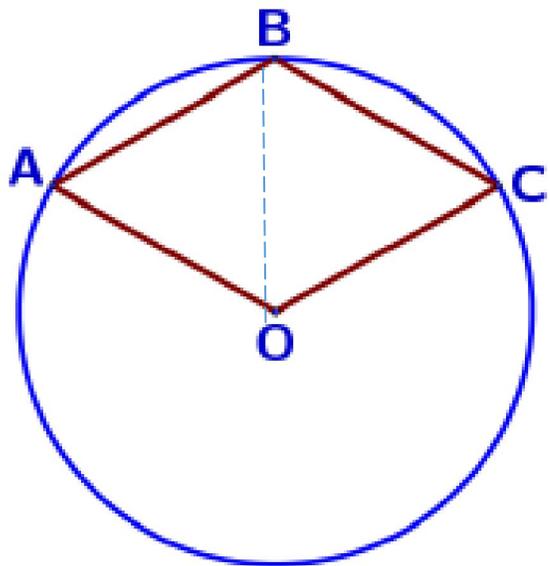
ДАНО: ABCK-квадрат
Радиус окружности=40
НАЙТИ: площадь квадрата

Шаг 1

$$S_{\text{квадрата}} = AB * BC = AB * AB$$

Шаг 2

$$AB = OM + OM = 40 + 40 = 80;$$
$$S = 80 * 80 = 6400.$$



ДАНО: OABC-ромб

НАЙТИ: $\angle OAB$

Шаг 1

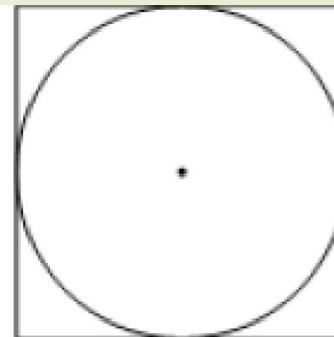
*Проведём радиус OB.
OA-тоже радиус.
Стороны ромба равны, значит,
 $OA=AB=OB$*

Шаг 2

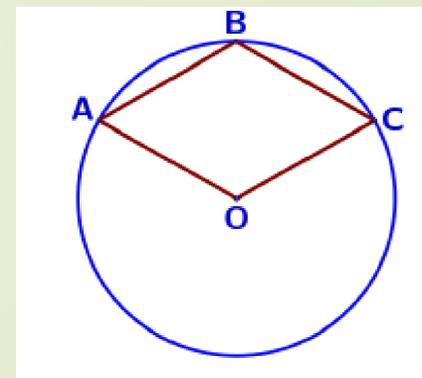
▲ OAB-равносторонний;
Значит, $\angle OAB=60^\circ$
Тогда $\angle ABC=120^\circ$ (так как углы, прилежащие к одной стороне ромба, в сумме 180°)

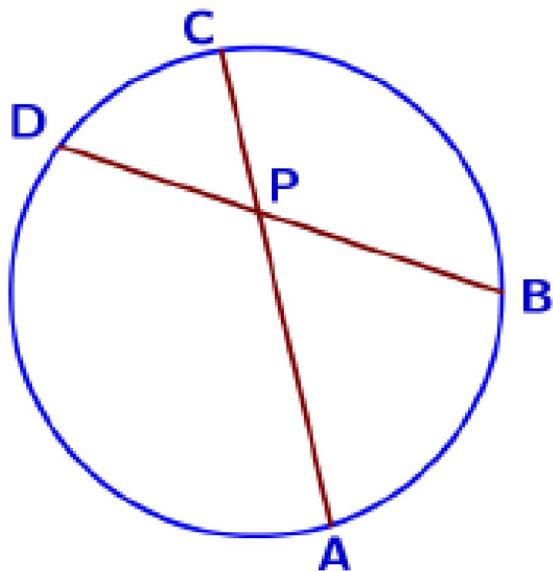
Задания для самостоятельного решения

Найдите площадь квадрата, описанного около окружности радиуса 4.



22. Точка O – центр окружности, на которой лежат точки A , B и C таким образом, что $OABC$ – ромб. Найдите угол ABC . Ответ дайте в градусах.





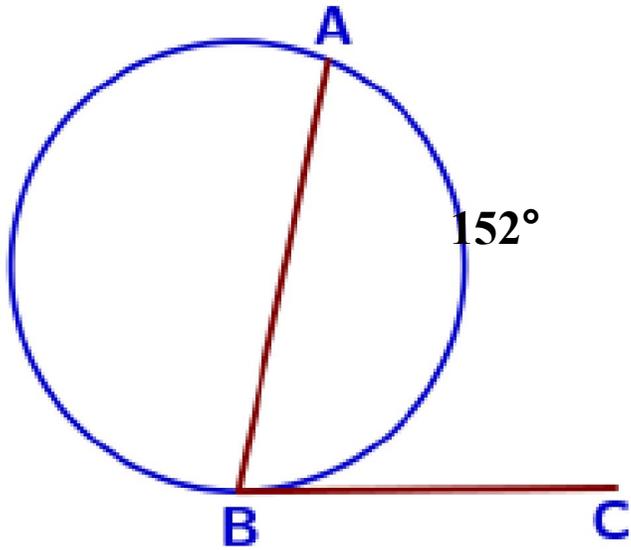
ДАНО: AC и BD-хорды
BP=15; CP=6; DP=10
НАЙТИ: AP

Шаг 1

$$AP * PC = DP * PB$$

Шаг 2

$$AP * 6 = 10 * 15$$
$$AP = 150 : 6 = 25.$$



ДАНО: дуга $AB=152^\circ$

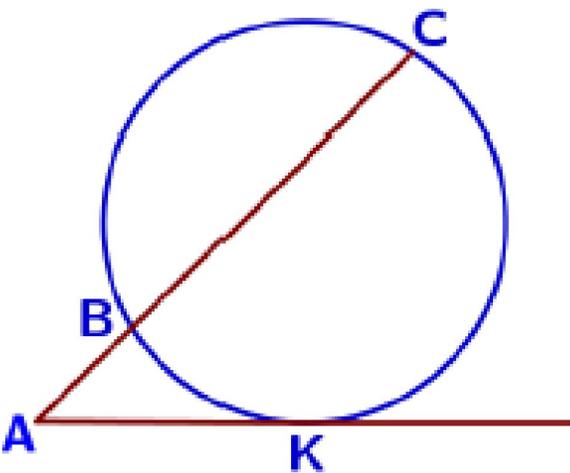
НАЙТИ: $\angle ABC$

Шаг 1

$$\angle ABC = \text{дуга } AB : 2$$

Шаг 2

$$\angle ABC = 152^\circ : 2 = 76^\circ.$$



ДАНО: $AB=2$; $AC=8$;

НАЙТИ: AK

Шаг 1

$$AK * AK = AB * AC$$

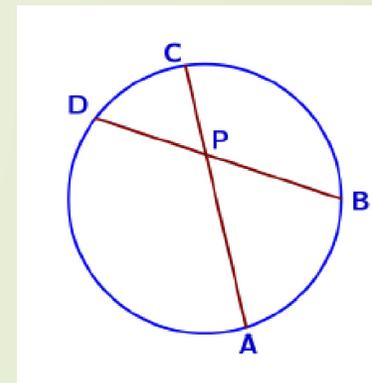
Шаг 2

$$AK * AK = 2 * 8 = 16;$$

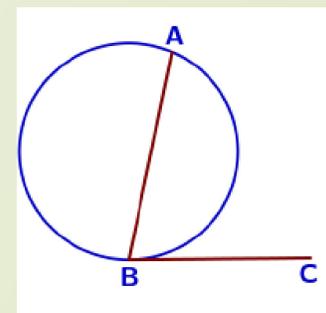
$$AK = \sqrt{16} = 4.$$

Задания для самостоятельного решения

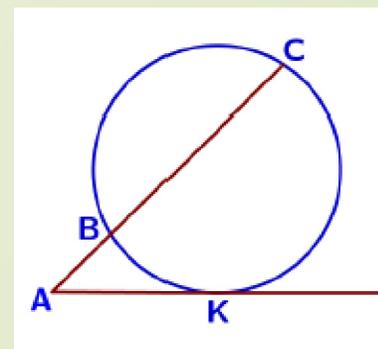
45. Хорды AC и BD окружности пересекаются в точке P, $BP=4$, $CP=12$, $DP=21$. Найдите AP.



48. На окружности отмечены точки A и B так, что меньшая дуга AB равна 66° . Прямая BC касается окружности в точке B так, что угол ABC острый. Найдите угол ABC. Ответ дайте в градусах.



53. Через точку A, лежащую вне окружности, проведены две прямые. Одна прямая касается окружности в точке K. Другая прямая пересекает окружность в точках B и C, причём $AB=7$, $BC=21$. Найдите AK.



Использованные материалы

1. Задачи Открытого банка ОГЭ сайта ФИПИ;
<http://oge.fipi.ru/os/xmodules/qprint/index.php?proj=DE0E276E497AB3784C3FC4CC20248DC0>