Моделирование технологических процессов

Математические модели микроуровня

Уравнения эллиптического типа

Закон сохранения массы жидкости в выделенном объеме V

$$\iiint\limits_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \cdot \vec{v})\right] dV = 0$$

С силу произвольного выбора объема V **подынтегральная функция** должна быть тождественна **равна нулю** и следует уравнение неразрывности сплошной среды:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \cdot \vec{v}) = 0$$

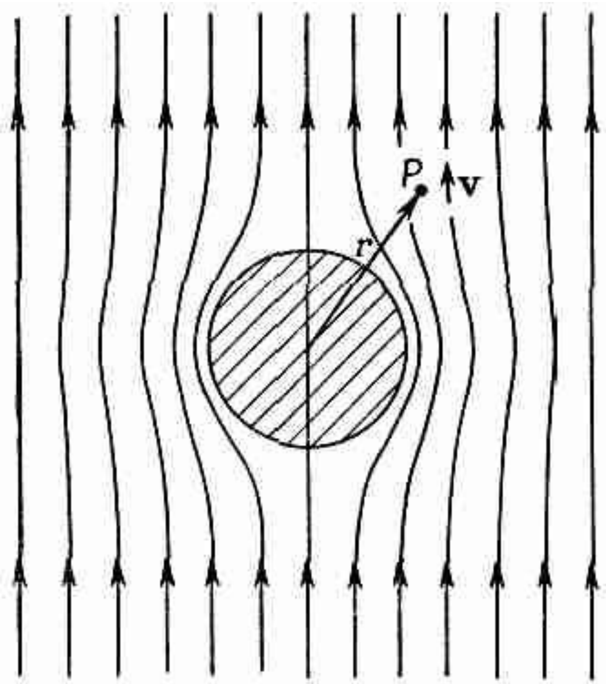
Уравнения эллиптического типа

Для **несжимаемой жидкости** плотность является постоянной $\rho = \text{const}$:

$$div(\vec{v}(x, y, z, t)) = 0$$

Рассмотрим **установившееся течение** жидкости, для которого ее **скорость не зависит от времени**:

$$\vec{v} = \vec{v}(x, y, z)$$



Уравнения эллиптического типа

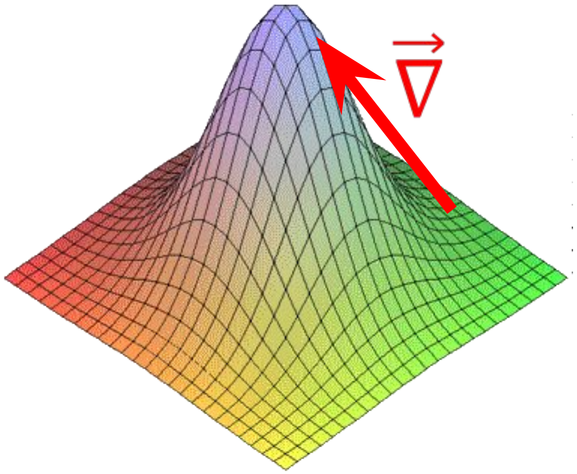
Для **безвихревое** течения жидкости, существует потенциал скоростей:

$$u = u\,(x, y, z)$$

Свойства потенциала скоростей: градиент потенциала скоростей определяет скорость жидкости:

$$\vec{v} = -\vec{\nabla}(u)$$

$$\vec{v} = -\left(\vec{i}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \vec{j}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \vec{k}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$



Уравнения эллиптического типа

Для потенциала скоростей, справедливо уравнение **Лапласа**:

$$div(\vec{v}(x, y, z, t)) = 0$$

или

$$div(-\vec{\nabla}(u)\ ) = 0 \Rightarrow \Delta u = 0$$

здесь $\Delta \equiv div(\vec{\nabla}\ )$ оператор Лапласа

Уравнение Лапласа возникает во многих физических задачах механики, теплопроводности, электростатики, гидравлики, квантовой физике, в частности в уравнении Шрёдингера.

Laplace, Pierre-Simon (1749–1827), французский математик, физик и астроном

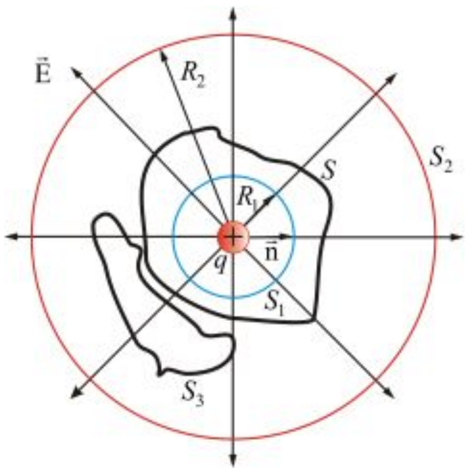
Уравнения эллиптического типа

Электрическое поле в среде с диэлектрической проницаемостью характеризуется напряженностью поля $\vec{E}(x, y, z)$ и по теореме **Гаусса** для электрического поля:

Johann Carl Friedrich Gauß; 1777-1855, Гёттинген): немецкий математик, механик, физик, астроном и геодезист.

$$\oiint \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot (\vec{E}, d\vec{S}) = \iiint \rho dV$$

где ε_0 – диэлектрическая постоянная; $\rho(x, y, z)$ – объемная плотность электрических зарядов; V – некоторый объем пространства, ограниченный замкнутой поверхностью S



Уравнения эллиптического типа

С помощью теоремы Остроградского-Гаусса преобразуем последнее выражение к дифференциальной форме:

$$\oiint (\vec{E}, d\vec{S}) = \iiint div(\vec{E}) dV$$

$$\oiint \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot (\vec{E}, d\vec{S}) = \iiint \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot div(\vec{E}) dV = \iiint \rho dV$$

или

$$\iiint \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot div(\vec{E}) dV - \iiint \rho dV = 0$$

Уравнения эллиптического типа

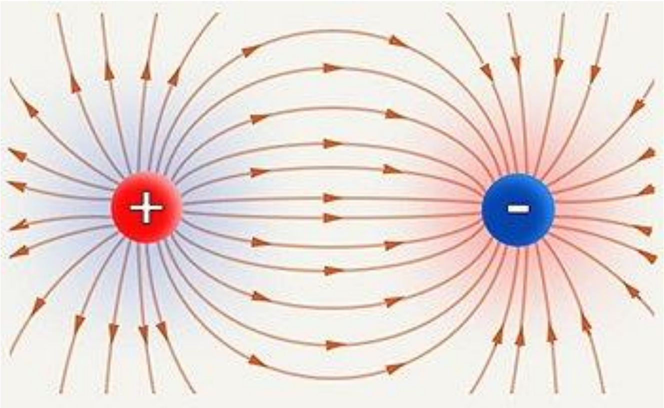
$$\iiint \left[\varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot div(\vec{E}) - \rho\right] dV = 0$$

В силу произвольного выбора объема V подынтегральная функция должна быть тождественна нулю!

$$div(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon \cdot \varepsilon_0}$$

Связь электрического поля и электростатического потенциала:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$$



$$div(-\vec{\nabla}\varphi) = \Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon \cdot \varepsilon_0}$$

здесь

$$\Delta \equiv div(\vec{\nabla})$$

оператор Лапласа

Уравнения эллиптического типа

Для электростатического потенциала справедливо уравнение **Пуассона**:

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon \cdot \varepsilon_0}$$

Siméon Denis Poisson (1781-1840, Франция), французский математик, механик и физик.

В декартовой системе координат:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho(x,y,z)}{\varepsilon \cdot \varepsilon_0}$$

Уравнение Пуассона описывает:

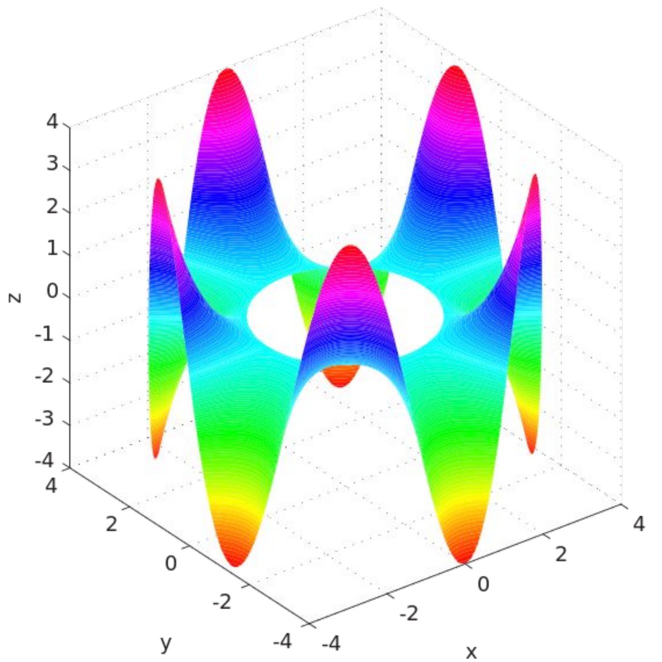
- электростатическое поле,
- стационарное поле температуры,
- поле давления,
- поле потенциала скорости в гидродинамике.

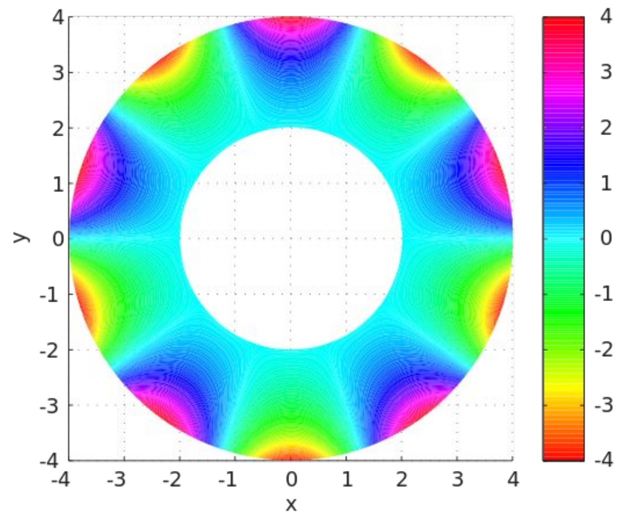
Краевые задачи для уравнений эллиптического типа

В каждой задачи, связанной с уравнениями Лапласа и Пуассона, **искомое решение должно**:

1) удовлетворять уравнению в области

2) **удовлетворять** некоторому **дополнительному условию на границе** этой области.





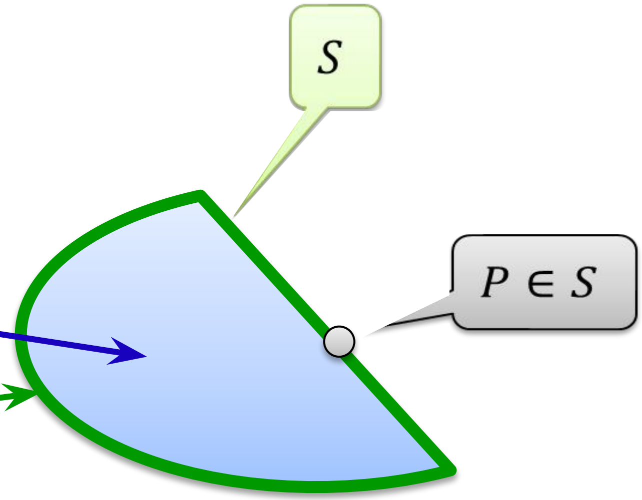
Краевые задачи для уравнений эллиптического типа

В зависимости от вида граничных условий различают следующие виды граничных задач:

1) Задача Дирихле

$\Delta u = f$

$u(S) = F(P)$



здесь S – поверхность ограничивающая область решений;
$P \in S$ – точка принадлежащая границе области S.

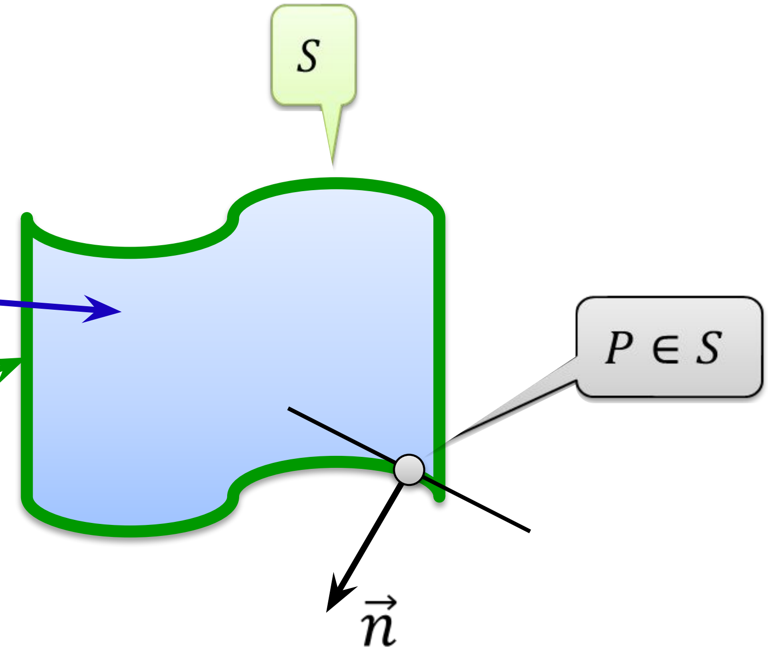
Краевые задачи для уравнений эллиптического типа

В зависимости от вида граничных условий различают следующие виды граничных задач:

2) Задача Неймана

$$\Delta u = f$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = G(P)$$



здесь S – поверхность ограничивающая область решений;
$P \in S$ – точка принадлежащая границе области S;
$\vec{n}$ - вектор нормали к поверхности области в точке P

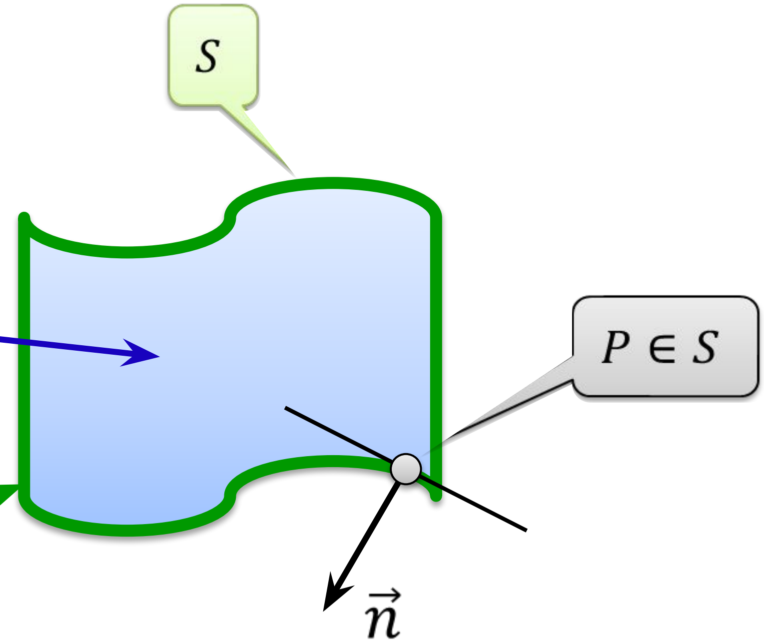
Краевые задачи для уравнений эллиптического типа

В зависимости от вида граничных условий различают следующие виды граничных задач:

3) Смешанная задача

$$\Delta u = f$$

$$\alpha \cdot \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S + \beta \cdot u(S) = \gamma(P)$$

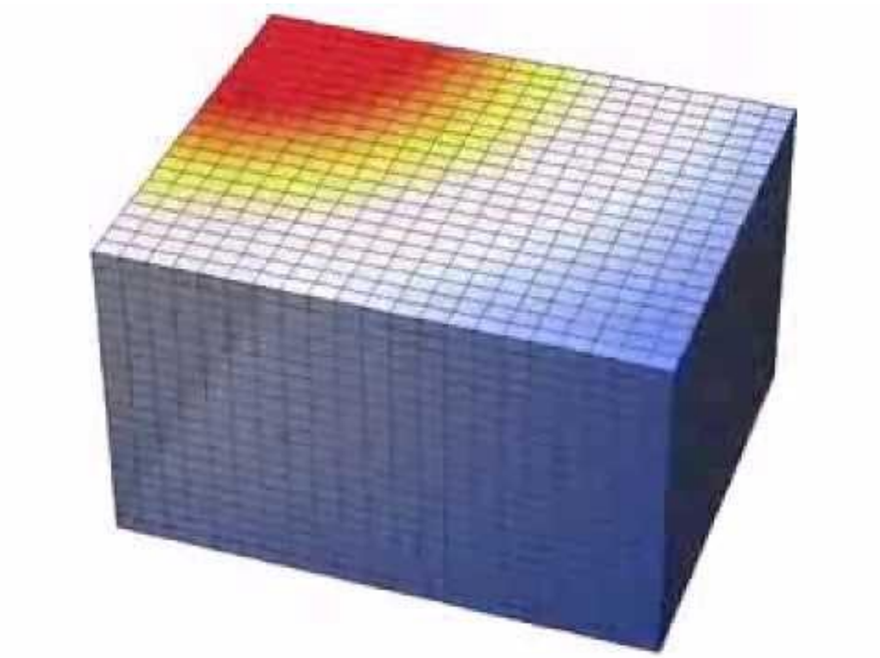


здесь S – поверхность ограничивающая область решений;
$P \in S$ – точка принадлежащая границе области S;
$\vec{n}$ - вектор нормали к поверхности области в точке P

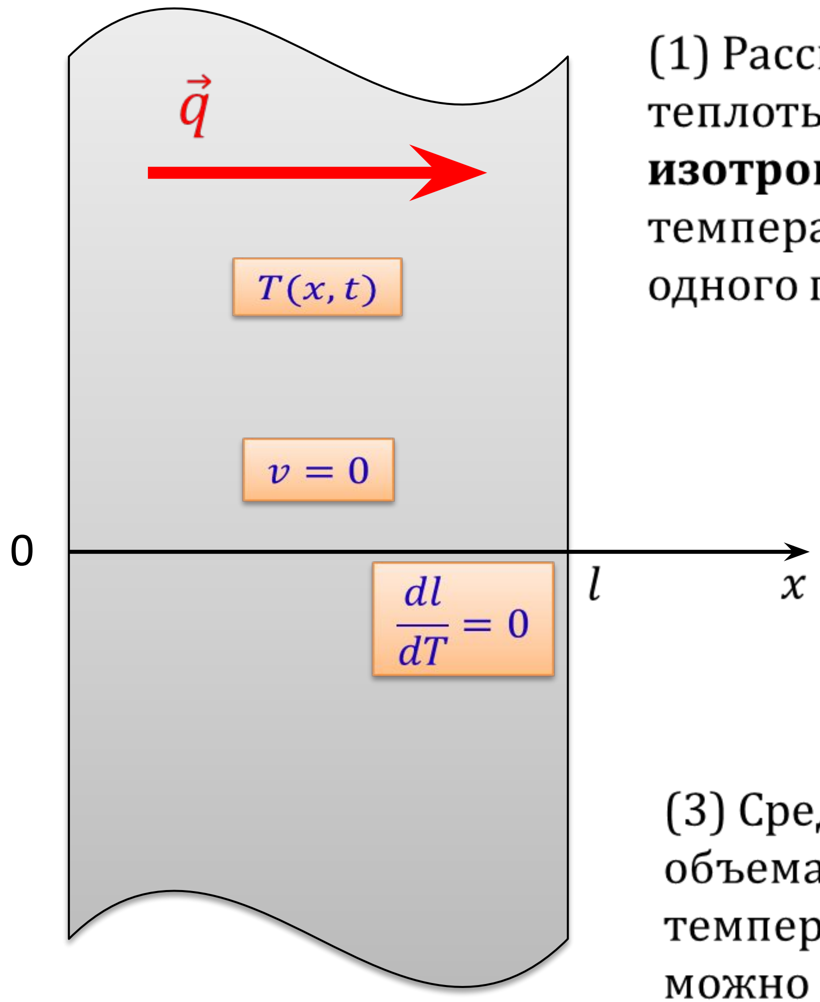
Уравнения параболического типа

Процесс передачи теплоты **от более нагретых** частей тела **к менее нагретым** связан с изменением температуры T в различных частях рассматриваемой области пространства.

Поэтому описание процесса теплопереноса в макроскопической теории в общем случае сводится к определению **нестационарного температурного поля** в рассматриваемой области пространства.



Уравнения параболического типа

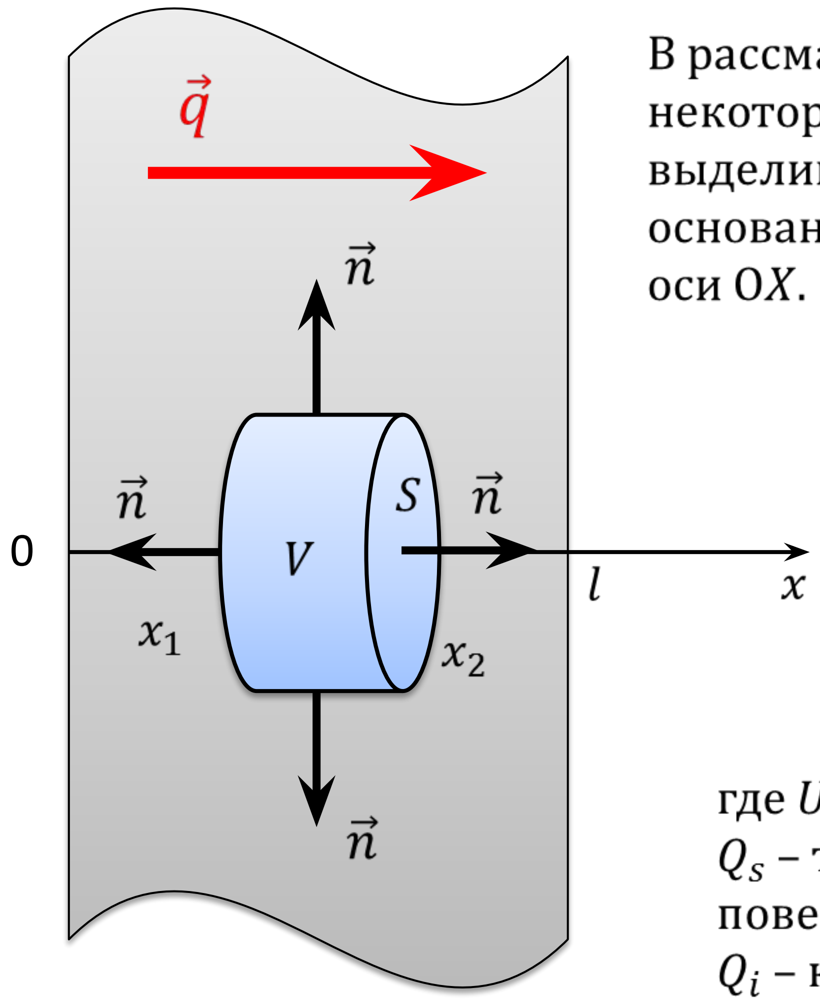


(1) Рассмотрим одномерный процесс передачи теплоты теплопроводностью в плоском слое **изотропного материала**, считая, что температура $T(x,t)$ является функцией лишь одного пространственного переменного x.

(2) Плотность ρ материала, его удельную массовую теплоемкость C_m и коэффициент теплопроводности k в общем случае неоднородной среды будем считать также зависящими только от одной пространственной координаты x.

(3) Среда неподвижна $(v = 0)$, а изменение объема материала, связанное с изменением температуры, пренебрежимо мало, поэтому можно считать, что процесс теплопроводности **не связан с совершением механической работы**.

Уравнения параболического типа



В рассматриваемом слое материала в качестве некоторой термодинамической системы выделим объем V в виде **цилиндра** с площадью основания S и осью, параллельной координатной оси OX.

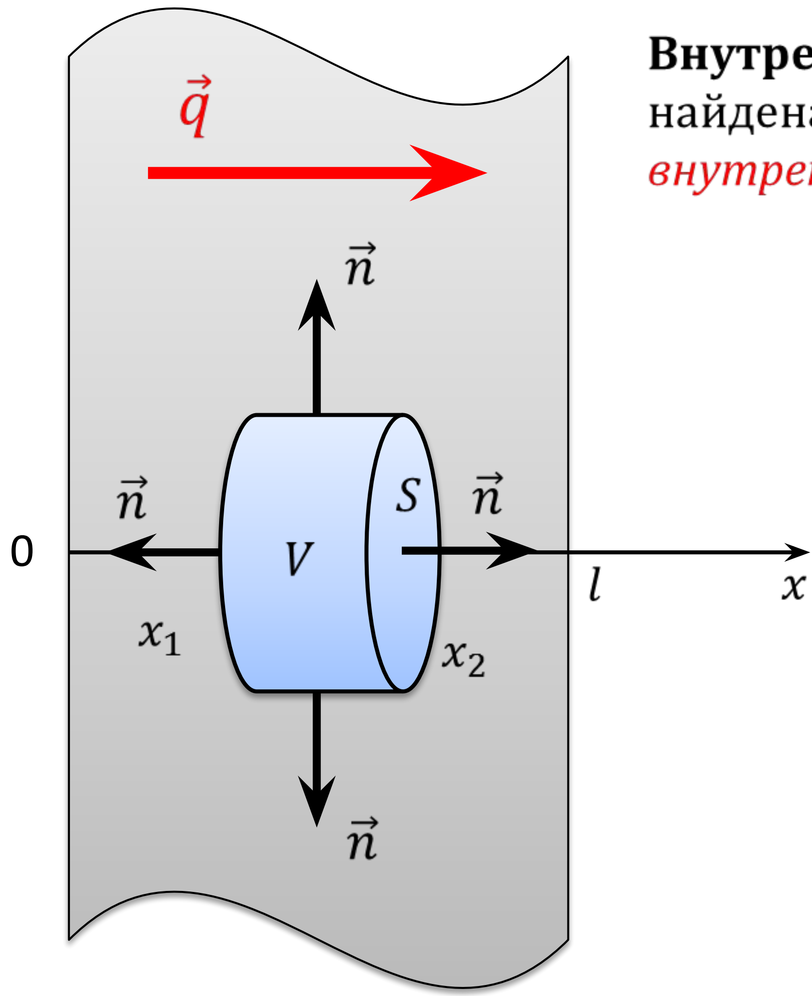
$$V = S \cdot (x_2 - x_1)$$

Из **первого закона термодинамики** для выделенного объема V следует:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = Q_s + Q_i$$

где U – внутренняя энергия системы;
Q_s – тепловой поток через всю замкнутую поверхность выделенного цилиндра;
Q_i – количество тепла выделяемого в объеме цилиндра вследствие внутреннего тепловыделения и поглощения.

Уравнения параболического типа



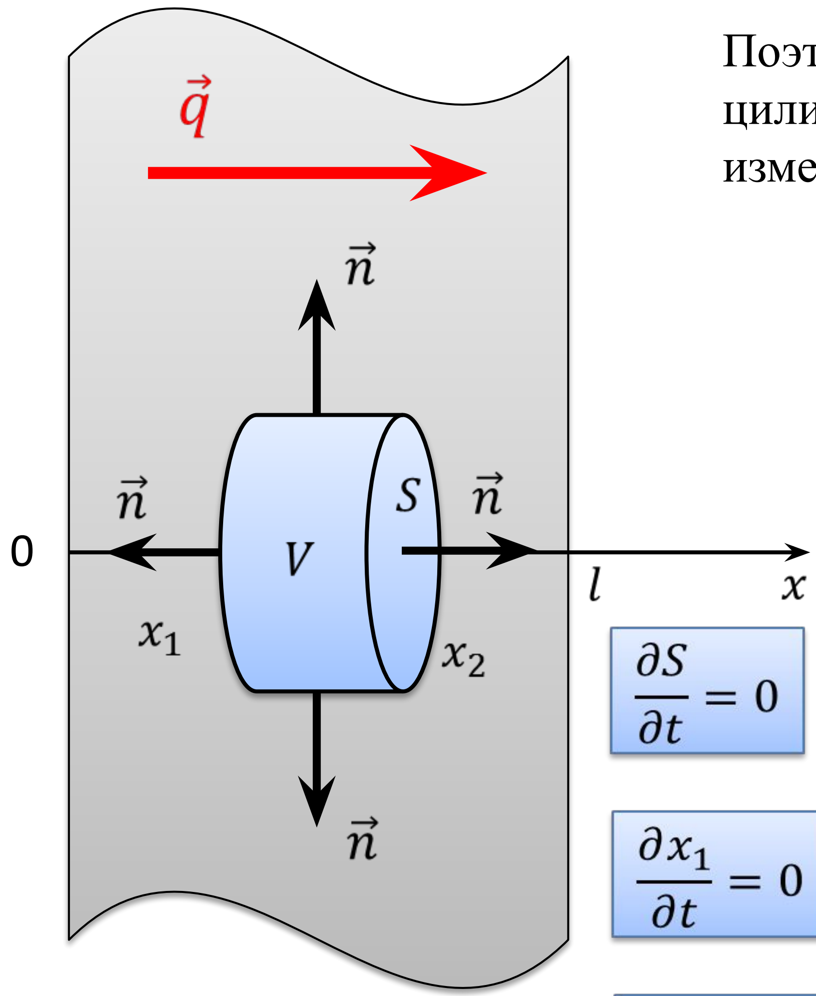
Внутренняя энергия цилиндра может быть найдена интегрированием *объемной плотности внутренней энергии* $\epsilon(x,t)$ по его объему:

$$U = \iiint \epsilon(x,t)dV$$

Изменение объемной плотности энергии может наблюдаться только вдоль оси цилиндра (ось OX)

$$U = S \cdot \int_{x_1}^{x_2} \epsilon(x,t)dx$$

Уравнения параболического типа



Поэтому изменение внутренней энергии цилиндра U за единицу времени (скорость изменения внутренней энергии):

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(S \cdot \int_{x_1}^{x_2} \epsilon(x,t)dx\right)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

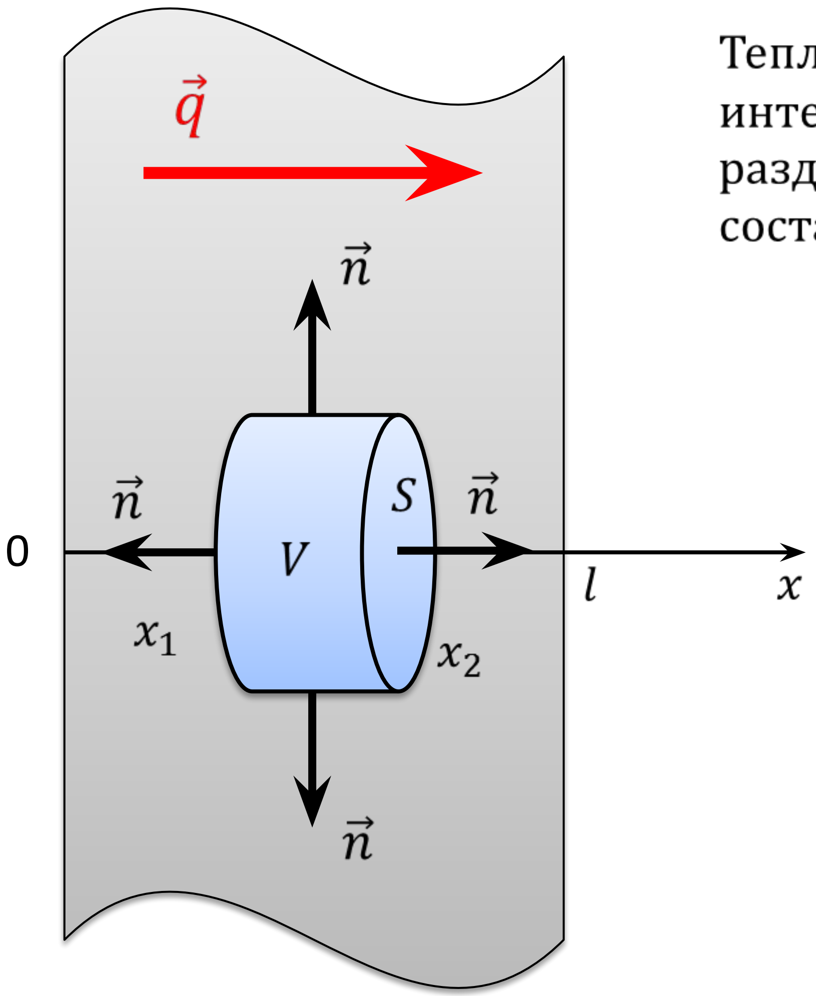
$$\frac{\partial x_1}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial t} = 0$$

Тепловое расширение среды отсутствует, поэтому геометрические размеры цилиндра не изменяются с течением времени: площадь основания цилиндра S и его высота $(x_2 - x_1)$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = S \cdot \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \epsilon(x,t)}{\partial t} dx$$

Уравнения параболического типа



Тепловой поток Q_S можно найти с помощью интегрирования по поверхности Σ (граница раздела выделенного объема) нормальную составляющую плотности теплового потока:

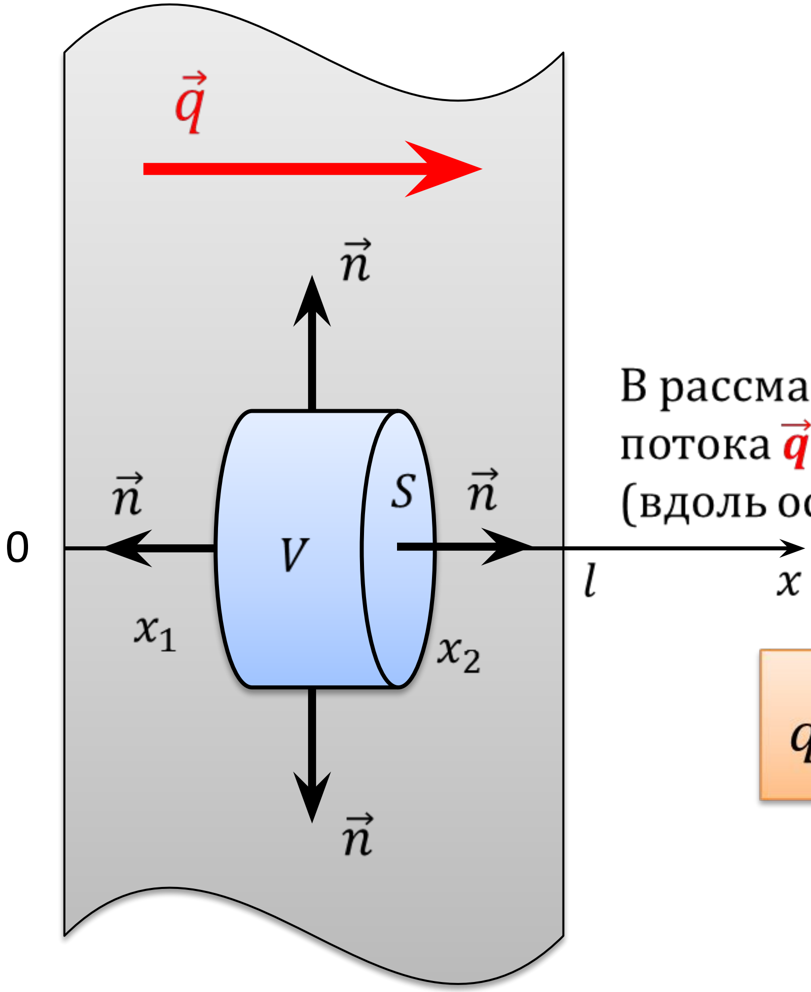
$$Q_S = -\oiint (\vec{q}, d\vec{S})$$

где $\vec{q}$ - плотность теплового потока.

Площадь граница раздела выделенного объема (площадь поверхности выделенного цилиндра)

$$\Sigma = 2S + \sqrt{\pi S} \cdot (x_2 - x_1)$$

Уравнения параболического типа



Согласно **закону Фурье**, при передаче теплоты теплопроводностью плотность потока тепла составляет:

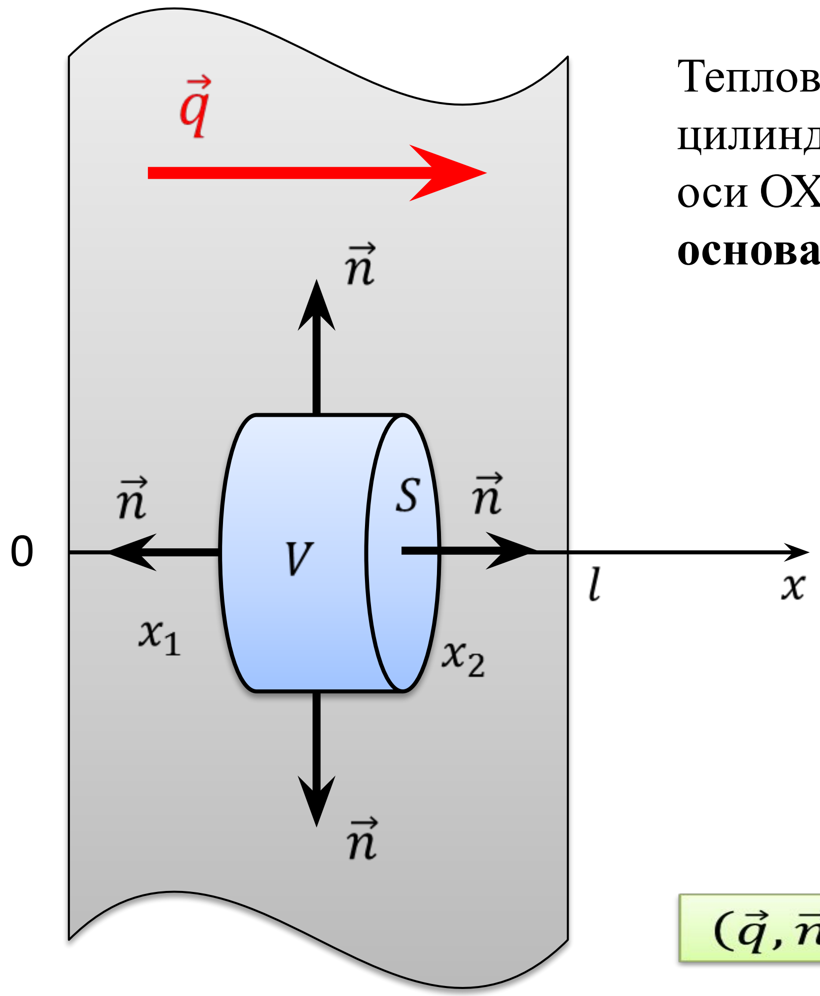
$$\vec{q} = -k \cdot \vec{\nabla} T$$

В рассматриваемом случае вектор теплового потока $\vec{\boldsymbol{q}}(q_x, 0{,}0)$ имеет лишь одну составляющую (вдоль оси OX)

$$q_x = -k \cdot \frac{\partial T}{\partial x}$$

Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830, Франция), французский математик и физик.

Уравнения параболического типа



Тепловой поток через выделенный объем цилиндра отличен от нуля только в направлении оси OX(т.е. поток проходит лишь **через основания цилиндра**):

$$Q_s = -S \cdot (q_x(x_2) - q_x(x_1))$$

Вектора нормали $\vec{n}$ к боковой поверхности цилиндра перпендикулярны направлению потока!

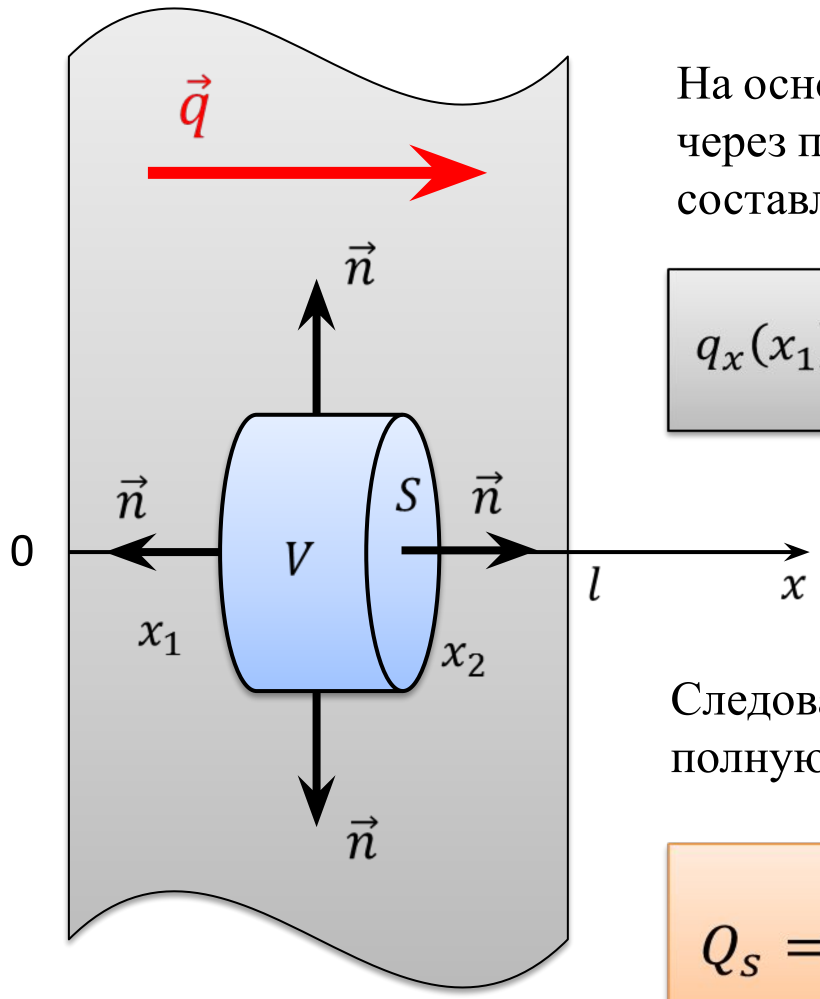
$$(\vec{q}, d\vec{S}) = (\vec{q}, \vec{n}) \cdot dS$$

$$(\vec{q}, \vec{n}) = 0, \qquad \text{если } \vec{q} \perp \vec{n}$$

$$(\vec{q}, \vec{n}) = 1, \qquad \text{если } \vec{q} \uparrow\uparrow \vec{n}$$

$$(\vec{q}, \vec{n}) = -1, \qquad \text{если } \vec{q} \uparrow\downarrow \vec{n}$$

Уравнения параболического типа



На основании **закона Фурье**, тепловые потоки через поверхность оснований цилиндра составляют:

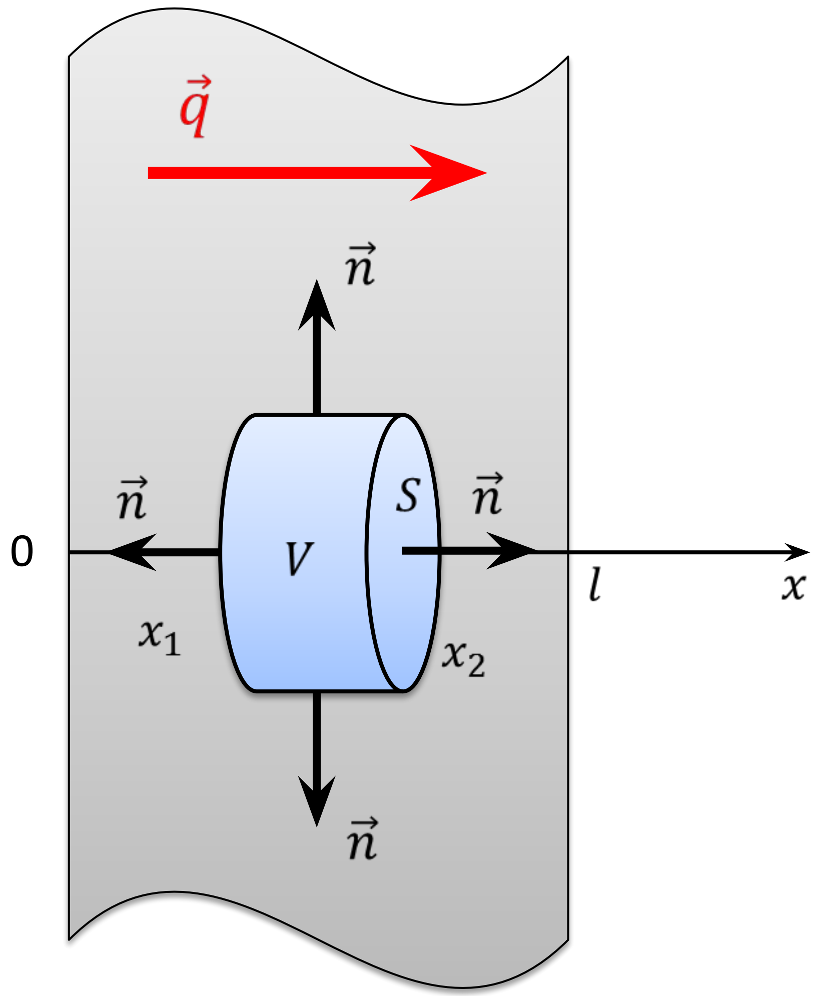
$$q_x(x_1) = -k \cdot \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x_1}$$

$$q_x(x_2) = -k \cdot \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x_2}$$

Следовательно, суммарный поток тепла через полную поверхность цилиндра составляет:

$$Q_s = -S \cdot \left(-k \cdot \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x_2} + k \cdot \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x_1} \right)$$

Уравнения параболического типа

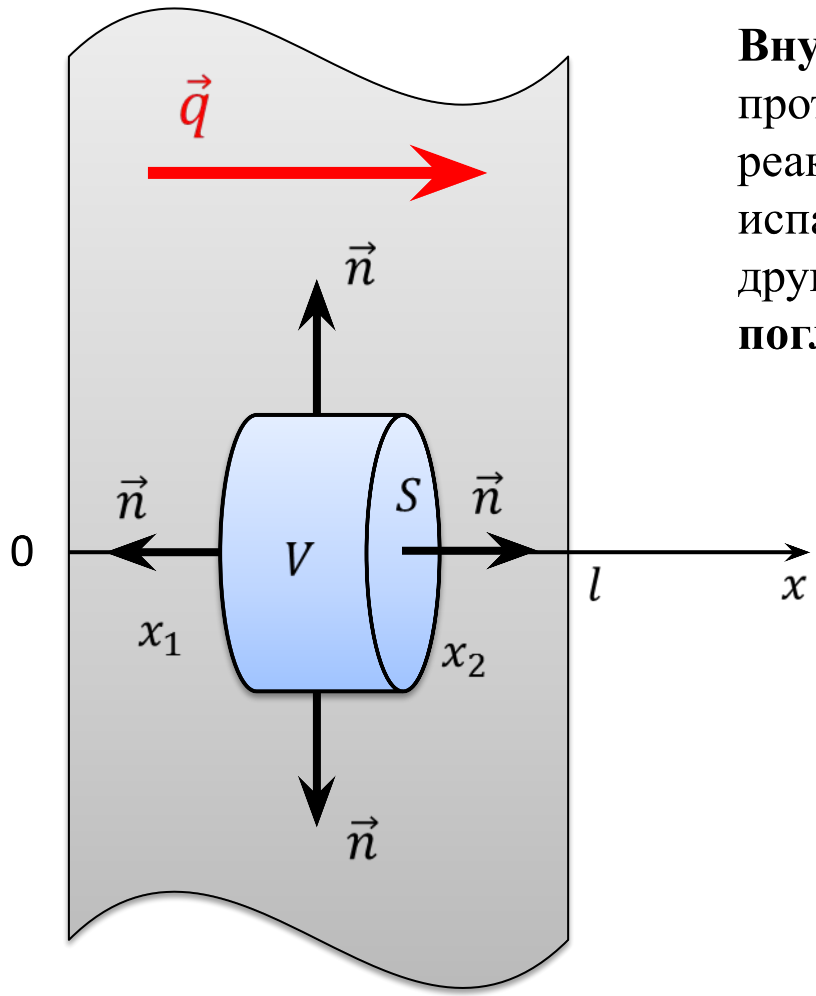


Рассмотрим тепловой поток в качестве **первообразной функции**

$$Q_s = S \cdot \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x}\left(k \cdot \frac{\partial T}{\partial x}\right) dx$$

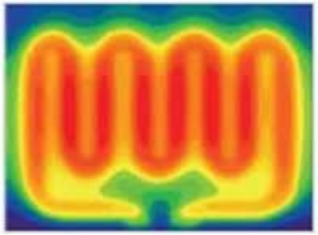
Первообра́зной или примити́вной функцией данной функции f(x) называют такую F(x), производная которой (на всей области определения) равна f, то есть F'(x) = f(x). Вычисление первообразной заключается в нахождении неопределённого интеграла, а сам процесс называется интегрированием

Уравнения параболического типа



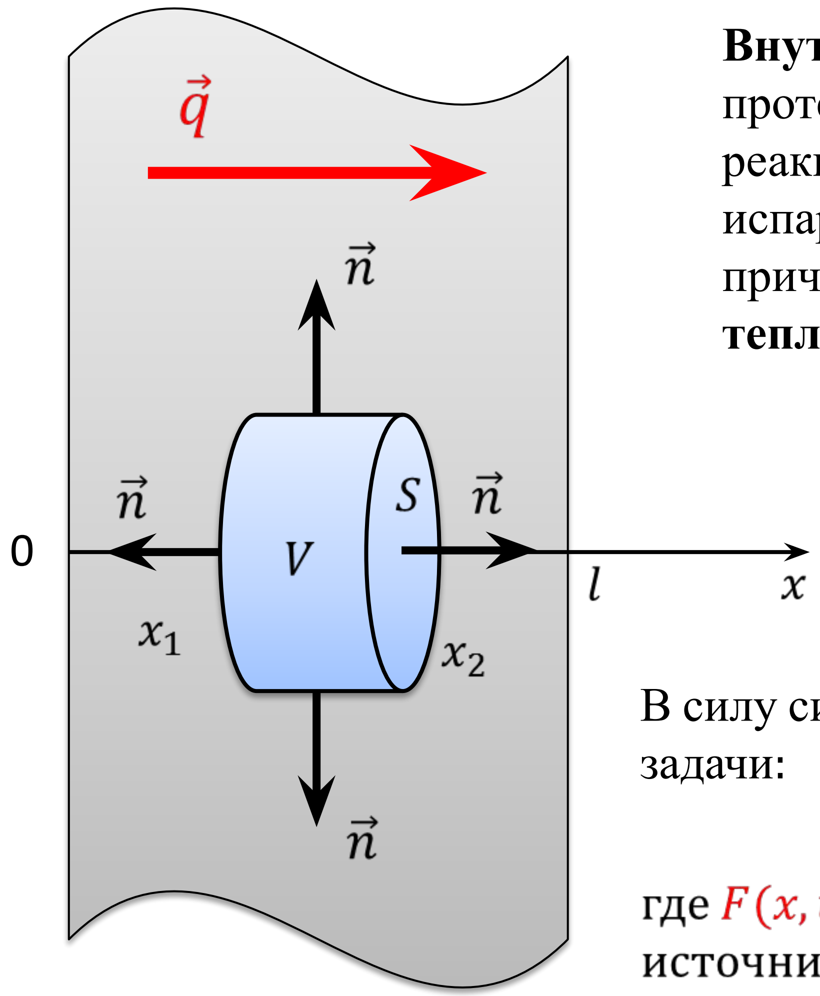
Внутри выделенного объема вследствие протекания эндо- или экзотермических реакций, прохождения электрического тока, испарения влаги в пористом материале и других причин **может выделяться или поглощаться теплота**

$$Q_i = \iiint F dV$$



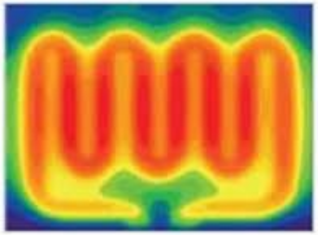
где $F(x, y, z, t)$ - объемная плотность (удельную мощность) тепловых источников, т.е. количества тепла которое выделяется ($F > 0$) или поглощается ($F < 0$) за единицу времени в единице объема.

Уравнения параболического типа



Внутри выделенного объема вследствие протекания эндо- или экзотермических реакций, прохождения электрического тока, испарения влаги в пористом материале и других причин **может выделяться или поглощаться теплота**

$$Q_i = \iiint F dV$$



В силу симметрии задачи:

$$Q_i = S \cdot \int_{x_1}^{x_2} F(x,t) dx$$

где $F(x,t)$ - удельную мощность тепловых источников, т.е. количества тепла которое выделяется ($F > 0$) или поглощается ($F < 0$) за единицу времени в единице объема.

Уравнения параболического типа

Таким образом, из первого закона термодинамики (**закон сохранения и превращения энергии**) следует:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = Q_s + Q_i$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = S \cdot \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \epsilon(x,t)}{\partial t} dx$$

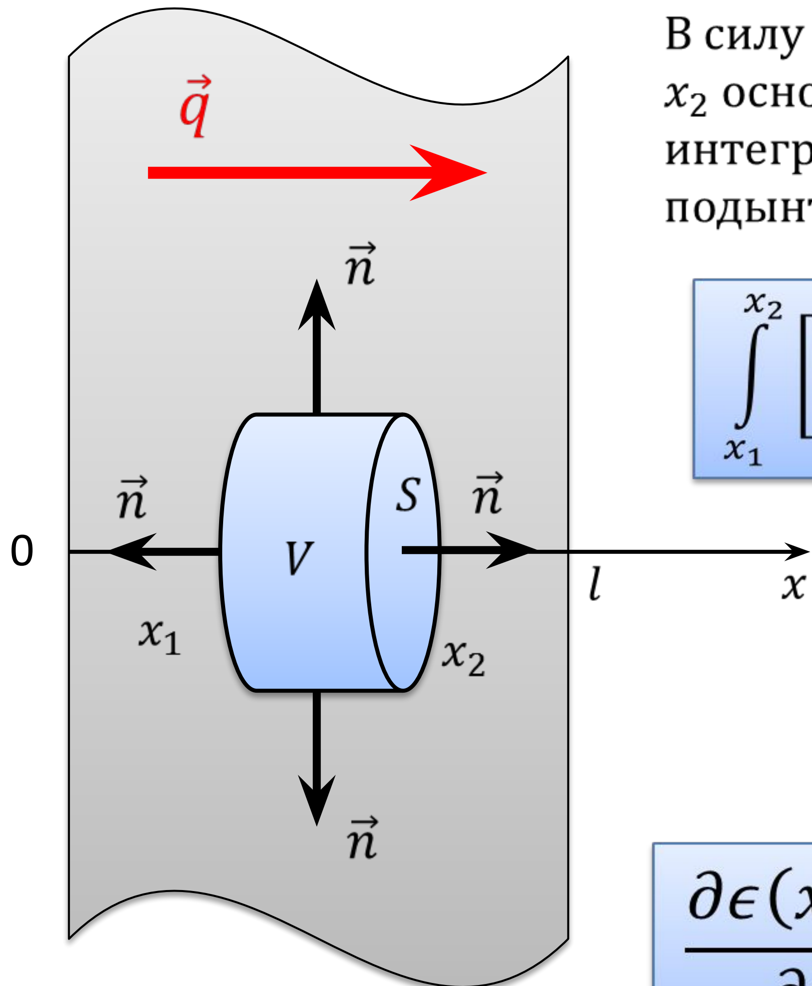
$$Q_s = S \cdot \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x}\left(k \cdot \frac{\partial T}{\partial x}\right) dx$$

$$Q_i = S \cdot \int_{x_1}^{x_2} F(x,t) dx$$

Подстановка полученных выше соотношений дает:

$$S \cdot \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \epsilon(x,t)}{\partial t} dx = S \cdot \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x}\left(k \cdot \frac{\partial T}{\partial x}\right) dx + S \cdot \int_{x_1}^{x_2} F(x,t) dx$$

Уравнения параболического типа



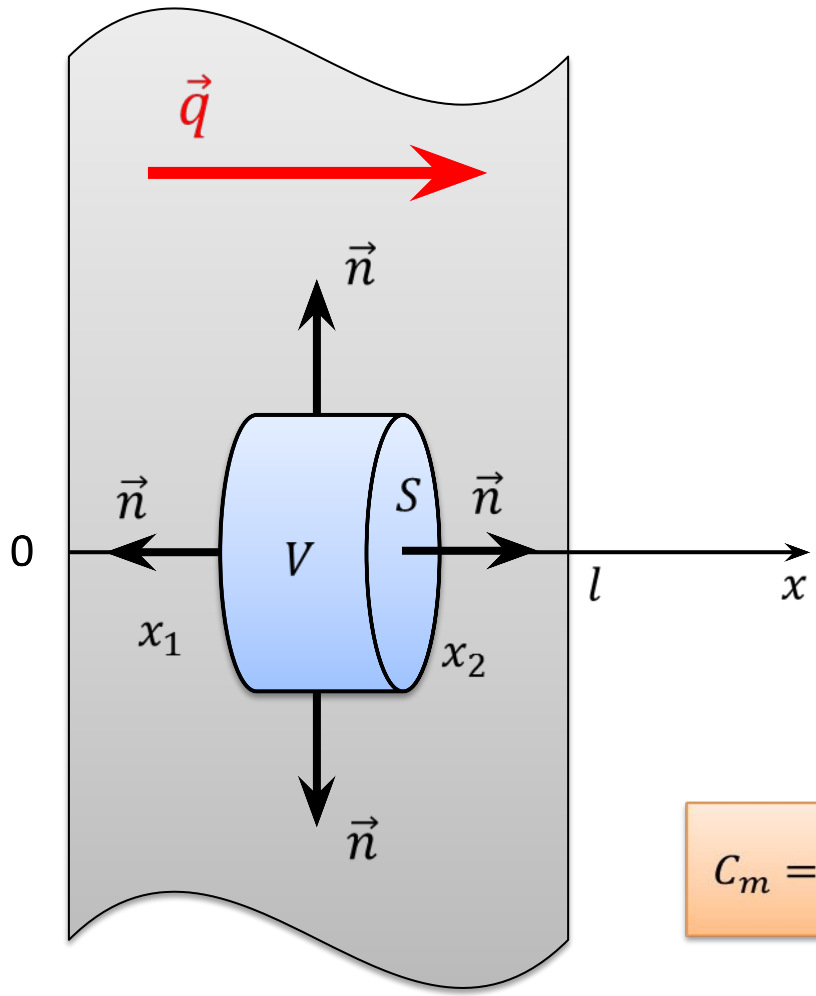
В силу произвольности выбора координат x_1 и x_2 оснований цилиндра равенство нулю интеграла возможно лишь при равенстве нулю подынтегральной функции:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial \epsilon(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(k \cdot \frac{\partial T}{\partial x}\right) - F(x,t) \right] dx = 0$$

Таким образом, в описываемом процессе передачи теплоты должно выполняться дифференциальное соотношение:

$$\frac{\partial \epsilon(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \cdot \frac{\partial T}{\partial x}\right) + F(x,t)$$

Уравнения параболического типа



Удельная массовая теплоемкость материала:

$$C_m = \frac{\partial Q}{\partial T}$$

где Q – количество теплоты необходимое для изменения температуры тела на 1 градус

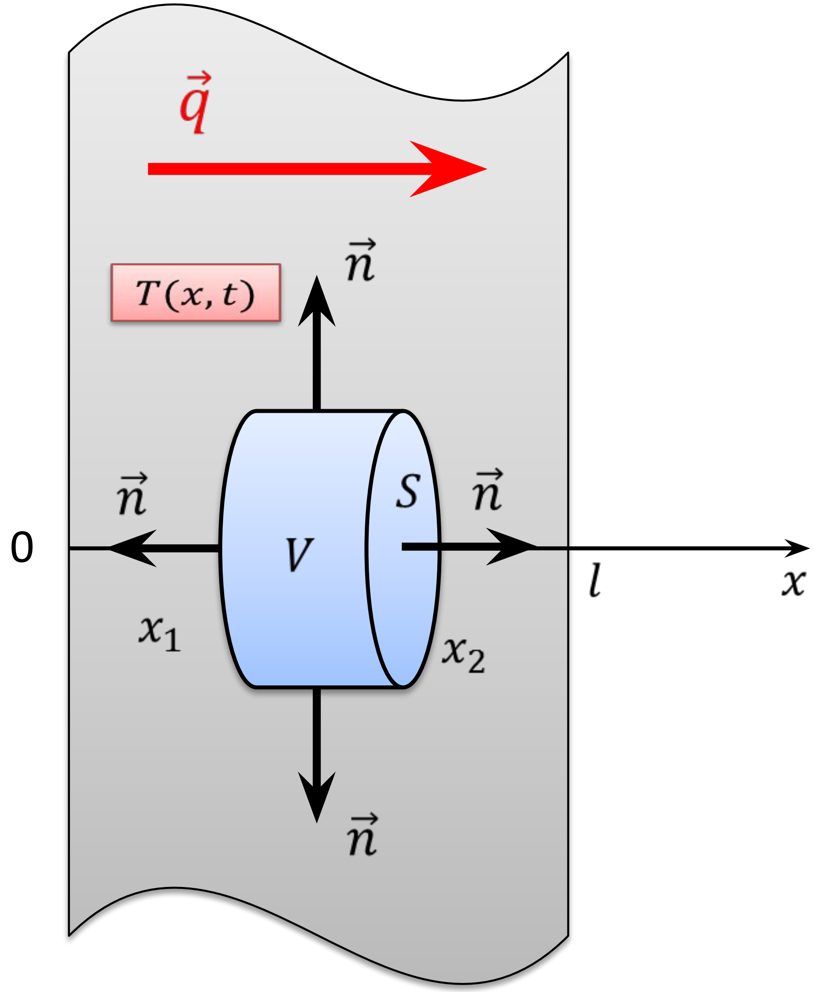
$$Q = \frac{\epsilon}{\rho}$$

Количество теплоты переданное системе с объемной плотностью внутренней энергии рассматриваемой среды

$$C_m = \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\epsilon}{\rho}\right) = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \epsilon}{\partial T}$$

в общем случае неоднородной среды может зависеть от пространственной координаты

Уравнения параболического типа



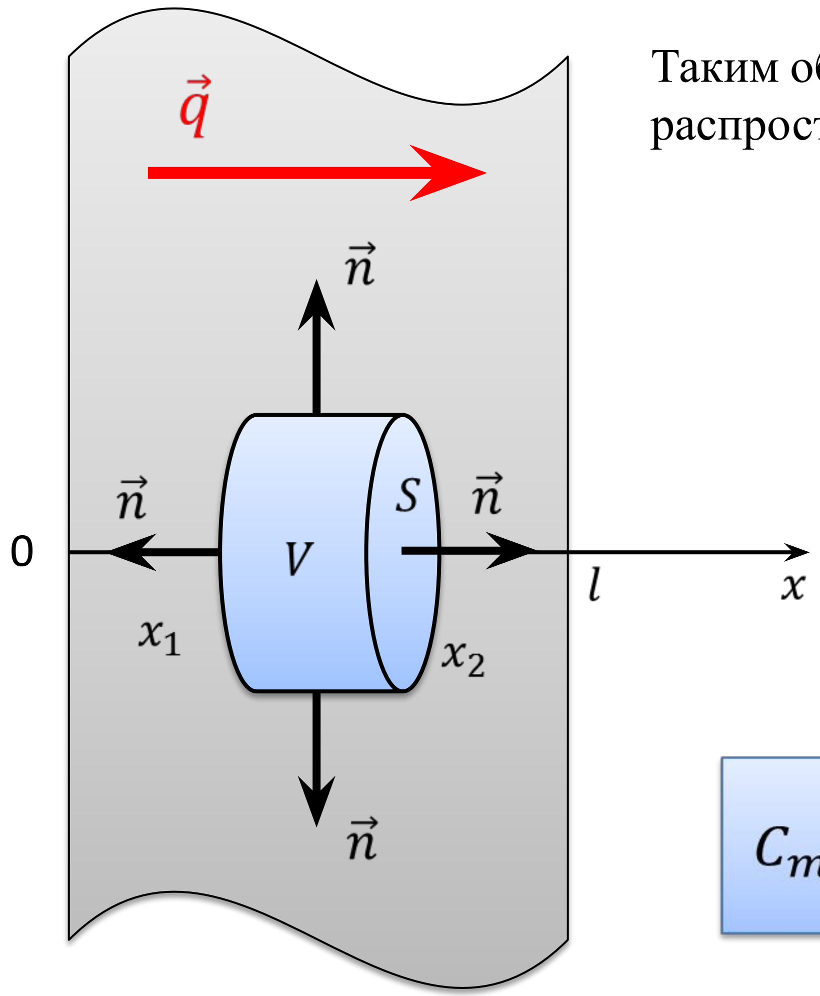
Установим связь между изменением удельной внутренней энергии и изменением температуры:

$$\partial\epsilon = C_m \cdot \rho \cdot \partial T$$

Изменение удельной внутренней энергии рассматриваемого объекта (цилиндра) за единицу времени связано с изменением температуры $T(x,t)$ объекта:

$$\frac{\partial\epsilon}{\partial t} = C_m \cdot \rho \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$$

Уравнения параболического типа



Таким образом, одномерный процесс распространения теплоты описывается уравнением:

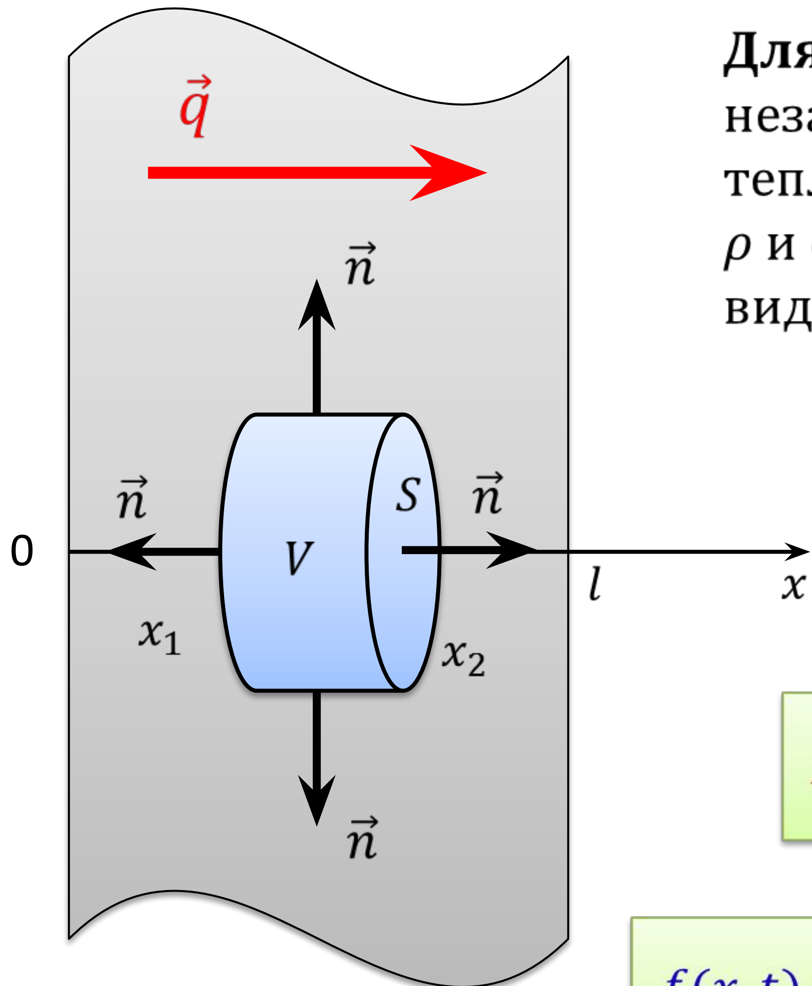
$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \cdot \frac{\partial T}{\partial x}\right) + F(x,t)$$

$+$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} = C_m \cdot \rho \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$C_m \cdot \rho \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \cdot \frac{\partial T}{\partial x}\right) + F(x,t)$$

Уравнения параболического типа



Для однородного материала с независящими от температуры теплофизическими характеристиками ρ и C_m уравнение можно записать в виде:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + f(x,t)$$

$$D = \frac{k}{C_m \cdot \rho} \quad \left[\frac{\text{м}^2}{\text{с}}\right]$$

приведенный коэффициент теплопроводности

$$f(x,t) = \frac{F(x,t)}{C_m \cdot \rho} \quad \left[\frac{\text{град}}{\text{с}}\right]$$

скорость изменения температуры в системе

Уравнения параболического типа

Полученное **уравнение** является дифференциальными уравнением **в частных производных** параболического типа

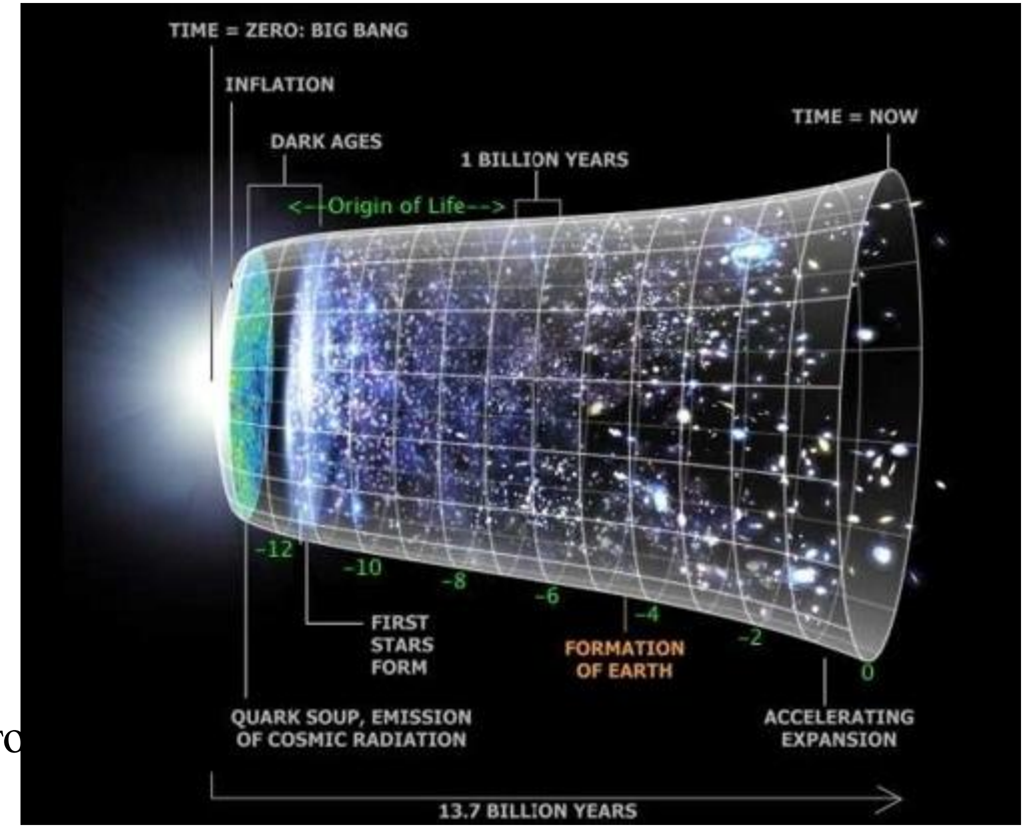
$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$$

Эти уравнения лежат в основе математических моделей, описывающих:

- процесс передачи теплоты в неоднородных и однородных телах;
- диффузионный процесс переноса массы и диффузия частиц (например, нейтронов) в веществе;
- процессы конвекции;
- процессы движения жидкостей и газов.

Уравнения параболического типа.
Начальные и граничные условия

Чтобы с помощью уравнения параболического типа можно было **описать эволюцию**, **необходимо знать распределение температуры в начальный момент времени**, т.е. задать **начальное условие**.

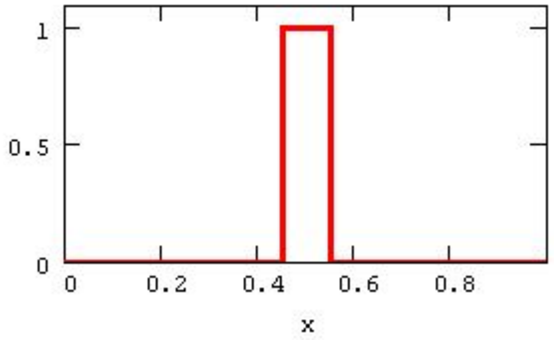


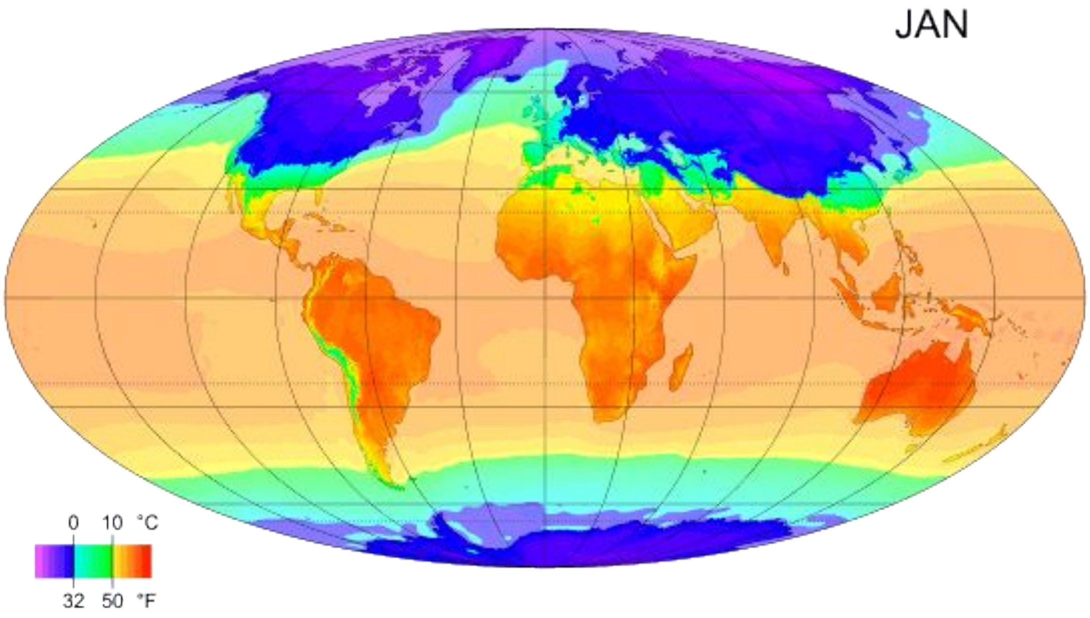
Для рассматриваемого одномерного процесса начальное условие задается в виде известной зависимости температуры в начальный момент времени $t = 0$:

Уравнения параболического типа. Начальное условие

Для рассматриваемого одномерного процесса переноса тепла **начальное условие** задается в виде известной зависимости температуры в начальный момент времени t = 0:

$$T(x,0) = \varphi(x)$$

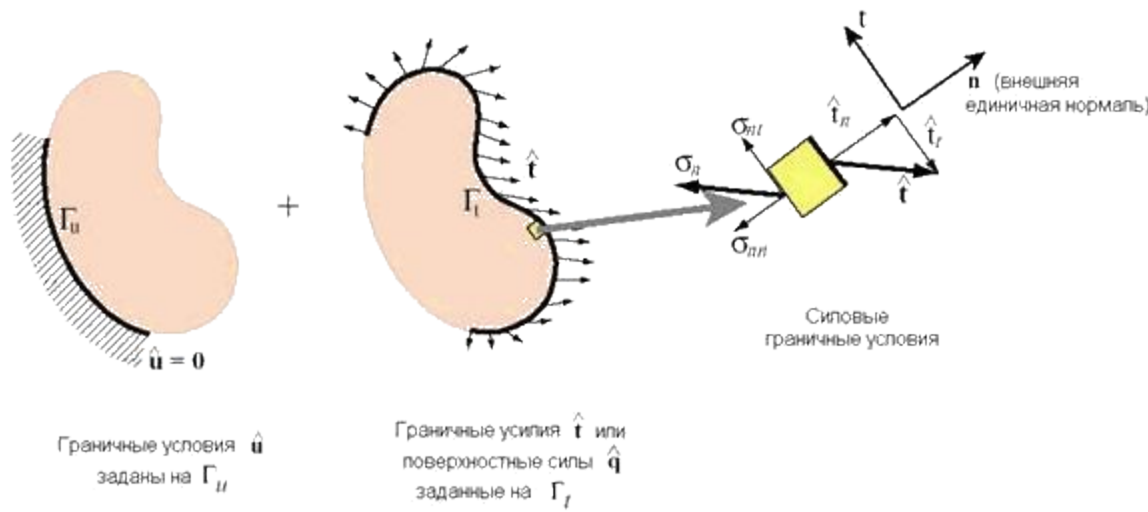




Уравнения параболического типа.
Граничные условия

Кроме того, требуется знать тепловой режим на поверхности тела, т.е. задать **граничные условия** во всех точках поверхности тела в любой момент времени.
В одномерном процессе соответствующие граничные условия задаются на граничных поверхностях слоя $x = 0$ и $x = l$

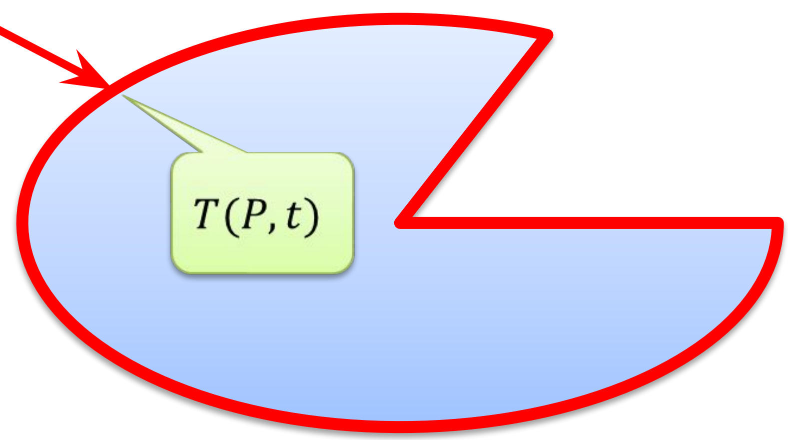
Граничные условия в задачах теплопроводности могут быть заданы различными способами.



Уравнения параболического типа.
Граничные условия

1) Граничное условие **первого рода**, когда в каждой точке поверхности тела задают температуру

$$T(P,t) = \Psi(P,t)$$



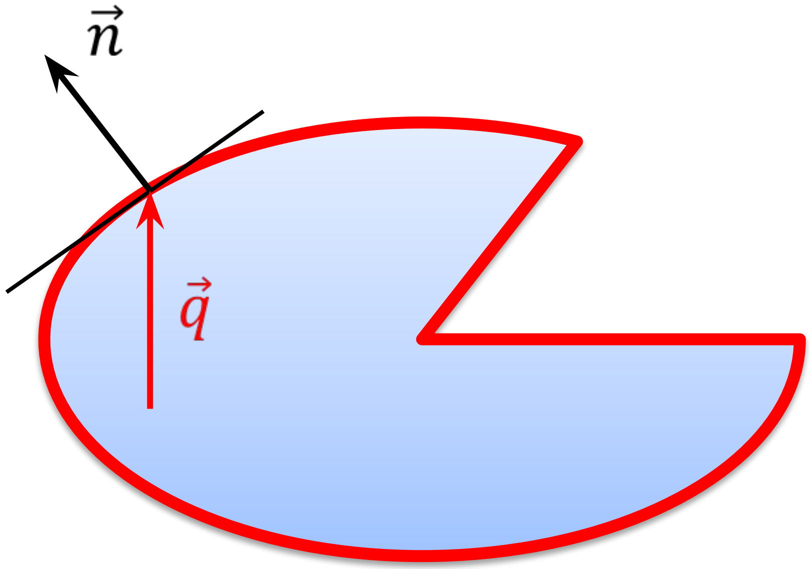
Здесь
S – поверхность ограничивающая область решений;
P – точка принадлежащая границе области S

Уравнения параболического типа. Граничные условия

2) Граничное условие **второго рода**, когда на поверхности тела задается тепловой поток:

$$(\vec{q}, \vec{n}) = \Theta(P, t)$$

Здесь
$\vec{q}$ – вектор плотности теплового потока;
$\vec{n}$ - вектор нормали к поверхности области в точке P;
P – точка принадлежащая границе области S.
S – поверхность ограничивающая область решений.

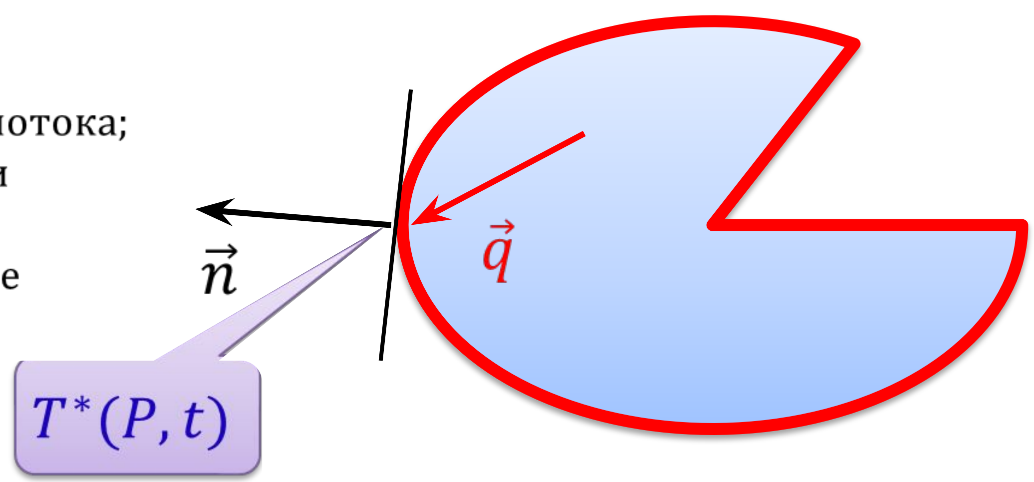


Уравнения параболического типа.
Граничные условия

3) Граничное условие **третьего рода** описывает тепловой режим на поверхности тела, соответствующий **конвективному теплообмену** по закону Ньютона с окружающей внешней средой, имеющей температуру $T^*(\text{P}, t)$:

$$(\vec{q}, \vec{n}) = \alpha \cdot (T(P,t) - T^*(P,t))$$

α – коэффициент теплообмена (теплоотдачи)
$\vec{q}$ – вектор плотности теплового потока;
$\vec{n}$ - вектор нормали к поверхности области в точке P;
P – точка принадлежащая границе области тела.

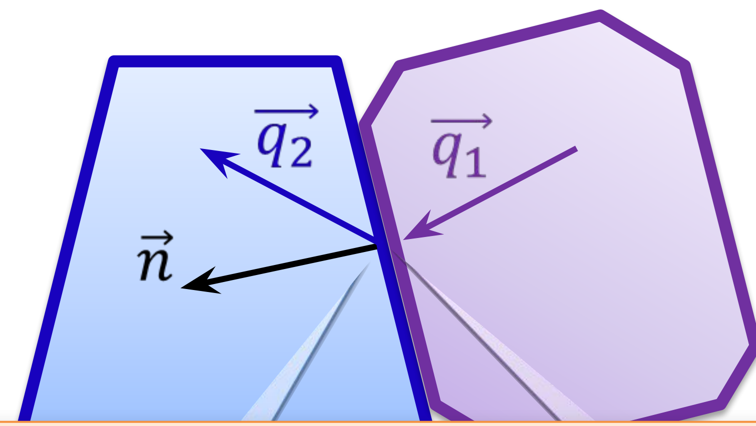


Уравнения параболического типа.
Граничные условия

4) При описании температурных полей в многослойных структурах и оболочках на поверхности контакта двух тел используют **граничные условия сопряжения** (идеальный тепловой контакт):

$$\begin{cases} T_1(P,t) = T_2\,(P,t) \\ (\vec{q}_1,\vec{n}) + (\vec{q}_2,\vec{n}) = 0 \end{cases}$$

$\overrightarrow{q_1}$ – вектор плотности теплового потока в 1-ой среде;
$\overrightarrow{q_2}$ – вектор плотности теплового потока во 2-ой среде;
$\vec{n}$ - вектор нормали к поверхн
области в точке P;
P – точка принадлежащая гра
раздела двух тел.



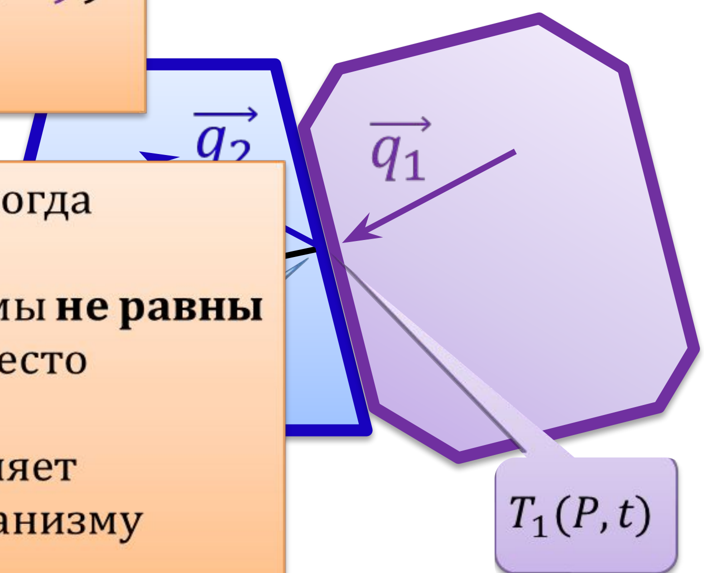
Для идеального теплового контакта эти условия означают равенство температур и тепловых потоков на контактной поверхности

Уравнения параболического типа.
Граничные условия

5) Граничные условия для **неидеального теплового контакта**, т.е. когда теплообмен между частями тела затруднен и происходит по закону конвекционного теплообмена (закон Ньютона):

$$\begin{cases} (\vec{q}_1, \vec{n}) = \alpha \cdot (T_1(P,t) - T_2(P,t)) \\ (\vec{q}_1, \vec{n}) + (\vec{q}_2, \vec{n}) = 0 \end{cases}$$

Для неидеального теплового контакта, т.е. когда теплообмен между частями тела затруднен **температуры** на поверхности частей системы **не равны** между собой $T_1(P,t) \neq T_2(P,t)$, хотя имеет место **равенство тепловых потоков** $|\overrightarrow{q_1}| = |\overrightarrow{q_2}|$. Возникающая разность температур определяет теплообмен между частями системы по механизму закона Ньютона.

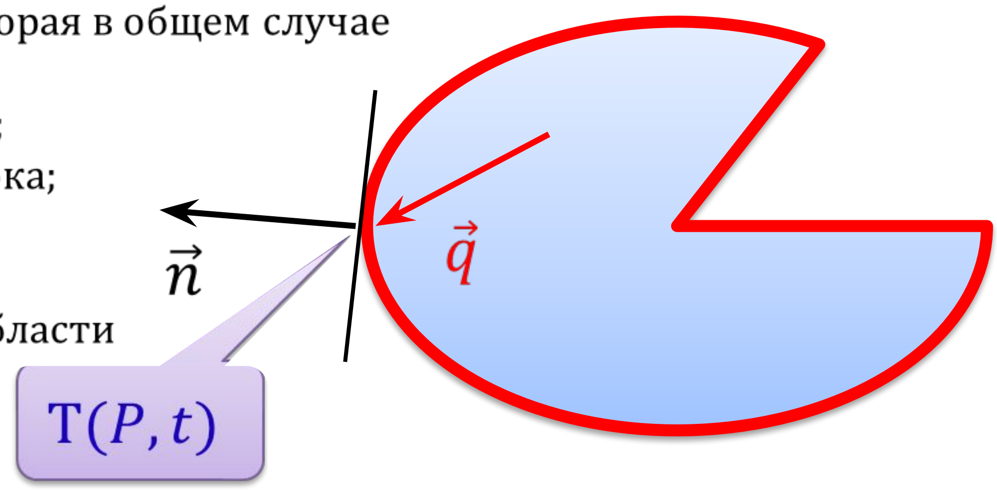


Уравнения параболического типа.
Граничные условия

6) **Нелинейное граничное условие** формулируется в случае если основным **механизмом теплообмена** поверхности тела с окружающей средой **является излучение**, то по закону Стефана - Больцмана:

$$(\vec{q},\vec{n}) = \chi_0 \cdot \sigma \cdot T^4(P,t)$$

χ_0 – степень черноты материала, которая в общем случае зависит от температуры;
σ – постоянная Стефана – Больцмана;
$\vec{q}$ – вектор плотности теплового потока;
$\vec{n}$ - вектор нормали к поверхности области в точке P;
P – точка принадлежащая границе области раздела двух тел.

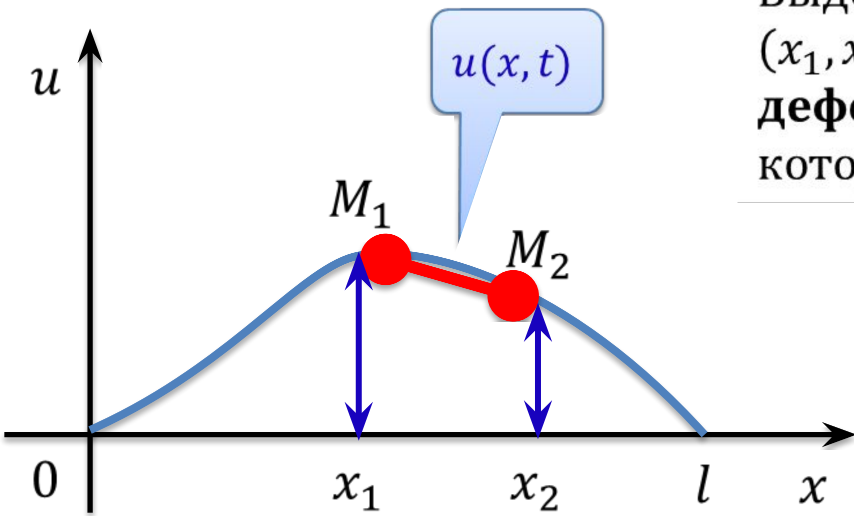


Уравнения гиперболического типа

Рассмотрим **процесс колебаний** тонкой упругой нити (струны), которая может свободно изгибаться.

Выделим произвольный участок струны (x_1, x_2), который при колебаниях струны **деформируется** в участок (M_1, M_2), длина дуги которого в момент времени t составляет:

$$S_{(M_1,M_2)} = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\, dx$$



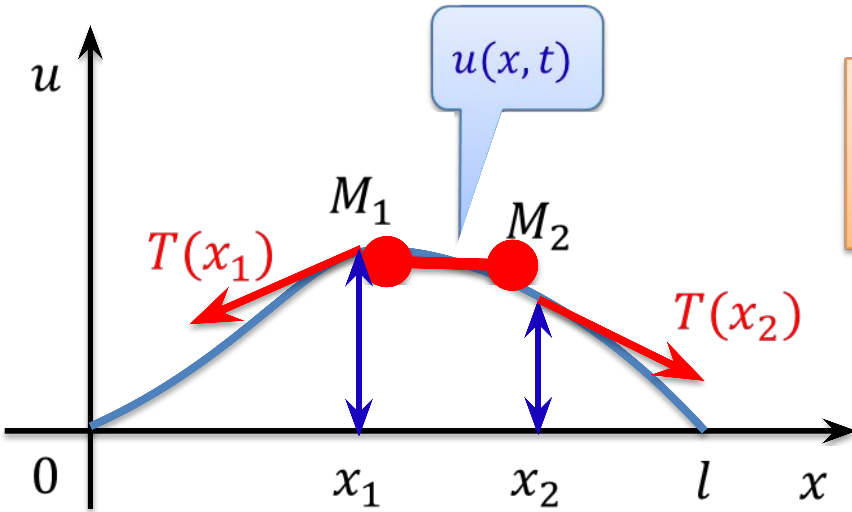
$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \ll 1$$

Рассмотрим только **малые поперечные колебания** струны, считая, что **перемещение** частиц струны происходит **в одной плоскости** и все точки струны движутся перпендикулярно оси OX.

Уравнения гиперболического типа

Из предположения о малости колебаний следует, что длина выделенного участка струны $S_{(M_1,M_2)}$ в любой момент времени:

$$\boxed{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \ll 1}$$



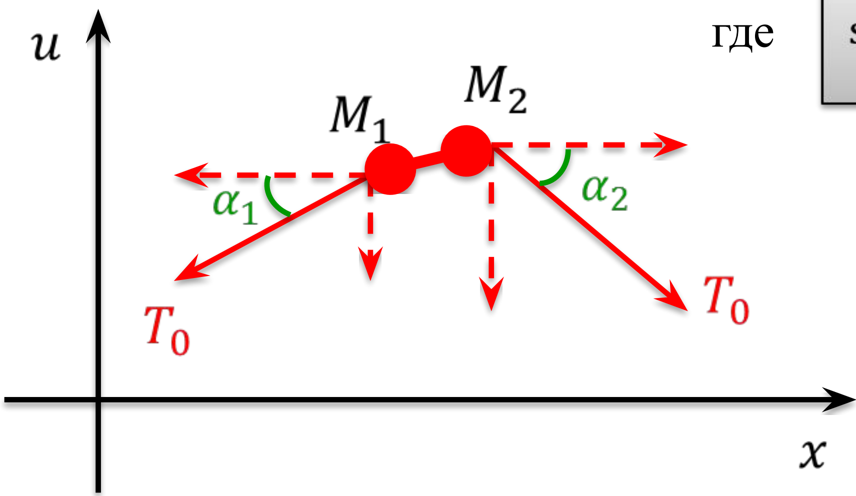
$$S_{(M_1,M_2)} = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \cancel{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}}\, dx \approx (x_2 - x_1)$$

Это означает, что в процессе малых колебаний **удлинением участков струны можно пренебречь**.
В этом случае, согласно закону Гука, **натяжение** $T(x) = T_0 = const$ в каждой точке струны (x) **не будет изменяться**.

Robert Hooke (1635-1703, Англия)
естествоиспытатель, учёный-энциклопедист, один из отцов физики, в особенности экспериментальной.

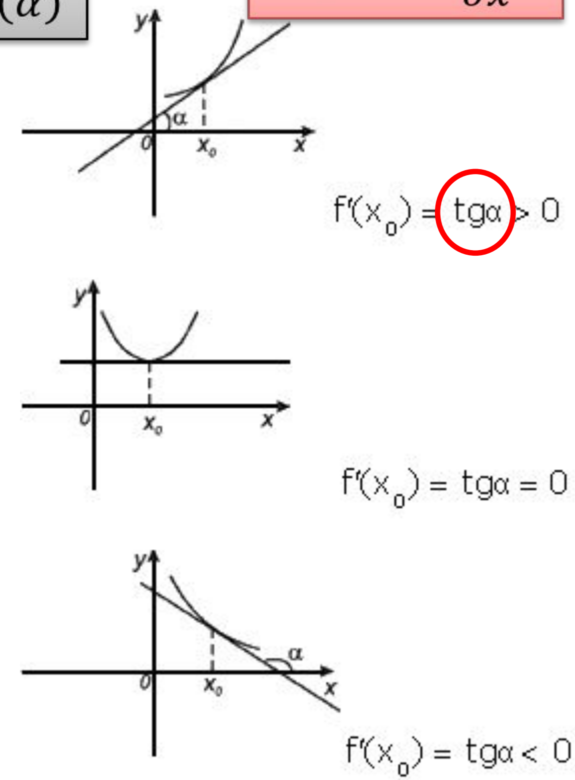
Уравнения гиперболического типа

Для поперечных колебаний струны сумма проекций на ось OU сил натяжения T, действующих на концах участка струны (M_1, M_2): $T_0 \cdot \sin(\alpha_2) - T_0 \cdot \sin(\alpha_1)$



где $\sin(\alpha) = \dfrac{\mathrm{tg}(\alpha)}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2(\alpha)}}$

$$\mathrm{tg}(\alpha) = \frac{\partial u}{\partial x}$$



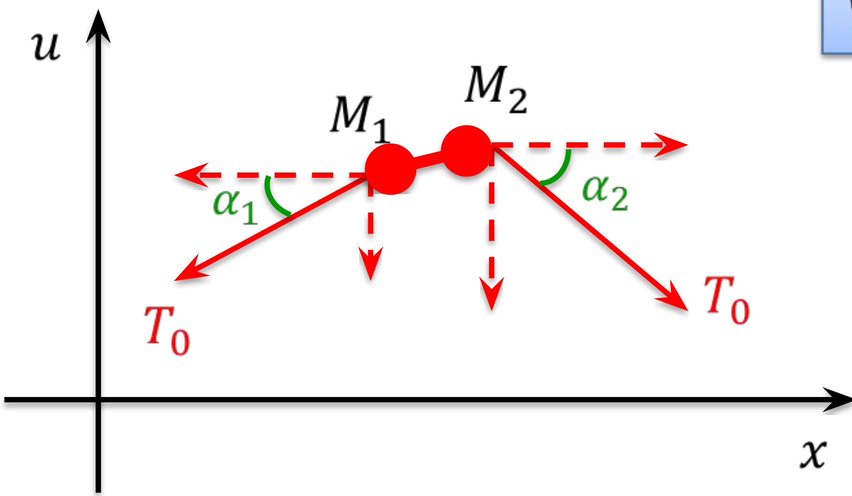
Воспользуемся геометрическим смыслом производной – «Производная в точке x равна угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в этой точке»

Уравнения гиперболического типа

Из предположения о малости колебаний следует:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \ll 1$$

$$\sin(\alpha) = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{1 + \cancel{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}}} \approx \frac{\partial u}{\partial x}$$



Таким образом, сумма проекций сил натяжения на выделенный участок струны:

$$T_0 \cdot \sin(\alpha_2) - T_0 \cdot \sin(\alpha_1) \approx$$

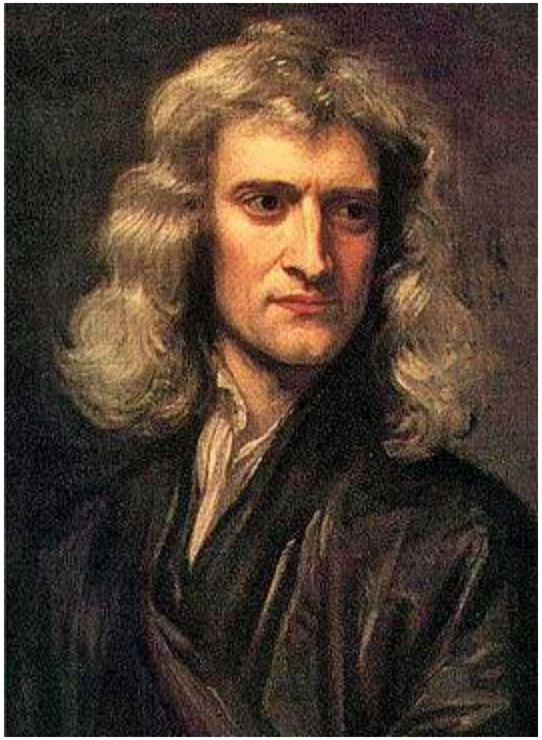
$$T_0 \cdot \left(\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x_2} - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x_1} \right) = T_0 \cdot \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx$$

Первообра́зной или примити́вной функцией данной функции $f(x)$ называют такую $F(x)$, производная которой (на всей области определения) равна $f(x)$, то есть $F'(x) = f(x)$.

Уравнения гиперболического типа

Закон динамики поступательного движения (**закон Ньютона**), который для механической системы:

Sir Isaac Newton (1643-1727, Англия). Физик, математик, механик и астроном, один из создателей классической **физики**.



$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}$$

здесь
$\vec{P}$ - импульс системы, равный сумме импульсов всех ее частиц;
$\vec{F}$ - результирующая внешняя сила.

В качестве такой механической системы рассмотрим выделенный участок струны (M_1, M_2) Учитывая, что движение этой системы происходит в направлении, перпендикулярном оси OX, запишем **закон Ньютона** в проекции на ось OU:

$$\frac{dP}{dt} = F$$

Уравнения гиперболического типа

Проекция импульса выделенного участка струны (M_1, M_2):

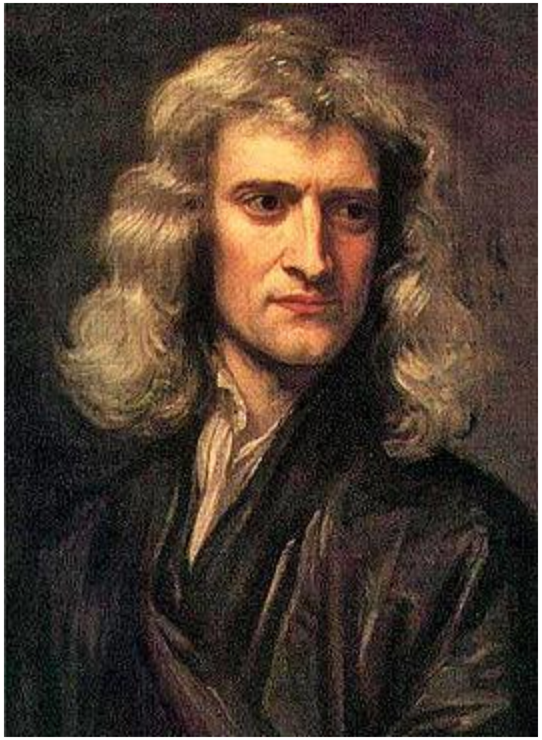
$$P = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x) \frac{\partial u}{\partial t} dx$$

$\rho(x)$ - линейная плотность распределения массы в струне, которая в общем случае изменяется вдоль струны.

Следовательно, скорость изменения импульса выделенного участка струны (M_1, M_2):

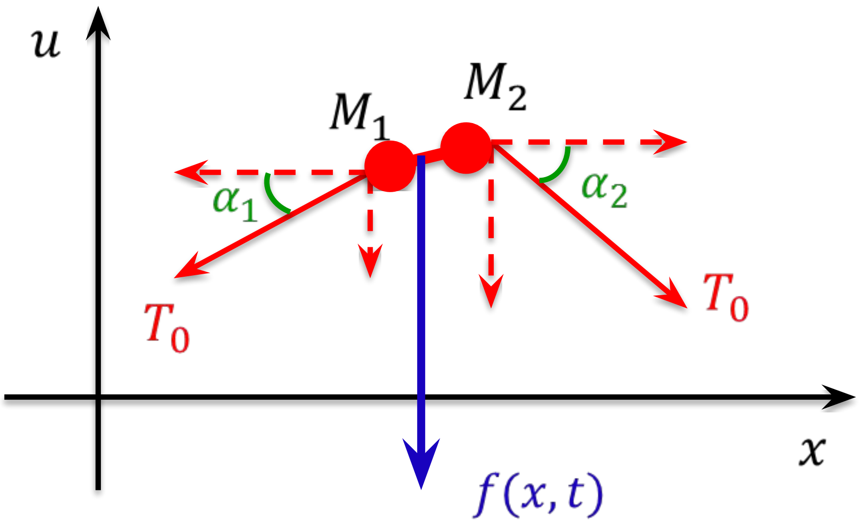
$$\frac{dP}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\int_{x_1}^{x_2} \rho(x) \frac{\partial u}{\partial t} dx\right) = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx$$

Sir Isaac Newton (1643-1727, Англия). Физик, математик, механик и астроном, один из создателей классической **физики**.



Уравнения гиперболического типа

Проекция внешних сил состоит из двух слагаемых: одно из них учитывает действие сил натяжения на концах выделенного участка струны T, а другое - суммарную вынуждающую силу F_0, действующую на частицы этого участка.



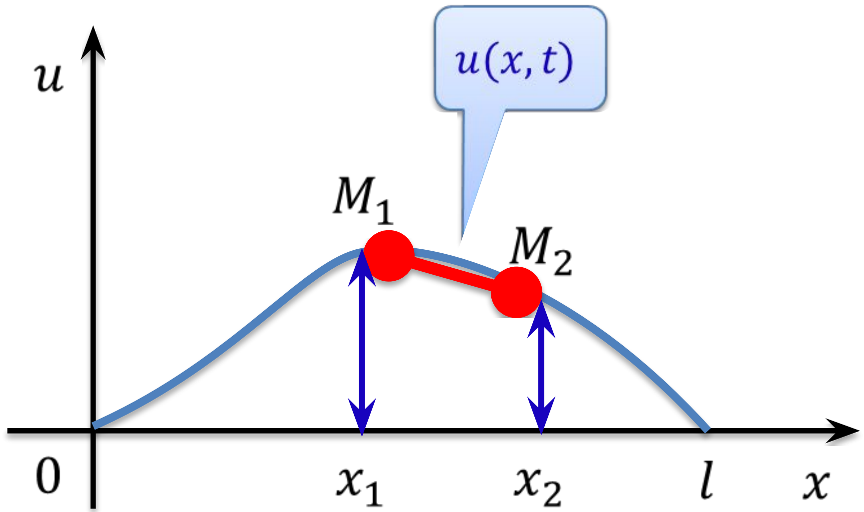
$$F_0 = \int_{x_1}^{x_2} f(x,t)dx$$

Таким образом, **второй закон Ньютона для участка струны** запишется в виде интегрального соотношения:

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dx = T_0 \cdot \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x,t)dx$$

Уравнения гиперболического типа

В силу произвольности выбора отрезка (x_1, x_2) из уравнения следует, что в любой точке струны в любой момент времени t подынтегральное выражение должно обращаться в нуль, т.е.

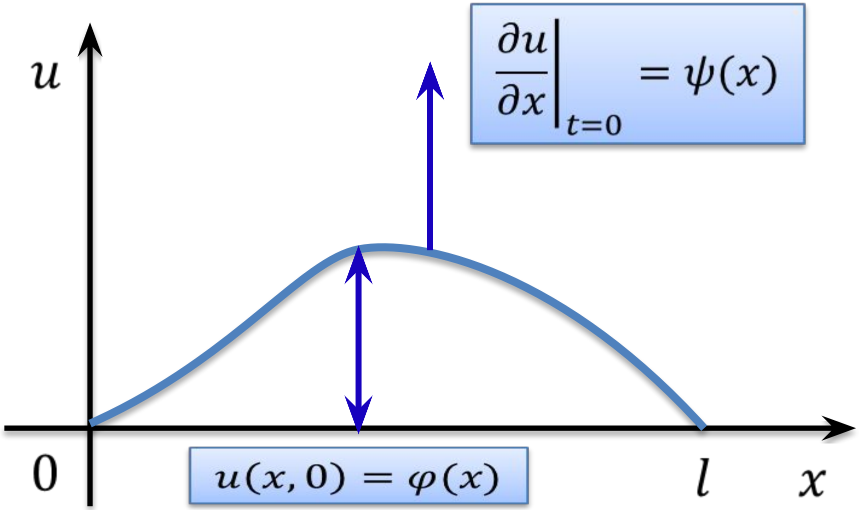


$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$$

Полученное соотношение представляет собой дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка относительно искомой функции $u(x,t)$.

Оно описывает процесс **малых поперечных колебаний** струны, и его называют неоднородным одномерным волновым уравнением, или уравнением плоских волн.

Уравнения гиперболического типа.
Задача Коши



$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$$

Причинами, вызывающими колебания струны, могут являться начальные отклонения струны от равновесного положения или сообщенный струне начальный импульс, обусловливающий некоторое распределение скоростей частиц струны.

Поэтому необходимо задать **начальные условия**:

$$\begin{cases} u(x,0) = \varphi(x) \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

Методы решения уравнений в частных производных. Метод Фурье

Метод разделения переменных, или метод Фурье, является одним из основных методов решения задач математической физики **в ограниченных областях**.

Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830, Франция), французский математик и физик.

Идея метода Фурье основана на линейности и однородности уравнения и граничных условий. В этом случае справедлив принцип суперпозиции для любых частных решений u_1 и u_2 уравнения, удовлетворяющих начальным и граничным условиям, т.е. функция

$$u = C_1 \cdot u_1 + C_2 \cdot u_2$$

также удовлетворяет уравнению и граничным условиям

Методы решения уравнений в частных производных.

Метод Фурье

Нетривиальное решение уравнения ищется **в виде произведения функций**, например:

$$u(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$$

или

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$$

или

$$u(x, y, z) = X(x) \cdot Y(t) \cdot Z(z)$$

Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830, Франция), французский математик и физик.