



КОМБИНАТОРИ КА

Комбинаторика

- Раздел математики, занимающийся подсчётами количества различных комбинаций между объектами

Правило суммы

Пусть элемент α можно выбрать k способами, а элемент β – m способами.

Тогда, если любой способ выбрать α независим от любого способа выбора β , то выбор « α или β » можно сделать $k+m$ способами

Пример

У нового русского когда-то было три пентхауса, два трёхэтажных особняка и один пятиэтажный.

Каждый день он по желанию возвращался в одно из своих мест обитания.

Выбор из какого количества вариантов ему приходилось делать каждый день?

По правилу суммы количество комбинаций

$$3 + 2 + 1 = 6$$

Правило произведения

Пусть элемент α можно выбрать k способами, а элемент β можно выбрать t способами.

Тогда пару (α, β) можно выбрать $k \times t$ способами

Пример

У нового русского когда-то было семь крутых автомобилей и пять любовниц. Сколькими способами он мог выбрать себе на свободный вечер пару «девушка и авто»?

По правилу произведения количество комбинаций

$$5 \times 7 = 35$$

Основные задачи комбинаторики

I. Сколькими способами можно переставлять элементы множества, чтобы получить различные кортежи длины n ?

Пример. Дизайнер интерьера расставляет семь крутых авто нового русского в гараже различными способами

Основные задачи комбинаторики

2. Сколькими способами из всего множества мощности n можно выбрать различные кортежи длины m ($m \leq n$)?

Пример. Новый русский выбирает из своих семи два автомобиля, один из которых подарит жене, а второй – самой красивой любовнице

Основные задачи комбинаторики

3. Сколькими способами из всего множества мощности n можно выбрать различные подмножества длины m ($m \leq n$)?

Пример. Новый русский выбирает себе в эскорт на вечер двух из пяти своих любовниц

Перестановки

- Упорядоченные множества (кортежи), состоящие из n различных элементов

Число перестановок

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

По правилу произведения

Пример

Дизайнер интерьера каждый день расставлял семь крутых авто нового русского в гараже в новом порядке. На сколько лет ему хватило бы ежеутренней бестолковой работы?

Число перестановок

$$P_7 = 7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$$

$$5040 : 365 = 13,8$$

Перестановки

$$P_n = n \cdot P_{n-1}$$

Рекуррентная формула

Рекурсия глубины I

$$P_1 = 1! = 1$$

$$P_0 = 0! = 1$$

Размещения (без повторений)

- Упорядоченное подмножество (кортеж) из **m** элементов, составленное из элементов всего множества, содержащего **n** элементов

Число размещений

$$A^m_n = n! / (n-m)!$$

фр. *Arrangement* – размещение

Пример

Новый русский выбирает из своих семи два автомобиля, один из которых подарит жене, а второй – самой красивой любовнице

Сколько вариантов ему придётся перебрать?

Число размещений

$$A^2_7 = 7! / (7-2)! = 7! / 5! = 7 \cdot 6 = 42$$

Сочетания (без повторений)

- Неупорядоченное подмножество (выборка) из m элементов, составленное из элементов всего множества, содержащего n элементов

Число сочетаний

$$C_n^m = n! / ((n-m)!m!)$$

фр. *Combinaison* – комбинация

Пример

Новый русский выбирает себе в эскорт на вечер двух из пяти своих любовниц.

Сколько вариантов ему надо перебрать?

Число сочетаний

$$\begin{aligned} C^2_5 &= 5! / (2! (5-2)!) = 5! / (2! 3!) = \\ &= 5 \cdot 4 / 2 = 10 \end{aligned}$$

Число сочетаний

$$C_n^m = A_n^m / P_m$$

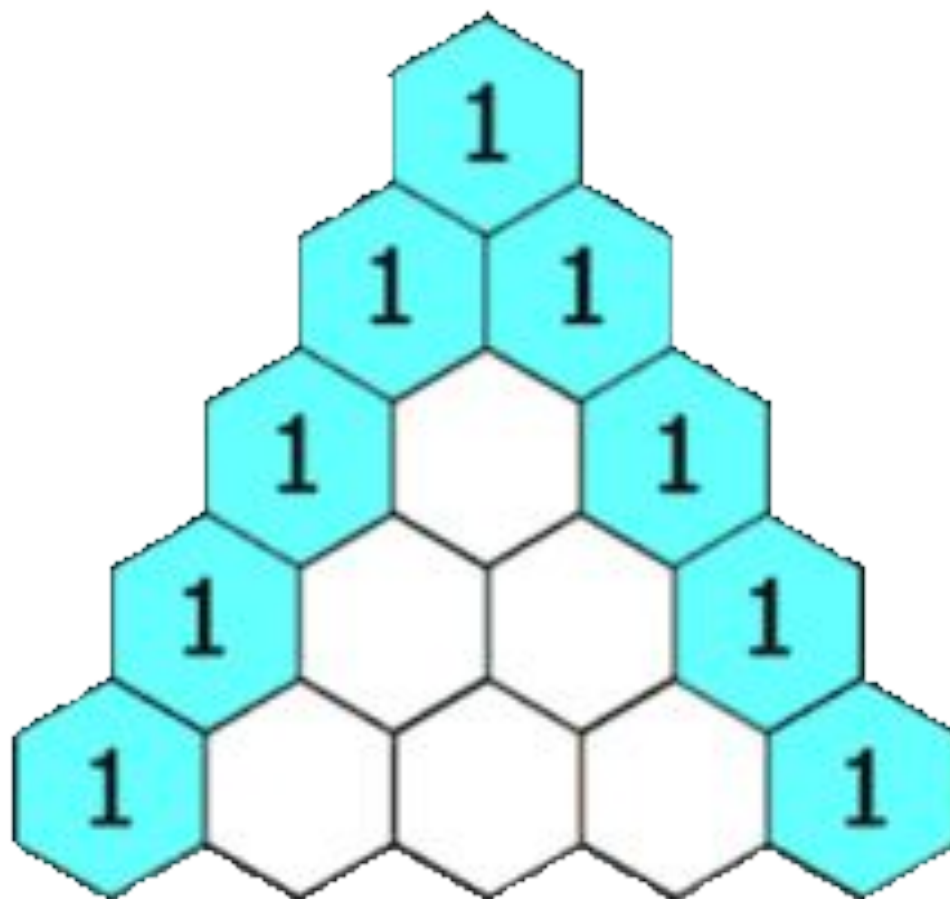
$$C_n^m = C_n^{n-m}$$

Важные частные случаи

$$C_n^0 = C_n^n = 1$$

$$C_n^1 = C_n^{n-1} = n$$

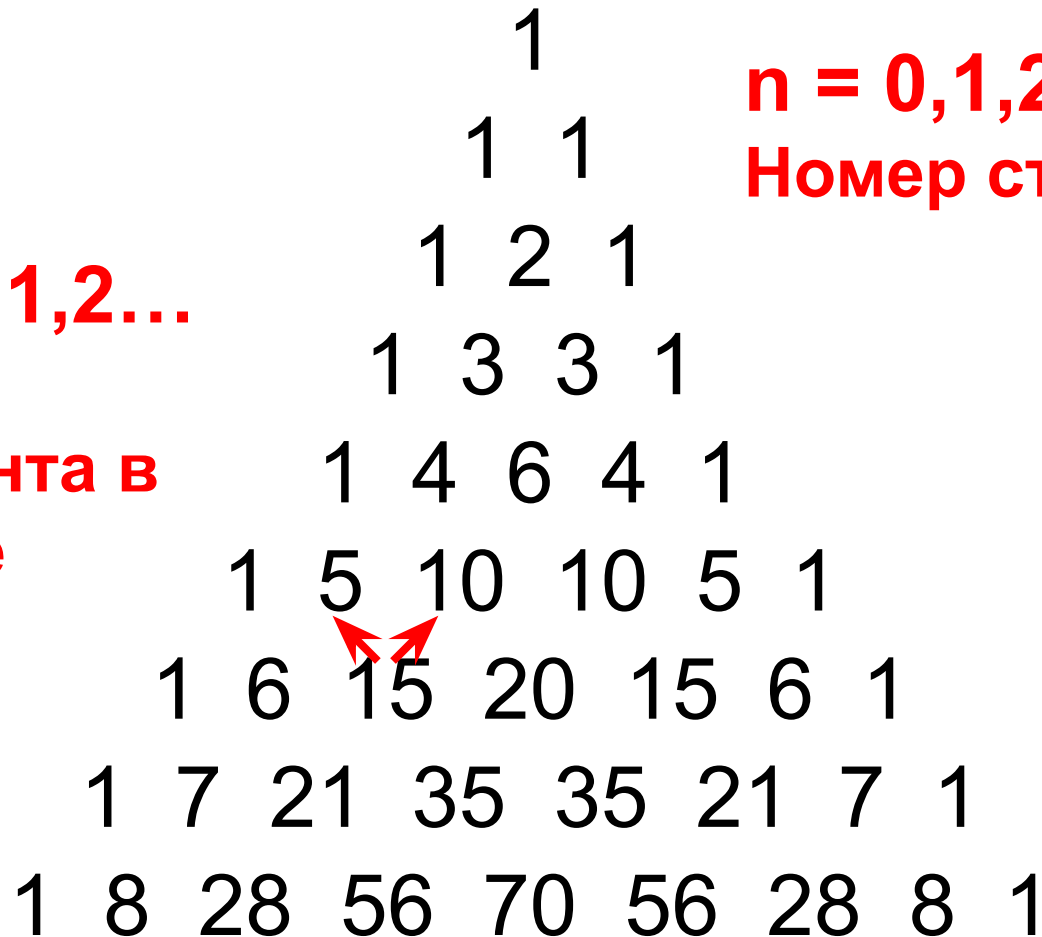
Треугольник Паскаля



Треугольник Паскаля

m = 0,1,2...
Номер
элемента в
строке

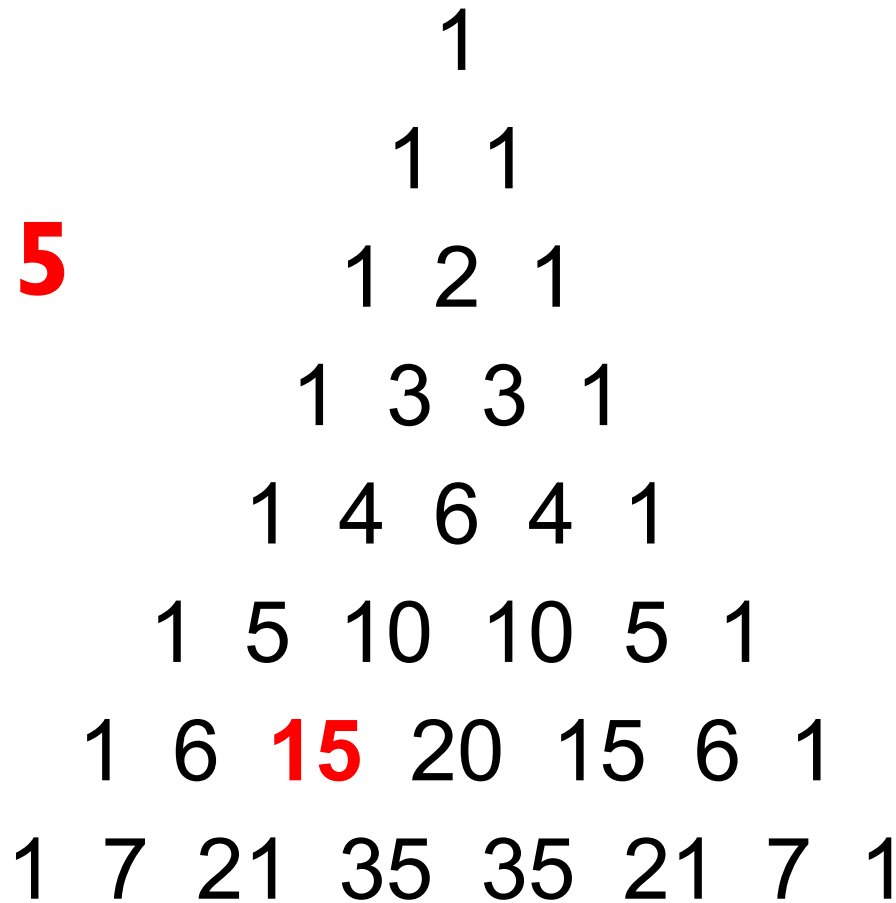
$n = 0, 1, 2, \dots$
Номер строки



$$C_6^2 = 15$$

n = 6

m = 2



Бином Ньютона

$$(a + b)^n = \sum_{m=0}^n C_n^m a^{n-m} b^m$$

Бином Ньютона

$$n=2$$

$$(a + b)^2$$

$$1$$

$$1 \ 1$$

$$1 \ 2 \ 1$$

$$(a + b)^2 = 1 \cdot a^{2-0}b^0 + 2a^{2-1}b^1 + 1 \cdot a^{2-2}b^2$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Бином Ньютона

$$n=3$$

$$(a + b)^3$$

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

$$(a + b)^3 = 1 \cdot a^{3-0}b^0 + 3a^{3-1}b^1 + 3a^{3-2}b^2 + 1 \cdot a^{3-3}b^3$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$