

# Уравнения

Иррациональные

Логарифмические

Показательные



# Иррациональные уравнения

Уравнение, содержащее неизвестное под знаком корня, называется иррациональным уравнением.

Решение уравнений, содержащих неизвестное под знаком корня, основано на следующих основных теоремах:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ f^2(x) &= g^2(x) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \sqrt{f(x)} = g(x) \\ f(x) = g^2(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ f^3(x) &= g^3(x) \\ X &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \\ f(x) = g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

Если уравнение без нахождения  
ООУ  
Необходима проверка!

# Примеры:

$$1). \sqrt{2x+5} = x-1$$

$$2). \sqrt{2x^2 - x - 6} = \sqrt{x-1}$$

$$3^*). \sqrt[3]{x^2 - x + 6} = x \quad \text{📖}$$

$$4^*). \sqrt{x+5} - \sqrt{x+3} - \sqrt{\sqrt{x+3} + x - 2} = 1 \quad \text{📖}$$



# ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

- Показательными уравнениями, называется уравнение вида

$$a^{f(x)} = a^{g(x)}$$

$a$  - положительное число,  $a \neq 1$

- Решение уравнений, содержащих неизвестное в показателе степени, основано на следующей теореме

- Основные методы:

а) Метод введения новой переменной

б) Метод разложения на множители

в) Если левая и правая части уравнения - произведения, положительные на области определения уравнения, то логарифмируем обе части уравнения по любому удобному основанию.

$$a^{f(x)} = a^{g(x)}$$

$$a \neq 0$$

$$a \neq 1$$

$$f(x) = g(x)$$

# Примеры:

$$1) 2^{\sqrt{x}+2} - 2^{\sqrt{x}+1} = 12 + 2^{\sqrt{x}-1}$$

$$2) 2^{2-x} - \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} - \frac{1}{2^{x+2}} + \sqrt{\frac{1}{4^{x-1}}} = 84$$

$$3) 12 \cdot 4^x - 35 \cdot 6^x + 18 \cdot 9^x = 0 \quad \img alt="book icon" data-bbox="854 561 889 593"/>$$

$$4) (\sqrt{11})^x \cdot \frac{1}{121} = 11^{1-\frac{x^2}{2}}$$

$$5) 3^x = 4^{x-2} \cdot 2^x \quad \img alt="book icon" data-bbox="569 844 604 876"/>$$



# Логарифмические уравнения

- Решение уравнений, содержащих неизвестное под знаком логарифма, основано на следующих теоремах:

$$\log_a f(x) = g(x)$$

$$f(x) = a^{g(x)}$$

$$\log_a f(x) = \log_a g(x)$$

$$f(x) = g(x)$$

$$f(x) \neq 0$$

$$\log_a (f(x))^{2n} = g(x)$$

$$2n \cdot \log_a |f(x)| = g(x)$$

## ПРИМЕРЫ:

$$1) \log_3(4x - 1) = 2 - \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{x + 1}$$

$$2) \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(2^{x+2} - 4^x) = -4$$

$$3) 2 \cdot \log_2 x + 5 = 3 \cdot \log_x 2$$

$$4) \log_{9x^2}(6 + 2x - x^2) = \frac{1}{2} \quad \text{📖}$$

$$5) x^{\lg x - 3} = 0,01 \quad \text{📖}$$



# Проверь себя

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{x+3} - \sqrt{\sqrt{x+3} + x - 2} = 1$$

Пусть  $\sqrt{x+3} = t \geq 0$

$$t^2 = x + 3$$

$$x = t^2 - 3$$

Подставим вместо  $x$  выражение  $t^2 - 3$  в исходное уравнение получаем :

$$\left(\sqrt{t^2 - 3 + 5 - t}\right)^2 = \left(1 + \sqrt{t + t^2 - 3 - 2}\right)^2$$

$$t^2 - t + 2 = 1 + 2\sqrt{t + t^2 - 5} + t^2 + t - 5$$

$$-2t + 6 = 2\sqrt{t^2 + t - 5}$$

$$3 - t = \sqrt{t^2 + t - 5}$$

$$\left[ \begin{array}{l} 9 - 6t + t^2 = t^2 + t - 5 \\ 0 \leq t \leq 3 \end{array} \right.$$

$$\left[ \begin{array}{l} t = 2 \\ 0 \leq t \leq 3 \end{array} \right.$$

$$t = 2$$

$$0 \leq t \leq 3$$

$$\sqrt{x+3} = 2$$

$$x + 3 = 4$$

$$x = 1$$

Ответ 1





$$\sqrt[3]{x^2 - x + 6} = x \quad x \in \mathbb{R}$$

$$x^2 - x + 6 = x^3$$

$$x^3 - x^2 + x - 6 = 0$$

$$\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm 6$$

$$P_3(1) = 1 - 1 + 1 - 6 = -5$$

$$P_3(-1) = -1 - 1 - 1 - 6 = -9$$

$$P_3(2) = 8 - 4 + 2 - 6 = 0$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - x^2 + x - 6 & x - 2 \\ \hline -x^3 + 2x^2 & x^2 + x + 3 \\ \hline -x^2 + x & \\ -x^2 - 2x & \\ \hline & -3x - 6 \\ & \underline{3x - 6} \\ & 0 \end{array}$$

$$(x - 2) \cdot (x^2 + x + 3) = 0$$

$$(x - 2) = 0$$

$$x = 2$$

$$(x^2 + x + 3) = 0$$

Д  $\nexists$  0 корней нет

Ответ 2



# Проверь себя

$$12 \cdot 4^x - 35 \cdot 6^x + 18 \cdot 9^x = 0$$

Функция  $y = 9^x$  положительна при любых действительных значениях  $x$ , поэтому разделим обе части уравнения на  $9^x$ .

$$12 \cdot \frac{4^x}{9^x} - 35 \cdot \frac{6^x}{9^x} + 18 = 0$$

$$12 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 35 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x + 18 = 0$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = t$$

$$12 \cdot t^2 - 35 \cdot t + 18 = 0$$

$$D = 361$$

$$t_1 = \frac{2}{3} \quad t_2 = \frac{9}{4}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{2}{3} \quad \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{9}{4}$$

$$x = 1 \quad x = -2$$

Ответ 1; - 2



# Проверь себя

$$3^x = 4^{x-2} \cdot 2^x$$

$$\log_2(3^x) = \log_2(4^{x-2} \cdot 2^x)$$

$$x \cdot \log_2 3 = (x-2)\log_2 4 + x\log_2 2$$

$$x \cdot \log_2 3 = 2x - 4 + x$$

$$x \cdot \log_2 3 - 3x = -4$$

$$x(\log_2 3 - 3) = -4$$

$$x = \frac{-4}{\log_2 3 - 3}$$

*Ответ*  $\frac{-4}{\log_2 3 - 3}$



# Проверь себя

$$\log_{9x^2} (6 + 2x - x^2) = \frac{1}{2}$$

$$6 + 2x - x^2 \geq 0$$

$$9x^2 \neq 1$$

$$x \neq 0$$

$$\sqrt{9x^2} = 6 + 2x - x^2$$

$$|3x| = 6 + 2x - x^2$$

$$3x = 6 + 2x - x^2$$

$$3x = -6 - 2x + x^2$$

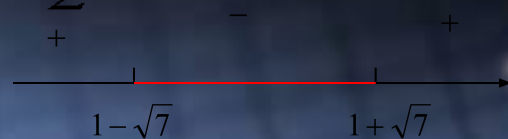
$$x = -3 \text{ не удовл.}$$

$$x = 2$$

$$x = 6 \text{ не удовл.}$$

$$x = -1$$

Ответ  $-1; 2$



# Проверь себя

$$x^{\lg x - 3} = 0,01$$

Прологарифмируем обе части уравнение по основанию 10

$$x \neq 0 (*)$$

$$x \neq 1$$

$$\lg x^{\lg x - 3} = \lg 0,01$$

$$(\lg x - 3) \cdot \lg x = -2$$

$$\lg x = t$$

$$(t - 3) \cdot t = -2$$

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$t = 2 \quad t = 1$$

$$\lg x = 2 \quad \lg x = 1$$

$$x = 100 \quad x = 10$$

Ответ 10;100

