Лекция 8
Исследование перехода к хаосу в экономических системах

1. Детерминированный хаос в экономических системах

Детерминированный хаос (динамический хаос) – нерегулярное движение, хаотическое поведение детерминированных (динамических) нелинейных систем.

Хаос и порядок – это структуры, которые тесно взаимосвязаны, взаимообусловлены и порождают друг друга.

Хаос на рынке ВРП:

• возникает вследствие непредсказуемости действий (нелинейного поведения) множества покупателей и продавцов. Они определяют скачки статистических данных, флуктуации, которые, усиливаясь, разрушают структуру;

• формируется на основе нелинейной реакции людей на информацию, они откликаются на изменения с запаздыванием;

• обнаруживается и проявляется в динамике таких показателей, как цены на энергоресурсы, курсы валют и др.

Хаос порождается нелинейностью. Он возникает в нелинейных детерминированных системах и не образуется в линейных.

2. Как возникает хаос?

Для возникновения хаоса необходимо, чтобы в фазовом пространстве:

1. все соседние траектории внутри локальной области разбегались;

2. все они оставались внутри ограниченного фазового объема.

- Геометрический образ хаотического движения: траектории могут разбегаться по двумерной поверхности, а возвращаться, выйдя в пространство.

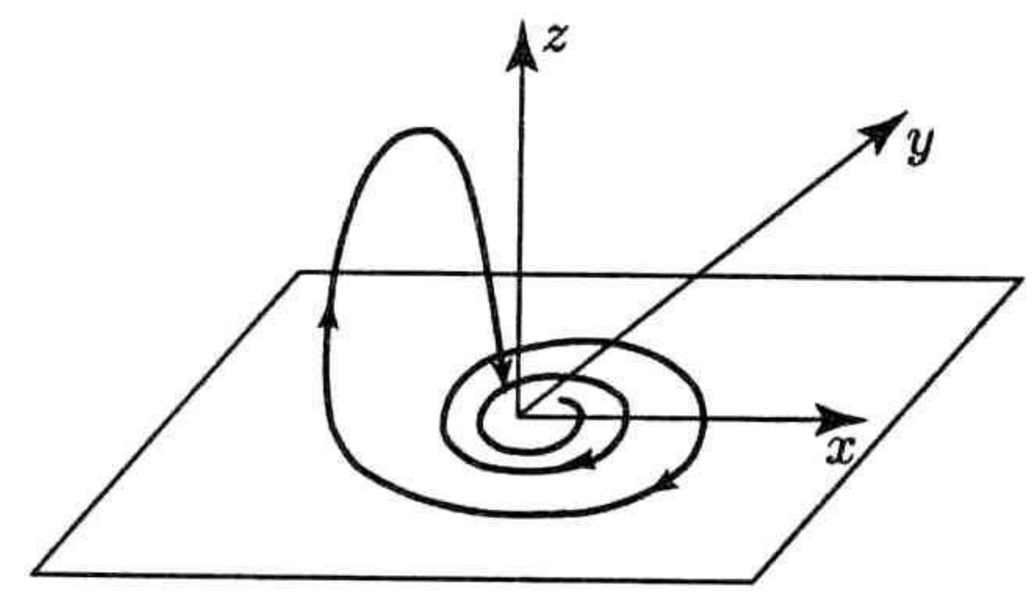
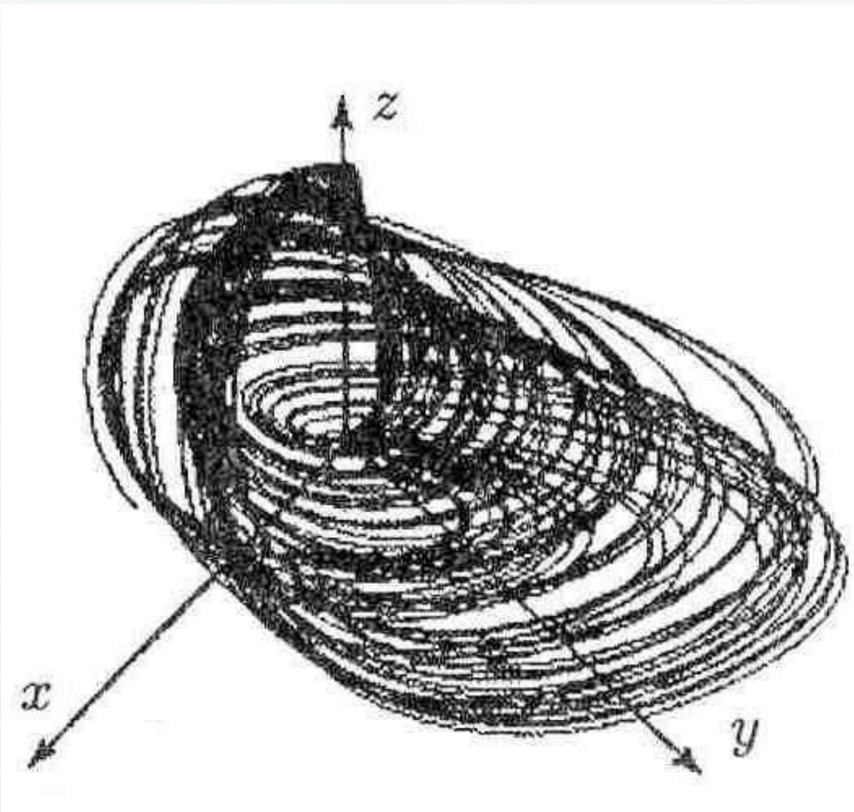
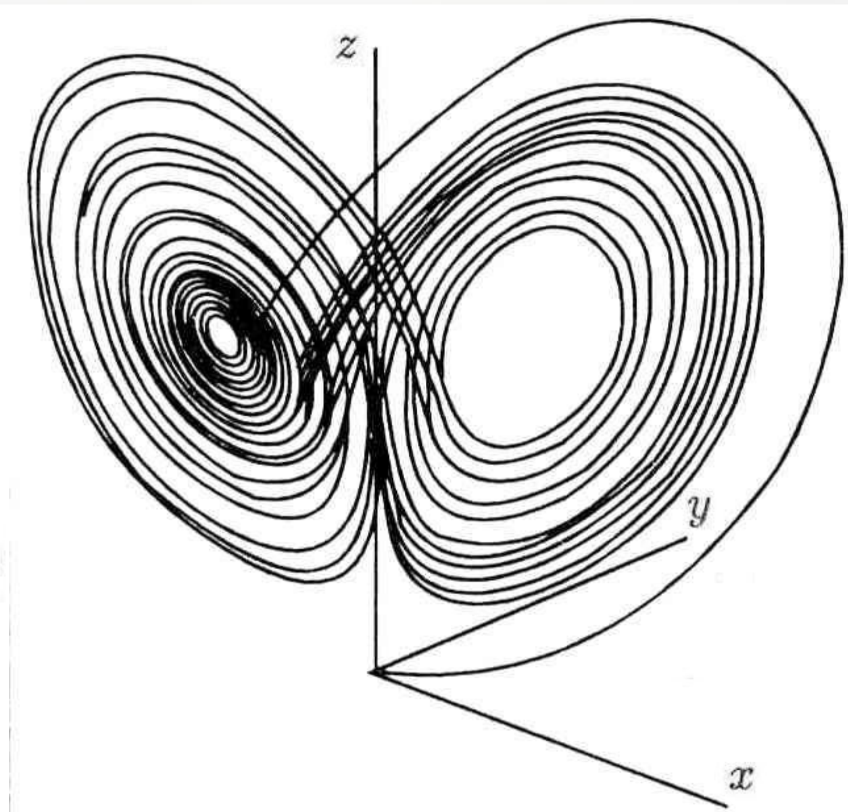


Рис. 1. Пример возвращающейся неустойчивой траектории, представляющей собой раскручивающуюся спираль, хвост которой, загибаясь к её началу, вновь раскручивается.

- Траектория заполняет область фазового пространства, нигде не замыкаясь, и ведет себя спонтанно и запутанно. Так возникает странный аттрактор.
- Странный аттрактор – объект в фазовом пространстве, в котором траектории по одним направлениям разбегаются, по другим – стягиваются.





Таким образом:

- Странный аттрактор – объект фазового пространства, к которому стремятся все или почти все траектории и на котором они неустойчивы.

- Детерминированный хаос – состояние нелинейной системы, когда её поведение приобретает вероятный характер и при этом система сама выбирает различные траектории развития.

- Детерминированность проявляется в виде упорядоченного движения, а хаос в непредсказуемости появления этого упорядоченного движения в определенное время и в определенном месте.

3. Сценарий перехода к хаосу

Известны три пути, которыми при изменении внешних управляющих параметров нелинейная система переходит к хаосу.

1. Сценарий перехода к хаосу через бесконечный каскад бифуркаций (М. Фейгенбаум).

Исходное состояние – цикл с периодом Т – устойчиво. При увеличении λ решение с периодом Т теряет устойчивость, а устойчивым становится решение с периодом 2Т, 4Т, и т.д.

М. Фейгенбаум

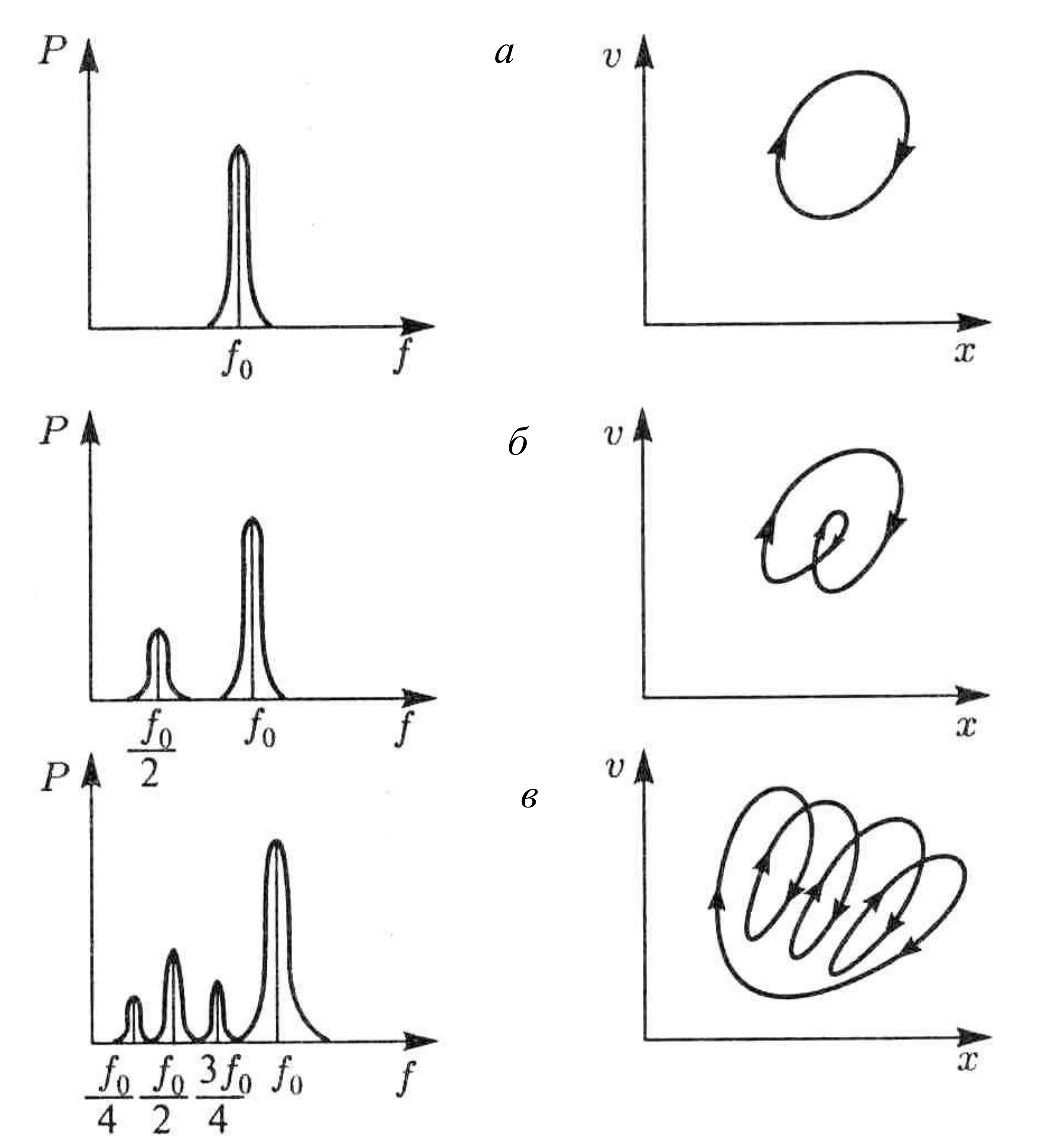


Рис.2. Фазовые портреты состояний до (а), после первой (б), после второй (в) бифуркации удвоения периода при увеличении параметра λ.

Значения λ, в которых происходит бифуркация сгущаются к некоторому значению $\lambda = \lambda_{кр}$.
При $\lambda > \lambda_{кр}$ в некоторой области фазового пространства возникает бесконечное число неустойчивых циклов, затем появляется хаотический странный аттрактор.

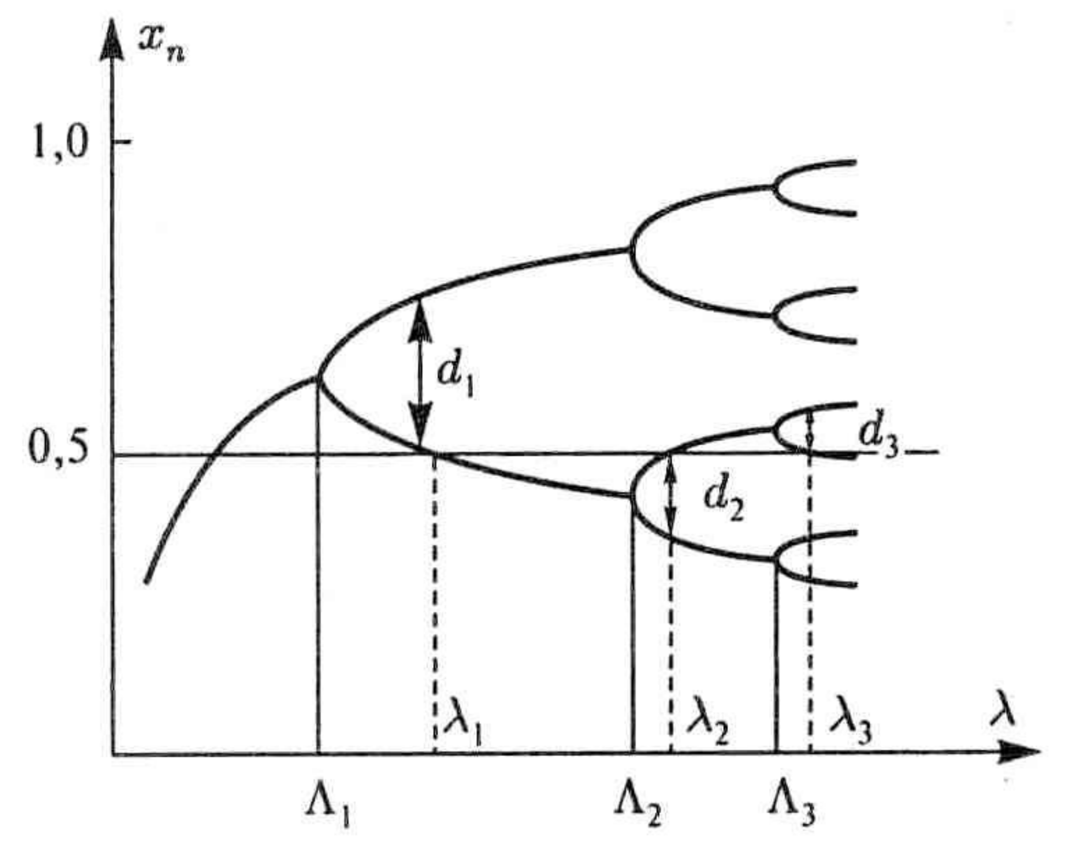
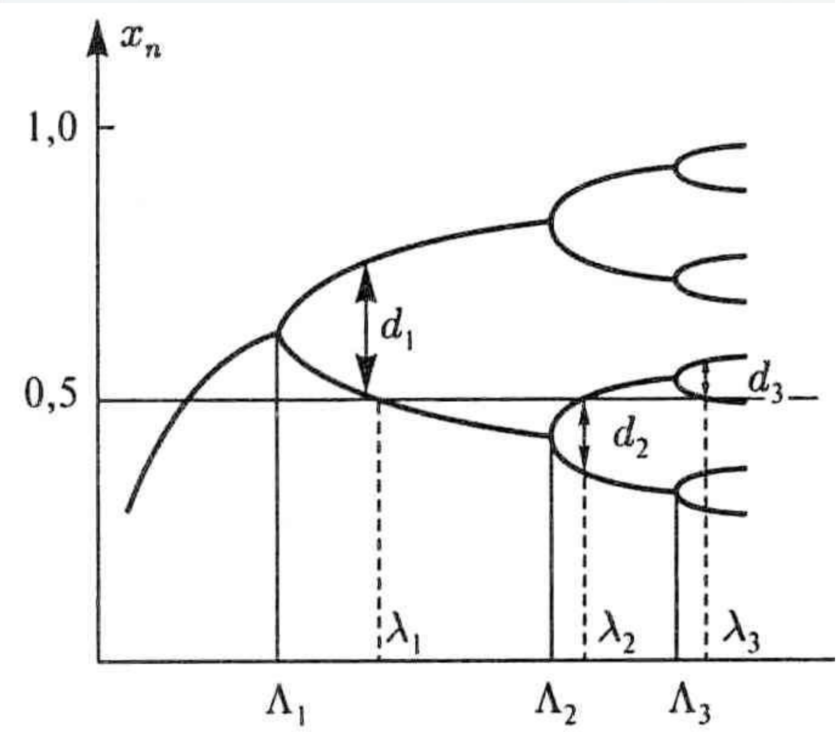
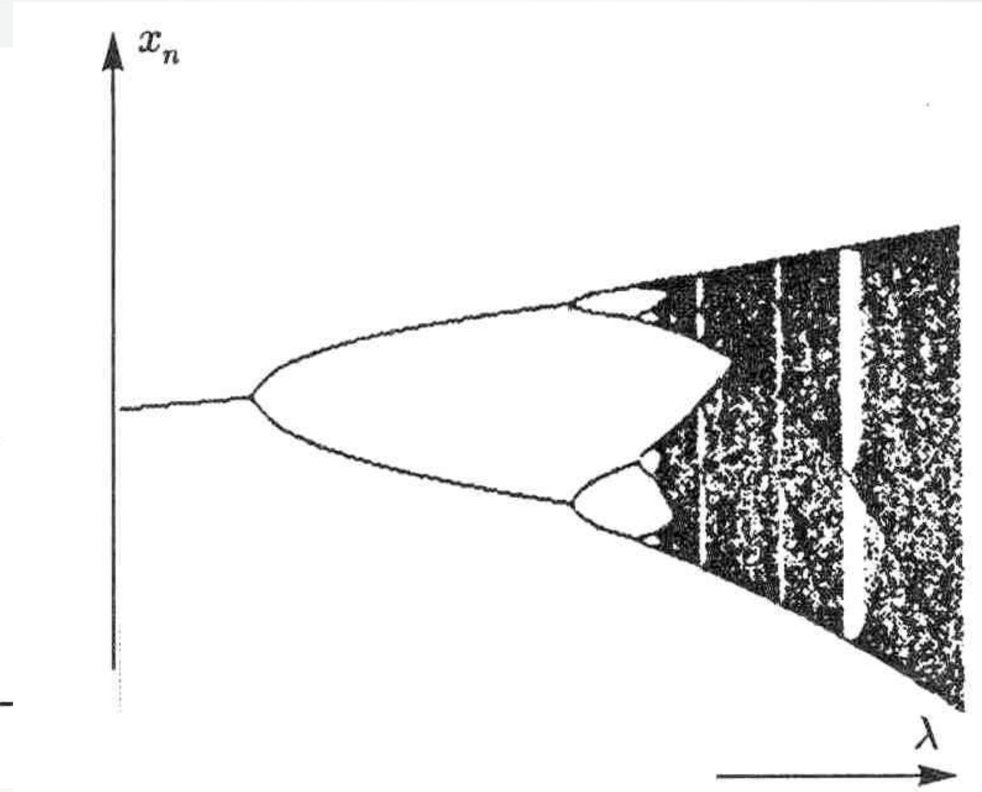


Рис. 3. «Поваленное дерево» (бифуркационная диаграмма). Переход к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода с увеличением управляющего параметра λ.
x –переменная системы.



x_n
1,0
0,5
d_1
d_2
d_3
λ_1
λ_2
λ_3
Λ_1
Λ_2
Λ_3



x_n
λ

2. Сценарий перемежаемости (П. Манневиль, И. Помо)

По мере изменения управляющего параметра λ регулярный процесс колебания x(t) прерывается интервалами нерегулярного движения, число разрывов растет, пока движение не становится полностью хаотическим.

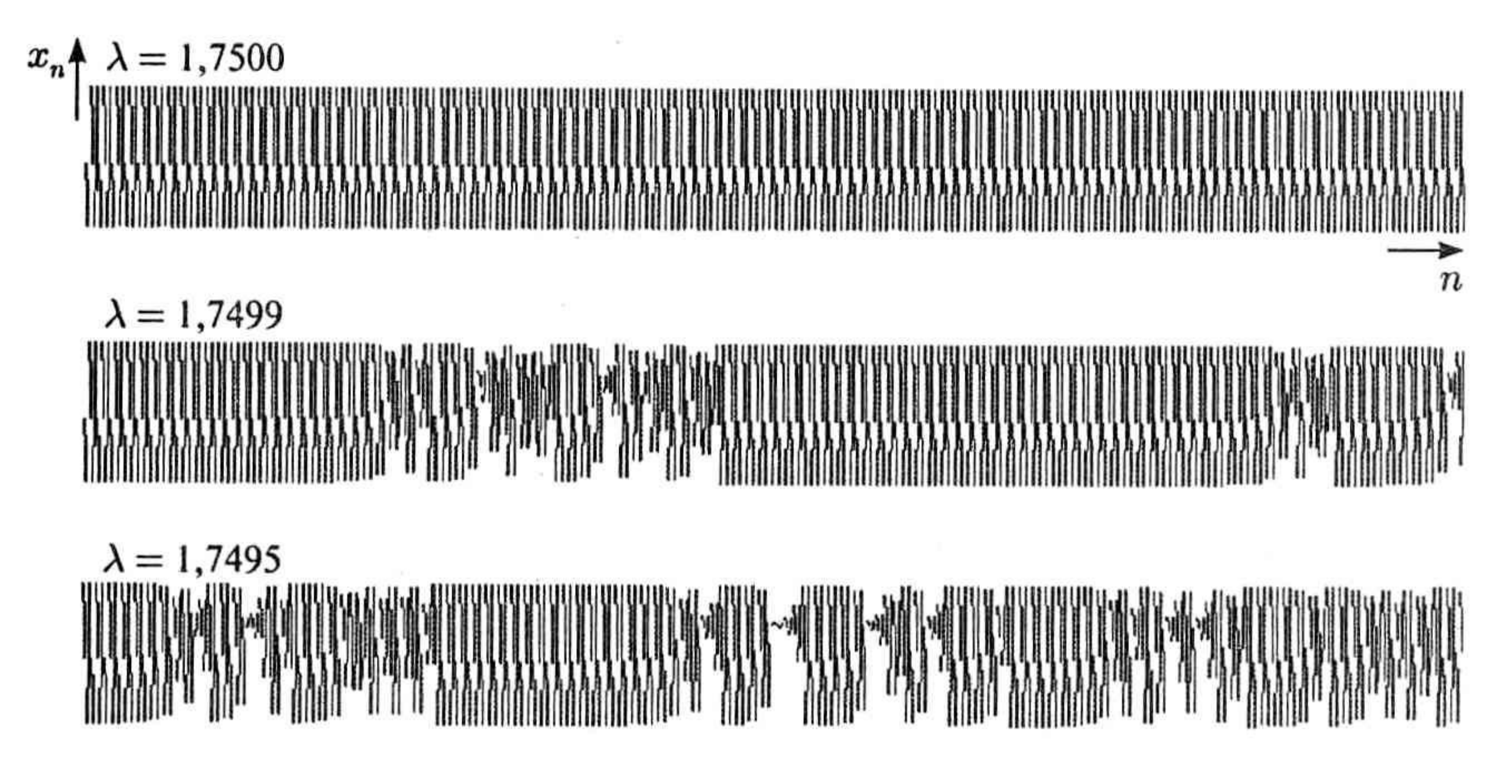


Рис.4. Зависимость переменной *x* от дискретного времени при переходе к хаосу.

3. Сценарий перехода к турбулентному движению (Такенс).

После двух- четырех и более неустойчивостей (бифуркаций Хопфа) траектории фазового пространства прижимаются к ограниченной области фазового пространства – странному аттрактору. (при $R_e > 1{,}3$, $R_e = \frac{d\rho\upsilon}{\eta}$)

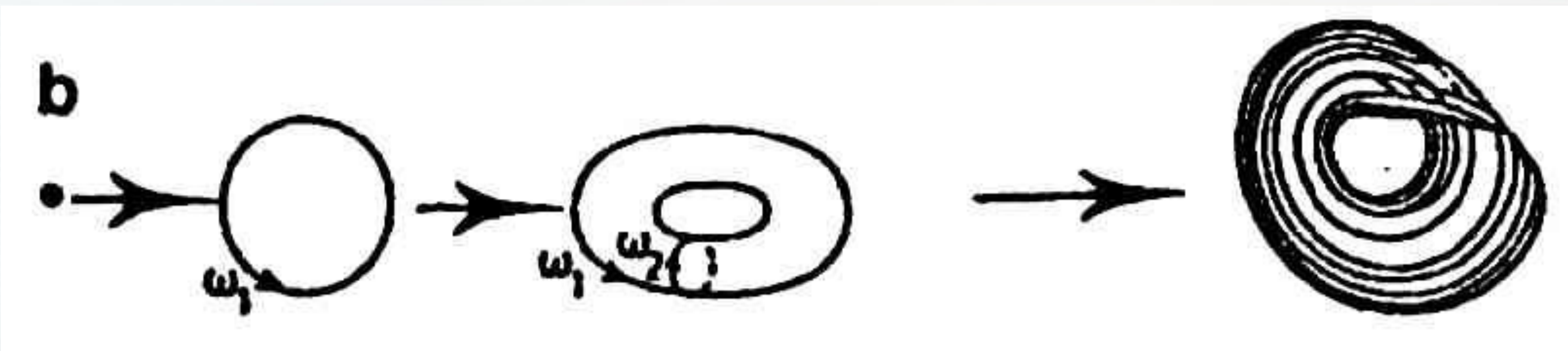


Рис.5. Переход к хаосу по Рюэлю-Такенсу-Ньюхаусу).

Исследование хаоса оказало влияние на экономическую науку:

- экономисты пытаются интерпретировать хаос в экономике в терминах детерминированных систем;

- экономистами осознано и общепризнано, что экономический хаос может быть вызван эндогенно в нелинейных системах.

4. Динамика развития производства товаров в условиях конкурентного рынка

Фирма *i* наращивает производство товара. Можно утверждать, что

$$\frac{dI_i}{dt} = k_i I_i \qquad (1)$$

где k_i – коэффициент выпуска.

В интегральной форме: $$I_i = I_i^0 e^{k_i t} \qquad (2)$$

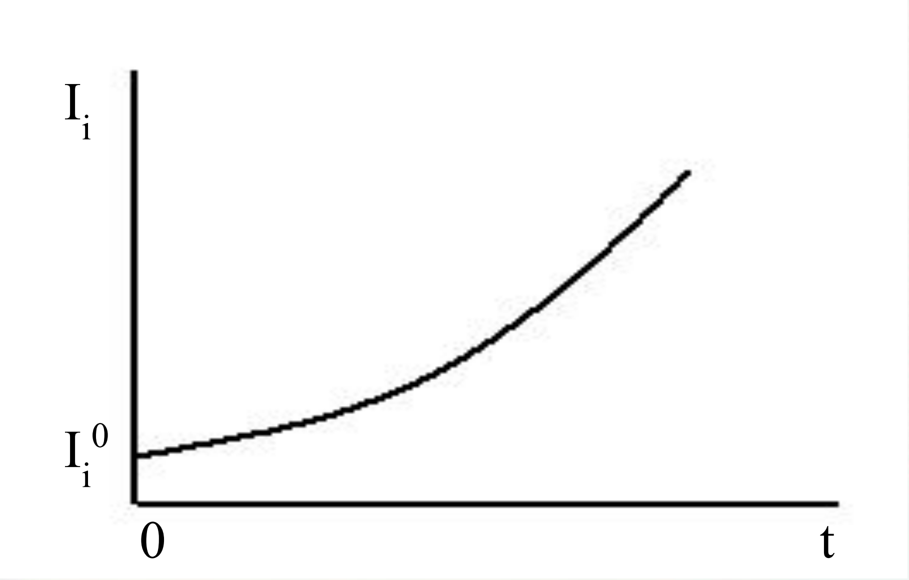


Рис.6. Рост выпуска товаров не ограничен.

Со временем насыщение рынка товаром, ограниченные запасы сырья, добавление затрат и др. приведут к уменьшению коэффициента выпуска:

$$\boldsymbol{k_i} = \boldsymbol{k_i}^0(1 - \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{I_i}) \qquad (3)$$

α – коэффициент затухания роста выпуска.

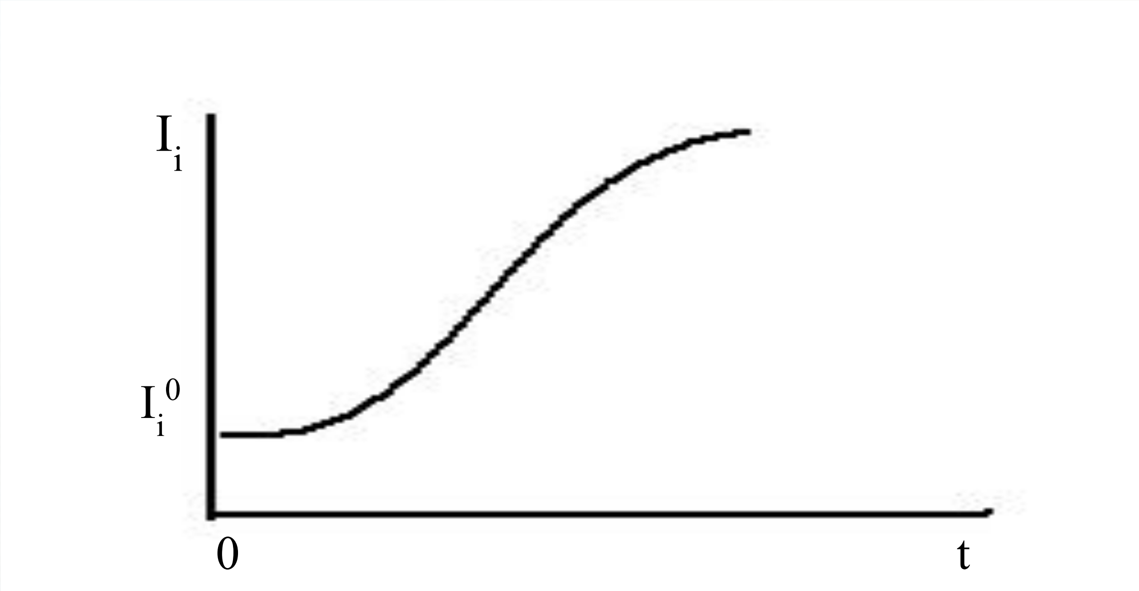


Рис.7. Рост выпуска товаров ограничен

При совершенной конкуренции (X_e = Const) работают i-фирма и j-фирма:

$$\frac{dI_i}{dt} = I_i(k_i - k_{ii}I_i - k_{ij}I_j) \qquad (4)$$

$$\frac{dI_j}{dt} = I_j(k_j - k_{jj}I_j - k_{ji}I_i) \qquad (5)$$

где:

k_i; k_j – коэффициенты выпуска фирм i и j;

k_{ii}; k_{jj} – коэффициенты потерь;

k_{ij}; k_{ji} – коэффициенты подавления **i**–фирмы **j**–фирмой и наоборот соответственно.

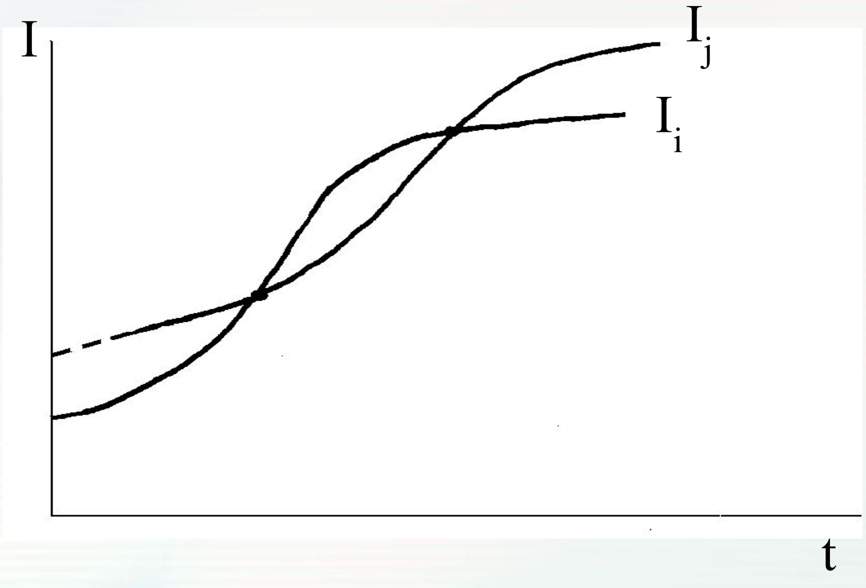


Рис.8. Конкуренция двух фирм на слабо неравновесном рынке товаров.

Из условия стационарности:

$$I_i(k_i - k_{ii}I_i - k_{ij}I_j) = 0 \qquad (6)$$

$$I_j(k_j - k_{jj}I_j - k_{ji}I_i) = 0 \qquad (7)$$

Возможны три ситуации:
1. $I_i = 0$; $I_j \neq 0$ – разорение i-фирмы, монополия j-фирмы;
2. $I_j = 0$; $I_i \neq 0$ – разорение j-фирмы, монополия i-фирмы;
3. $I_i \neq 0$; $I_j \neq 0$ – обе фирмы конкурируют на рынке и устойчивое состояние возможно:

$$I_i^* = \frac{k_{jj}k_i - k_{ij}k_j}{k_{ii}k_{jj} - k_{ji}k_{ij}} \qquad (8)$$

$$I_j^* = \frac{k_{ii}k_j - k_{ji}k_i}{k_{ii}k_{jj} - k_{ji}k_{ij}} \qquad (9)$$

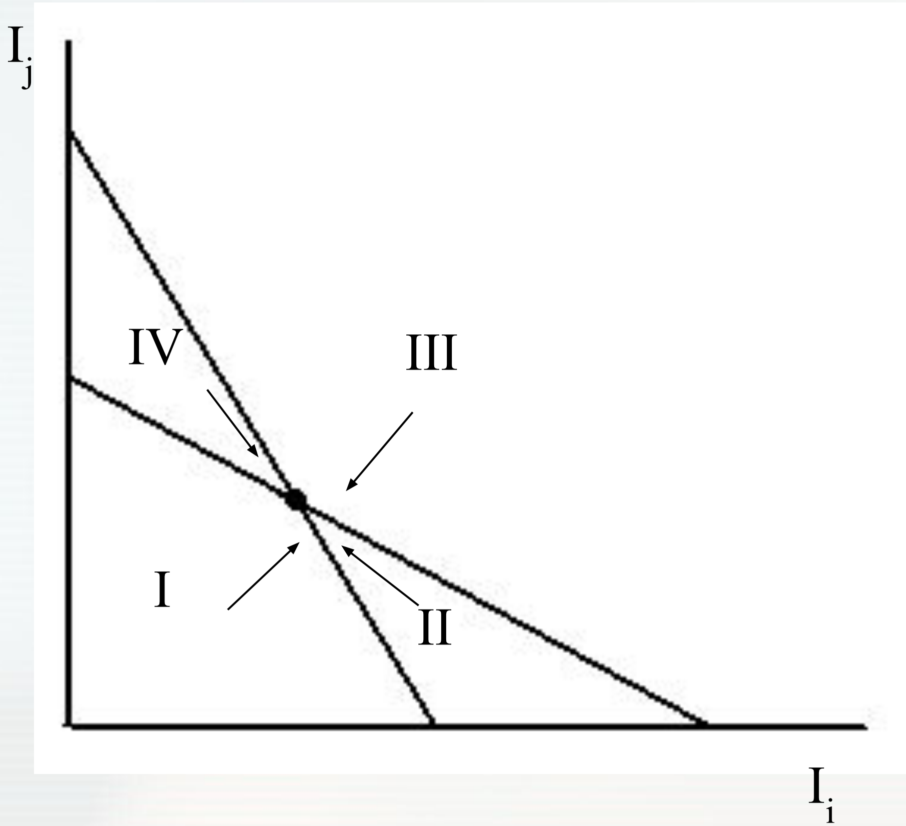


Рис.9. Устойчивая конкуренция двух фирм, если $k_{jj}k_i > k_{ji}k_j$ и $k_{ii}k_j > k_{ji}k_i$

На плоскости четыре области:

I – $I_j\uparrow$, $I_j\uparrow$,

II – $I_j\uparrow$, $I_i\downarrow$,

III – $I_j\downarrow$, $I_i\downarrow$,

IV – $I_j\downarrow$, $I_i\uparrow$.

Если состояние неустойчивое, т.е. числители (8) и (9) отрицательны, то побеждает одна из фирм, например, j-фирма, если:

$$\frac{k_j - k_{ji} I_i}{k_{jj}} > \frac{k_i - k_{ij} I_j}{k_{ii}} \qquad (10)$$

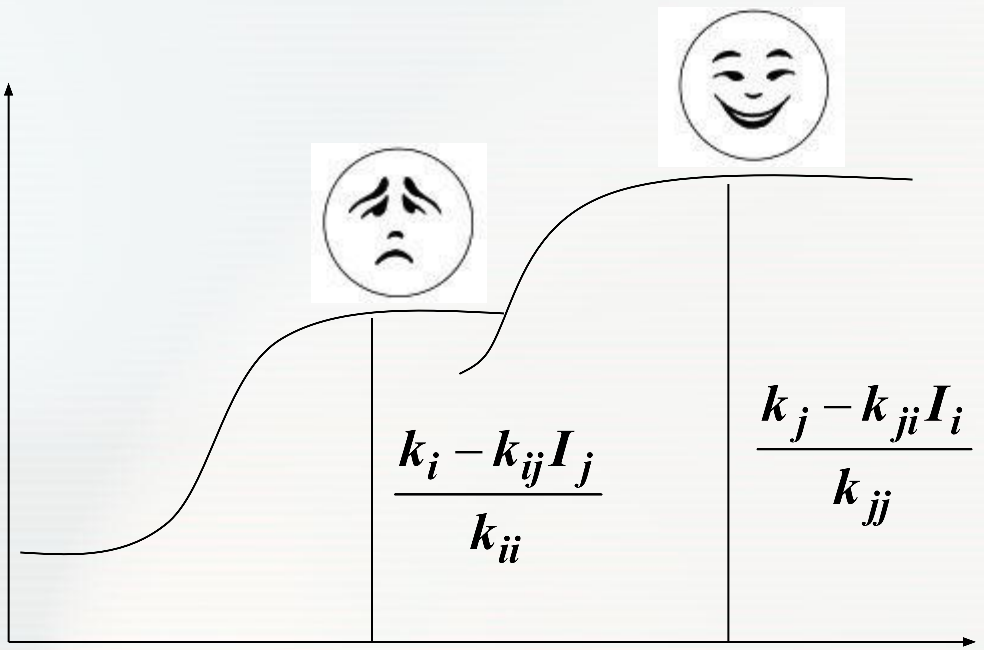


Рис.10. Условие вытеснения в конкурентной борьбе одной фирмы другой

- на рынке выживают фирмы, имеющие наибольший коэффициент выпуска, наименьший коэффициент потерь и сравнительно малое значение выпуска у конкурента;

- две фирмы могут успешно конкурировать на рынке;

- на рынке двух фирм процессы конкуренции регулярные. Хаос в конкуренции не образуется.

5. Хаос в конкуренции

При некоторых условиях количество товаров на рынке трех и более партнеров может быть непредсказуемым, т.е. хаотическим.

Три фирмы:

i – фирма $$\frac{dI_i}{dt} = I_i(k_i - k_{ii}I_i - k_{ij}I_j - k_{ik}I_k) \qquad (11)$$

j – фирма $$\frac{dI_j}{dt} = I_j(k_j - k_{jj}I_j - k_{ji}I_i - k_{jk}I_k) \qquad (12)$$

k – фирма $$\frac{dI_k}{dt} = I_k(k_k - k_{kk}I_k - k_{ki}I_i - k_{kj}I_j) \qquad (13)$$

Будем считать, что ограничения на выпуск сняты, т.е. $k_{ii} = k_{jj} = k_{kk} = 0$
Можно полагать, что существует линейная обратная связь

$$I_k = r - k_{ij} I_j \qquad (14)$$

где r – параметр, который находится из статистического анализа работы двух фирм.

Упрощающие предположения: $I_i = k_{kj} I_k$; $- k_k = b$; $k_i = k_{ij} I_i = - \sigma$

где b, σ – управляющие параметры.

В результате приходим к системе уравнений для трех переменных I_i, I_j, I_k и трех управляющих параметров σ, r, b.

$$\frac{dI_i}{dt} = -\sigma \cdot I_i + \sigma \cdot I_j \qquad (15)$$

$$\frac{dI_j}{dt} = -I_j + (r - I_k) I_i \qquad (16)$$

$$\frac{dI_k}{dt} = -bI_k + I_i I_j \qquad (17)$$

Эти уравнения описывают хаос в численности «выбрасываемых» и реализуемых на рынке товаров трех фирм. (уравнения Э. Лоренца).

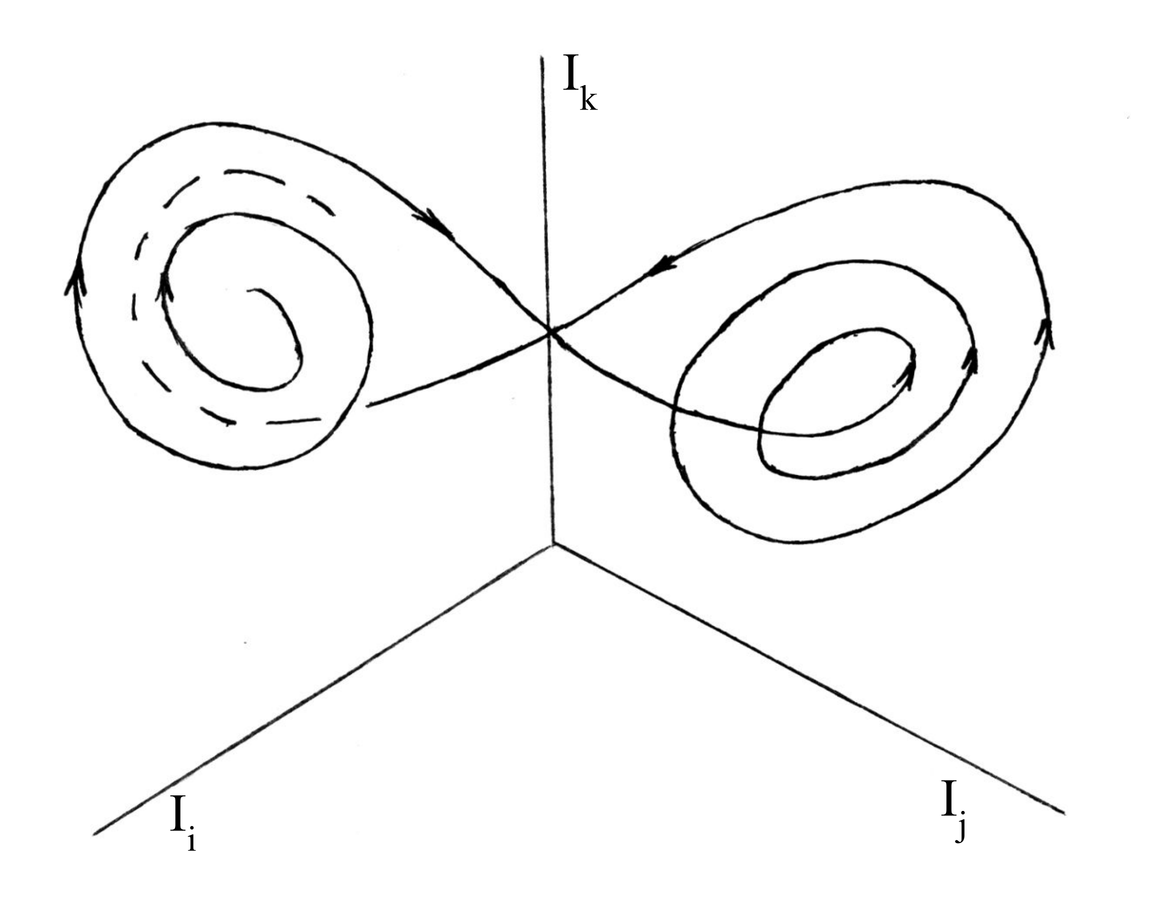


Рис.11. Хаотическая динамика на рынке товаров. Времена пребывания системы в окрестности каждого фокуса распределены случайным образом.

- Возникновение хаоса на детерминированном рынке товаров вызвана нелинейным взаимодействием между производством и сбытом продукции.

6. Хаос в динамике городов

Предполагается, что фирмы и население свободны в выборе местонахождения. Локальные характеристики городского пространства описываются тремя переменными:

X – продукция, производимая городской системой;

Y – численность городского населения;

Z – земельная рента.

Возможна динамика города:

$$\frac{dX}{dt} = a_1(a_2Y - a_3X) \qquad (18)$$

$$\frac{dY}{dt} = c_1(c_2X - c_3Y) - c_4XZ \qquad (19)$$

$$\frac{dZ}{dt} = d_1XY - d_2Z \qquad (20)$$

где a_1, c_1, d_1 – положительные параметры.

a_1 – коэффициент, скорость установления;

a_2 – спрос на городскую продукцию на душу населения;

a_3 – уровень предложения продукции внутри города;

a_2Y – общий спрос жителей на городскую продукцию;

a_3X – общий поток продукции на городской рынок;

c_2 – спрос на труд со стороны фирм;

c_2X – общий спрос на труд на рынке труда;

c_3Y – общее предложение труда на рынке труда;

$(c_2X - c_3Y)$ – избыток спроса на труд в городе;

c_4XZ – влияние на миграцию величины земельной ренты, люди выбирают место жительства с низкой ценой на землю;

d_1XY – положительное влияние X и Y на изменение земельной ренты.

После преобразования:

$$t = \frac{t^*}{c_1 c_3}; \qquad \sigma = \frac{a_1 a_3}{c_1 c_3}; \qquad r = \frac{a_2 c_2}{a_3 c_3}; \qquad b = \frac{d_2}{c_1 c_3};$$

$$x = \left(\frac{c_3}{d_1}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{d_1 X}{c_1 c_3}; \qquad y = \left(\frac{c_4}{d_1}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{d_1 a_2 Y}{a_3 c_1 c_3}; \qquad z = \frac{c_4 a_2 Z}{a_3 c_1 c_3};$$

Получаем систему уравнений Э. Лоренца:

$$\frac{dx}{dt} = -\sigma \cdot x + \sigma \cdot y \qquad (21)$$

$$\frac{dy}{dt} = -y + (r - z)x \qquad (22)$$

$$\frac{dz}{dt} = -b \cdot z + x \cdot y \qquad (23)$$

Уравнения описывают нелинейную динамику развития города.

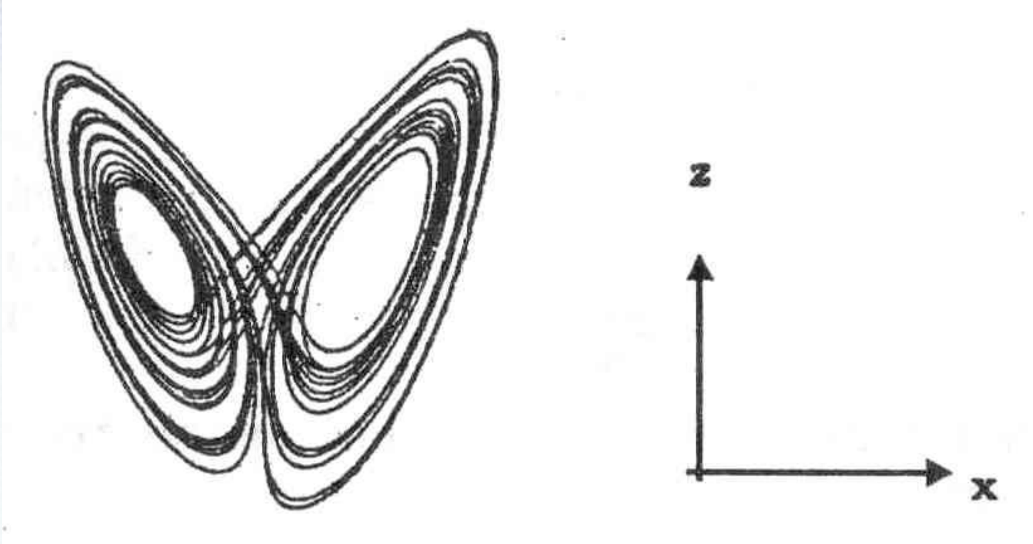


Рис.12. Хаотическая динамика города. Аттрактор построен при значениях σ =10; *b* = 8/3; *r* = 28.

Итак,
- траектория не приближается ни к какому стационарному состоянию;
- топология аттрактора не зависит от выбора начальных условий;
- предсказать поведение траектории на длительном временном отрезке невозможно;
- хаос в развитии города вызван нелинейным взаимодействием между городским производством и миграцией населения.

7. Хаос в ценообразовании

Когда цена на товар установлена государством ниже стационарного значения, то это приведет к появлению еще одной обобщенной силы. X_T – характеристики теневой экономики.

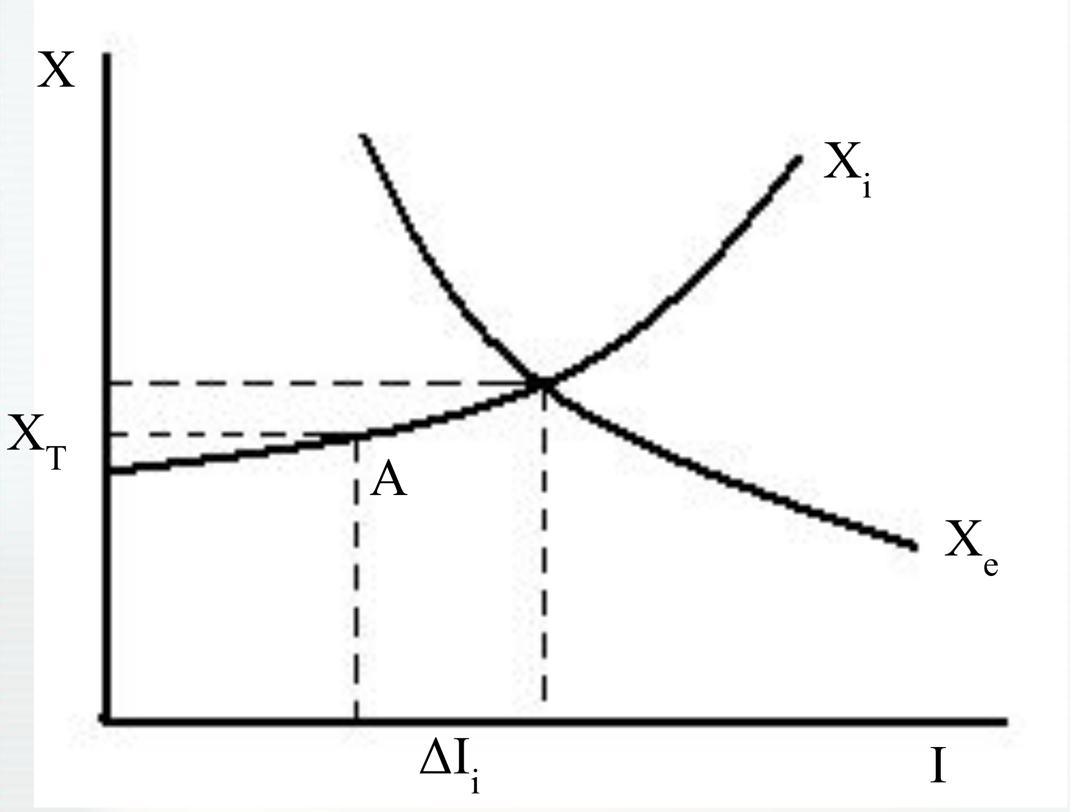


Рис.13. В точке А – цена установлена государством. ΔI_i - неучтенная продукция. X_T – доход от продажи единицы продукции ΔI_i

Динамика ценообразования на рынке:

$$\frac{dX_e}{dt} = -\sigma \cdot X_e + \sigma \cdot X \qquad (24)$$

$$\frac{dX_i}{dt} = -X_i + (r - X_T)X_e \qquad (25)$$

$$\frac{dX_T}{dt} = -b \cdot X_T + X_e \cdot X_i \qquad (26)$$

В уравнении (25) учтено, что если $r = L_{ei} X_i$, то $X_T = 0$

$$X_T = r - L_{ei} X_i \qquad (27)$$

На фазовой плоскости X_e, X_i, X_t система описывает нерегулярные процессы ценообразования.

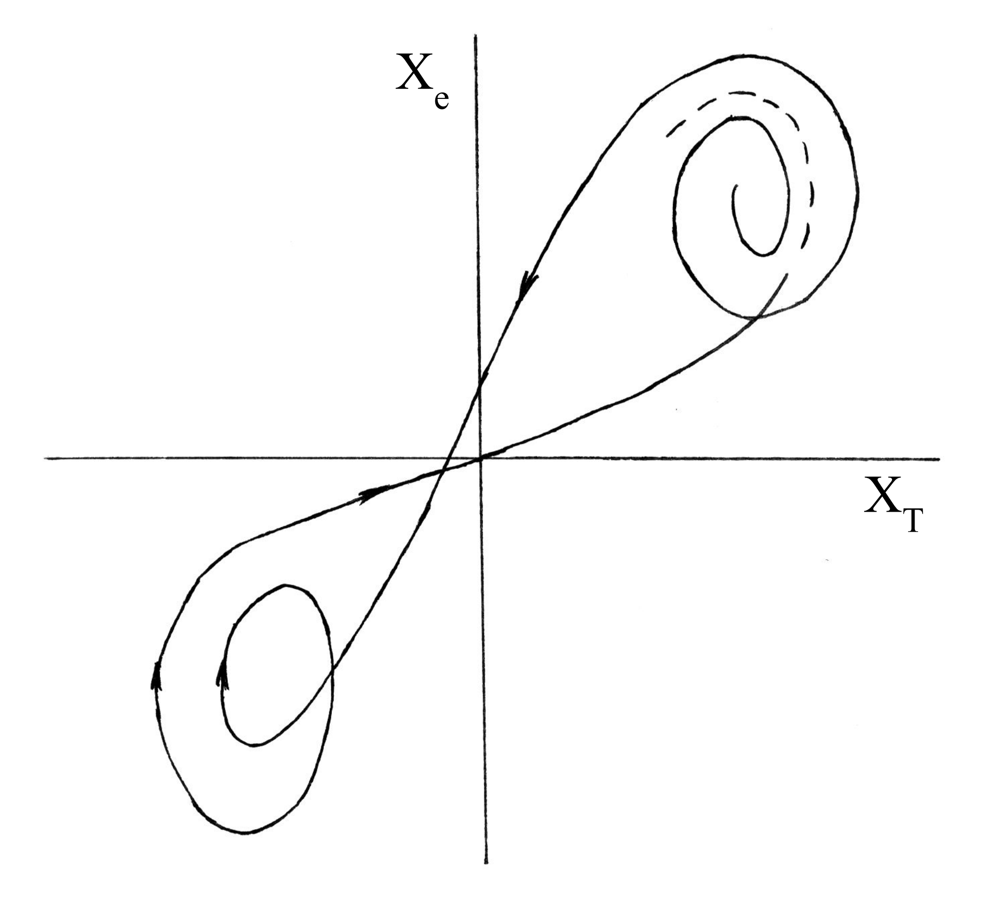
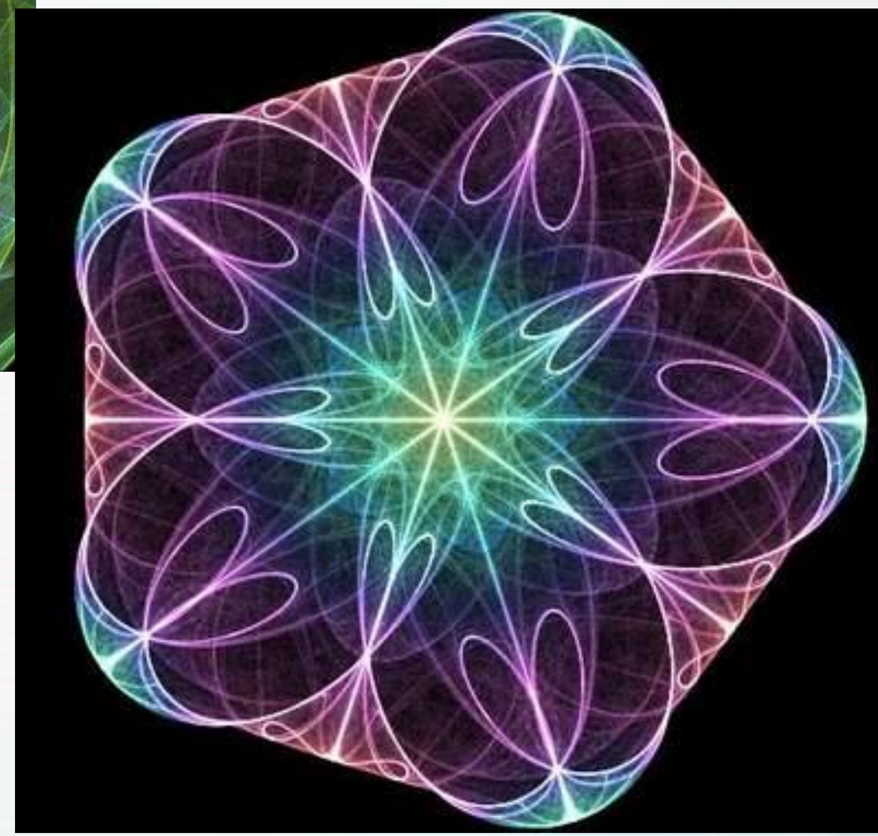


Рис.14. Хаотические изменения цены спроса X_e на товар при наличии фиксированной цены на этот товар.

- Повышение размерности системы до трех делает ценообразование непредсказуемым.
- Хаотическое состояние в ценообразовании затрудняет предсказание стабильности рынка.


Итак, даже простые детерминированные системы могут развиваться непредсказуемо.

Спасибо за внимание!