МИРЭА – Российский технологический университет
Институт Радиотехнических и телекоммуникационных систем
Презентация по вопросам к лабораторной работе №1

ИССЛЕДОВАНИЕ ОСНОВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

студенты группы ВССО-01-17
Битюцких А. С.
Борисов М.Д.
Бортников П.Я.
Докукина А.О.
Индришенок. А. О

Москва 2020

1. Понятие и основные характеристики случайных процессов.

Каждое возможное проявление случайного процесса является детерминированной функцией времени и называется его реализацией. Случайный процесс рассматривается как совокупность (ансамбль) своих реализаций. Какая именно из реализаций будет задействована в каждом конкретном опыте с участием случайного процесса неизвестно. Значение случайного процесса, зафиксированное в некоторый момент времени называется выборкой (отсчётом, сечением) случайного процесса. Основными характеристиками случайного процесса являются N - мерные ФРВ и ПРВ, которые представляют собой совместные ФРВ (функция распределения вероятности) и ПРВ (плотность …) его сечений в N моментов времени $t_0, \ldots, t_{N-1}$льше N, тем более подробно характеризуется случайный процесс.

1. Многомерные распределения и их свойства.

N - мерной плотностью распределения вероятности случайного процесса называется

$$w_\xi(x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}; t_0, t_1, \ldots, t_{N-1}) = \frac{P(\cap_{i=0}^{N-1} x_i < \xi(t_i) < x_i + \delta x_i)}{\delta x_0 \delta x_1 \ldots \delta x_{N-1}}$$

N – мерная плотность вероятности случайного процесса является совместной плотностью вероятности его выборок в различные моменты времени и в общем случае зависит от того, в какие моменты времени рассматривается процесс.

Плотность вероятности обладает следующими свойствами:

1. Положительности
2. Нормировки
3. Симметрии
4. Согласованности
5. Вероятность того, что выборки случайного процесса принимают значения, заключённые в интервалах $\{[a_i, b_i]\}_{i=0}^{N-1}$ равна $P(\cap_{i=0}^{N-1} a_i < \xi(t_i) < b_i = \int_{x_0=a_0}^{b_0} \ldots \int_{x_{N-1}=a_{N-1}}^{b_{N-1}} w_\xi(x_0 \ldots x_{N-1}) dx_0 \ldots dx_{N-1};$
6. Если выборки процесса независимы, то многомерная ПРВ определяется одномерными.

2. Моментные характеристики случайного процесса.

Математическое ожидание, дисперсия и среднеквадратическое отклонение случайного процесса.

2. Математическое ожидание, его свойства.

Математическим ожиданием (МО) случайного процесса $\xi(t)$ называется детерминированная функция $m_\xi(t) = M\{\xi(t)\} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x w_\xi(x;t)\,dx,$

Основные свойства математического ожидания случайного процесса:

1. Математическое ожидание детерминированного сигнала $M\{s(t)\} = s(t)$

2. Математическое ожидание линейно, то есть математическое ожидание линейной комбинации случайных процессов $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ коэффициентами k_1 и k_2 равно линейной комбинации математических ожиданий этих процессов. $M\{k_1\xi_1(t) + k_2\xi_2(t)\} = k_1 M\{\xi_1(t)\} + k_2 M\{\xi_2(t)\}.$

3. Если случайные процессы $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ независимы, то $M\{\xi_1(t)\xi_2(t)\} = M\{\xi_1(t)\}M\{\xi_2(t)\}.$

4. Математическое ожидание функции случайных процессов

$$M\{f(\xi(t_0)\dots\xi(t_{N-1}))\} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dots\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x_0\dots x_{N-1}) w_\xi(x_0\dots x_{N-1};t_0\dots t_{N-1})\,dx_0\dots dx_{N-1}.$$

В одномерном случае $M\{f(\xi(t))\} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) w_\xi(x;t)\,dx.$

Одномерный центральный момент 2-го порядка называется дисперсией случайного процесса $$\sigma_\xi^2(t) = D_\xi(t) = D\{\xi(t)\} = \eta_\xi^{(2)}(t) = M\{\xi^2(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - m_\xi(t)\right)^2 w_\xi(x;t)dx.$$

Функция $\sigma_\xi(t) = \sqrt{D_\xi(t)}$ называется среднеквадратическим отклонением (СКО) случайного процесса.

2. Дисперсия, его свойства.

Основные свойства дисперсии:

1. Дисперсия детерминированного сигнала равна нулю.
2. При умножении случайного процесса на число дисперсия умножается на квадрат этого числа.
3. При сложении независимых случайных процессов ξ(t) и η(t) их дисперсии складываются.
4. Дисперсия, математическое ожидание и квадрат математического ожидания связаны между собой: $\sigma_\xi^2(t) = m_\xi^{(2)}(t) - m_\xi^2(t)$.

3. Корреляционные характеристики случайных процессов.

1)Взаимная корреляционная функция, суть функции чем больше взаимная корреляционная функция, тем больше случайные процессы похожи друг на друга в моменты времени t_1 и t_2.

$$R_{\xi\eta}(t_1,t_2) = M\{\overset{\circ}{\xi}(t_1)\overset{\circ}{\eta}(t_2)\} = \mu_{\xi\eta}^{(1,1)}(t_1,t_2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(x - m_\xi(t_1)\right)\left(y - m_\eta(t_2)\right) w_{\xi\eta}(x,y;t_1,t_2)\,dxdy\,.$$

2) Неравенство Коши-Буняковского, имеет смысл только тогда, когда случайные процессы линейно-зависимы в моменты времени t_1 и t_2.

$$\left|R_{\xi\eta}(t_1,t_2)\right| \le \sigma_\xi(t_1)\sigma_\eta(t_2)\,.$$

3) Автокорреляционная функция, в частном случае, когда рассматриваются значения одного и того же случайного процесса в различные моменты времени

$$R_\xi(t_1,t_2) = M\{\overset{\circ}{\xi}(t_1)\overset{\circ}{\xi}(t_2)\} = \mu_\xi^{(1,1)}(t_1,t_2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(x_1 - m_\xi(t_1)\right)\left(x_2 - m_\xi(t_2)\right) w_\xi(x_1,x_2;t_1,t_2)\,dx_1dx_2\,.$$

4. Характеристическая функция случайного процесса.

N -мерной характеристической функцией (ХФ) случайного процесса $\xi(t)$ называется

$$\theta_\xi(u_0, \dots, u_{N-1}; t_0, \dots, t_{N-1}) =$$

$$= M\{\exp[-j(u_0\xi(t_0) + u_1\xi(t_1) + \dots + u_{N-1}\xi(t_{N-1}))]\} = F_{x0}F_{x1} \dots f_{x_{N-1}}\{w_\xi(x_0 \dots x_{N-1}; t_0 \dots t_{N-1}); u_0 \dots u_{N-1}\}.$$

Характеристическая функция случайного процесса является совместной характеристической функцией системы его сечений, взятых в N моментов времени и связана с плотностью вероятности процесса многомерным преобразованием Фурье.

4. Характеристическая функция случайного процесса.

Основные свойства характеристической функции.

1. В виду условия нормировки:

$$\theta_{\xi(0,\dots,0)} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} w_{\xi}(x_0, \dots, x_{N-1}) dx_0 dx_1 \dots dx_{N-1} = 1$$

2. Абсолютное значение характеристической функции не превосходит единицы.

3. Свойство симметрии.

4. Свойство согласованности.

5. В случае, когда выборки случайного процесса в моменты времени $t_0, \dots, t_{N-1}$независимы N -мерная характеристическая функция может быть получена как произведение одномерных.

6. В одномерном случае, если существуют все начальные моменты плотности вероятности, то характеристическая функция является аналитической на всей комплексной плоскости, а моменты плотности вероятности выражаются через производные характеристической функции в нуле.

5. Стационарные случайные процессы.

Случайный процесс $\xi(t)$ называется стационарным в узком смысле (строго стационарным), если его плотность вероятности $w_\xi(x_0,\ldots,x_{N-1};t_0,\ldots,t_{N-1})$ произвольной размерности N не изменяется при любом сдвиге Δt всей группы точек $t_0,\ldots,t_{N-1}$ вдоль оси времени, то есть:

$$w_\xi(x_0,\ldots,x_{N-1};t_0,\ldots,t_{N-1}) = w_\xi(x_0,\ldots,x_{N-1};t_0-\Delta t,\ldots,t_{N-1}-\Delta t)$$

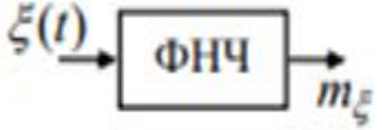
5. Эргодические случайные процессы.

Строго стационарный случайный процесс называется эргодическим, если его реализации метрически транзитивны. Метрическая транзитивность означает, что одна реализация содержит сведения о всех свойствах случайного процесса

6. Методы экспериментального исследования характеристик эргодических случайных процессов.

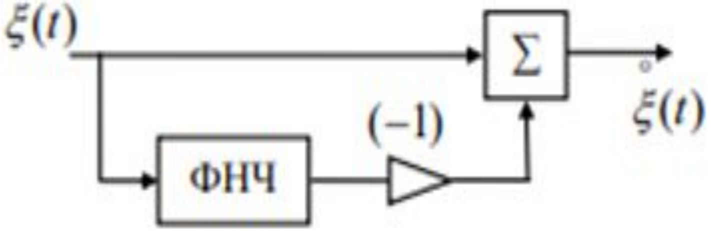
При цифровой обработке можно сохранять длинные фрагменты реализации и находить математическое ожидание численным интегрированием с последующим делением на время наблюдения.

1. Схема получения математического ожидания случайного процесса



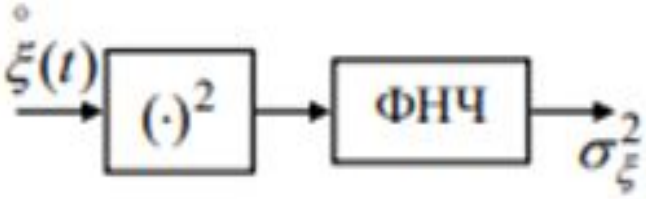
Полоса пропускания ФНЧ $\Delta\omega'$ должна быть гораздо меньше ширины спектра случайного процесса $\Delta\omega: \Delta\omega' \ll \Delta\omega$

2. Схема формирования центрированного случайного процесса



3. Измерение дисперсии эргодического случайного процесса основано на процедуре

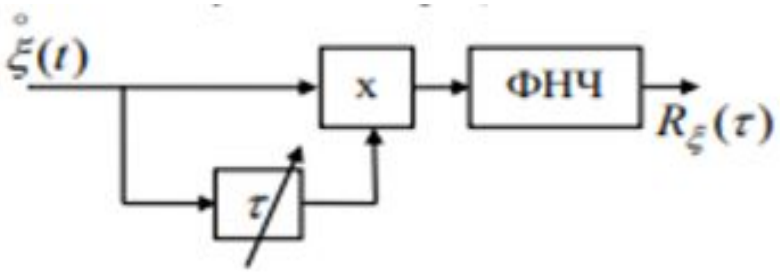
$$\sigma_\xi^2 = M\left\{\left(\overset{\circ}{\xi}(t)\right)^2\right\} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \left(\overset{\circ}{\xi}(t)\right)^2 dt$$



6. Методы экспериментального исследования характеристик эргодических случайных процессов.

4. Измерение корреляционной функции эргодического случайного процесса основано на процедуре

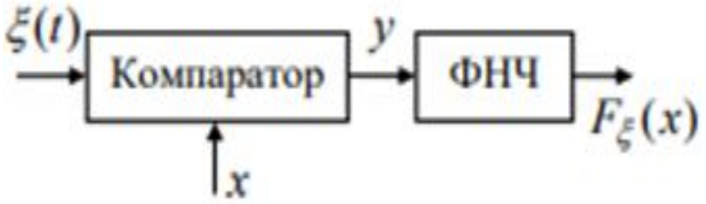
$$R_{\xi(\tau)} = M\{\xi(t)\xi(t-\tau)\} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \xi(t)\xi(t-\tau)dt$$



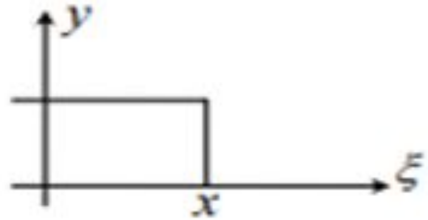
5. Одномерная функция распределения вероятностей измеряется согласно

$$F_\xi(x) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \sigma\left(x' - \xi(t)\right)dt$$

Структурная схема

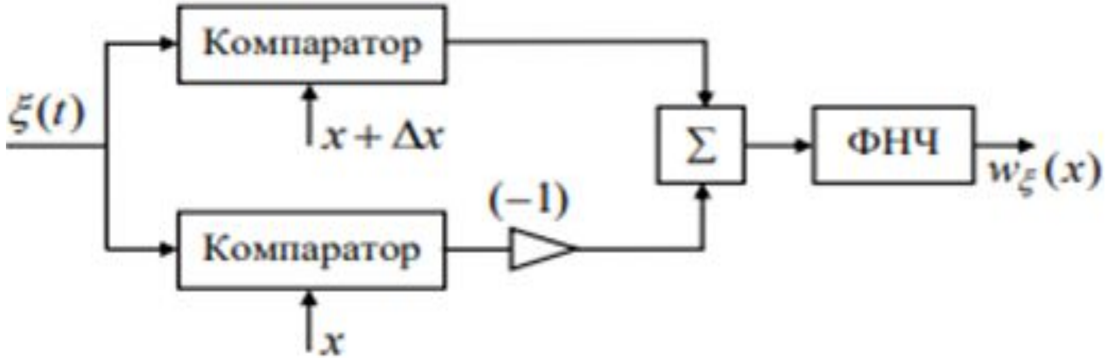


Характеристика компаратора



6. Одномерная плотность вероятности исследуется с использованием связи

$$w_\xi(x) \approx \frac{F_\xi(x+\Delta x) - F_\xi(x)}{\Delta x}$$



7. Гауссов (нормальный) процесс.

Гауссовским (нормальным) называется случайный процесс, имеющий N - мерную плотность вероятности вида:

$$w_\xi(x_0, \dots, x_{N-1}; t_0, \dots, t_{N-1}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N |R|}} \exp\left(-\frac{1}{2} X^T R^{-1} X\right)$$

X - это столбец переменных плотности вероятности, M - столбец математических ожиданий в моменты времени $t_0, \dots, t_{N-1}$, R называется корреляционной матрицей, |R| - её определитель.

7. Центральная предельная теорема.

Большинство встречающихся на практике случайных процессов (собственные шумы радиотехнических устройств, атмосферные и космические шумы) являются нормальными. Это связано с тем, что они представляют собой суммарный эффект большого числа сравнимых элементарных воздействий.

Согласно центральной предельной теореме, плотность вероятности суммы стационарных случайных процессов одинаковой дисперсии неограниченно приближается к гауссовской при увеличении числа слагаемых.

8. Основные характеристики гармонического сигнала со случайной начальной фазой.

Гармонический сигнал со случайной начальной фазой $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$

A – амплитуда – известна, т.е. детерминирована

ω_0 – частота детерминирована

ϕ – случайная начальная фаза, принимающая любое значение на интервале [0, 2π].

$$P_{\varphi}(\varphi) = \frac{1}{2\pi}; 0 \le 2\pi$$