# Лекция №10

**Лектор: доц. Лаптева Надежда Александровна**

## Тема: Собственные значения и собственные векторы матрицы

**Пусть $A$ - матрица, $x$ - вектор, $\lambda$ - число.**

**Рассмотрим уравнение**

$$Ax = \lambda x.$$

**$\lambda$ называется собственным значением, $x$ - собственным вектором.**

**Такое преобразование изменяет длину вектора в $\lambda$ раз.**

**Например, если $\lambda = 2$, то $Ax = 2x$, т.е. длина вектора $x$ увеличивается в 2 раза.**

**Если же $\lambda = \frac{1}{2}$, то длина вектора $x$ уменьшается в 2 раза.**

**Рассмотрим** $A(2\times 2)$.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

**Запишем матричное уравнение в координатной форме.**

$$Ax = \lambda x$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = \lambda x_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = \lambda x_2. \end{cases}$$

**Преобразуем**

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 = 0. \end{cases}$$

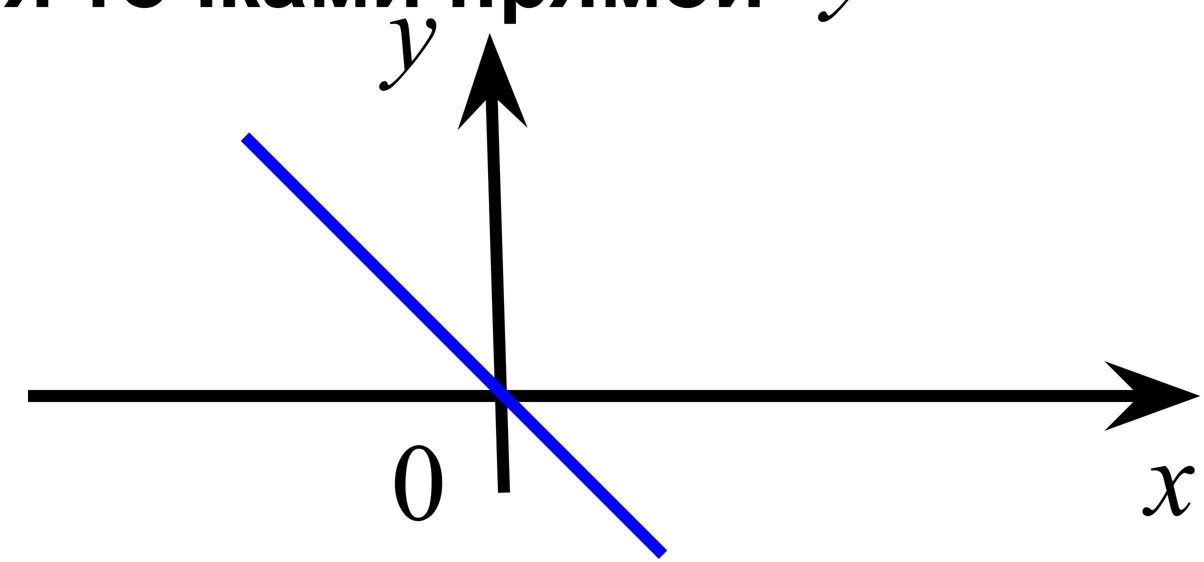
**Получилась система линейных однородных уравнений. Такая система всегда имеет нулевое решение. Нас интересует случай, когда система имеет ненулевое решение.**

**Теорема.** **Система линейных уравнений имеет ненулевое решение, если её определитель равен нулю.**

**Пример.**

$$\begin{cases} x + y = 0, \\ 2x + 2y = 0. \end{cases} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

**Система имеет бесконечное множество решений. Все решения являются точками прямой** $y = -x.$



**Вернемся к нашей системе. Составим определитель системы**

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$ **или**

$$\left(a_{11}-\lambda\right)\left(a_{22}-\lambda\right)-a_{12}\cdot a_{21}=0.$$

**Получилось квадратное уравнение. Такое уравнение называется характеристическим. Корни уравнения – это собственные значения матрицы** $A$.

## Примеры.

**1. Найти собственные значения матрицы**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

**Запишем матрицу**

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ -1 & 5-\lambda \end{pmatrix}.$$

$$|A-\lambda E|=0; \quad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ -1 & 5-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

$$(1-\lambda)(5-\lambda)+3=0$$ **или**

$$\lambda^2-6\lambda+8=0.$$

**Находим корни характеристического уравнения** $\lambda_1=2; \lambda_2=4.$

**Мы нашли собственные значения.**

**<u>Ответ:</u>** $\lambda_1=2; \lambda_2=4.$

# Нахождение собственных векторов

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}. \quad \lambda_1=2;\lambda_2=4.$$

**1. Найдем собственный вектор, соответствующий собственному значению** $\lambda_1=2.$

**Рассмотрим уравнение** $Ax=\lambda x$ **и вместо** $\lambda$ **подставим** $\lambda=2.$

**Тогда получим** $Ax = 2x$ **или**

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 \\ -x_1 + 5x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 2x_1, \\ -x_1 + 5x_2 = 2x_2. \end{cases}$$

**Отсюда**

$$\begin{cases} x_1 = 3x_2, \\ x_1 = 3x_2. \end{cases}$$

**Положим** $x_2 = 1,$ **тогда** $x_1 = 3.$

**Получилось** $x = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$

**Можно считать, что мы нашли собственный вектор. Но обычно этот вектор нормируют, т.е. приводят его к вектору единичной длины. Для этого найдем длину вектора**

$$|x| = \sqrt{3^2 + 1} = \sqrt{10}$$

**и каждую координату разделим на** $\sqrt{10}.$

**Получим**

$$e_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{\sqrt{10}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}.$$

$e_1$ **- собственный вектор, соответствующий собственному значению** $\lambda_1 = 2.$

**Аналогично найдем $e_2$, т.е. собственный вектор, соответствующий**

$$\lambda_2 = 4.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_1 \\ 4x_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 4x_1, \\ -x_1 + 5x_2 = 4x_2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_2 = 3x_1, \\ x_2 = x_1. \end{cases}$$

**Пусть** $x_1 = 1,$ **тогда** $x_2 = 1.$

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Нормируем, т.е. разделим на** $|x| = \sqrt{2}.$

**Получим**

$$e_2 = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

**Ответ:**

$\lambda_1 = 2$ **соответствует** $e_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{\sqrt{10}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}.$

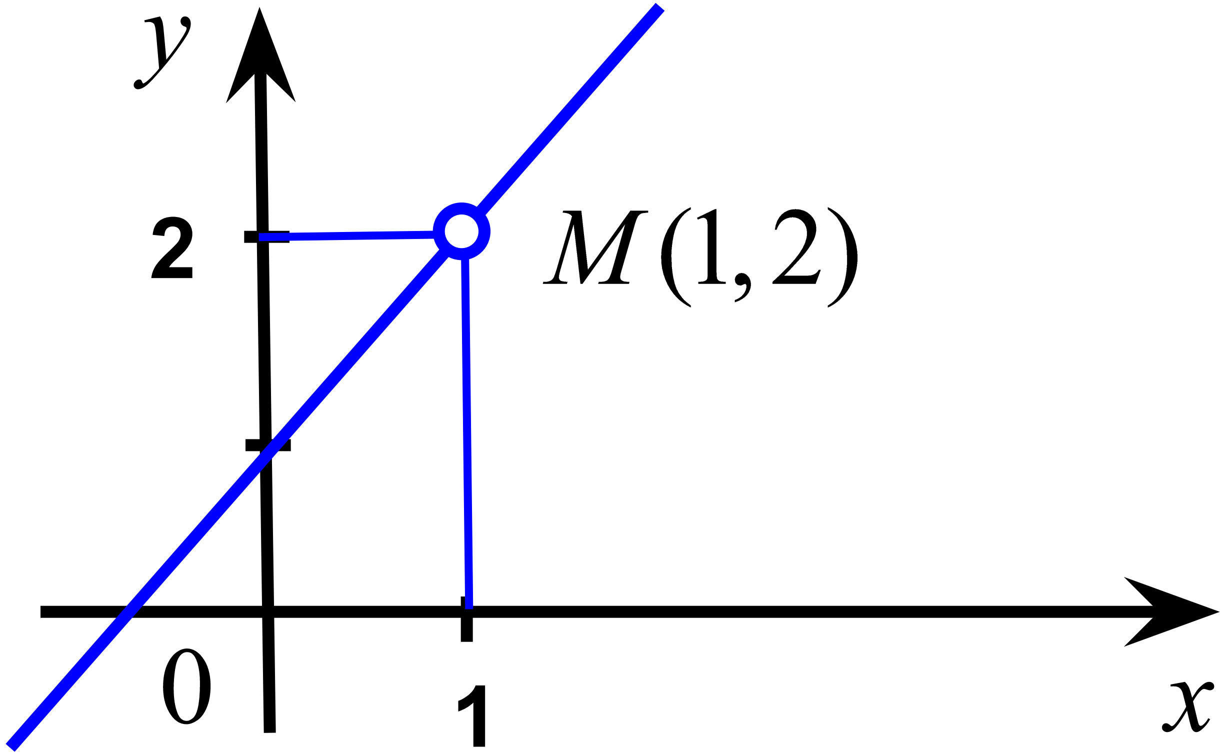
$\lambda_2 = 4$ **соответствует** $e_2 = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$

# Функция. Предел функции в точке. Односторонние пределы. Пределы на бесконечности. Непрерывность функции. Точки разрыва функции и их классификация.

# <u>1. Предел в точке.</u>

**Рассмотрим пример.**
**Построить график функции**

$$y = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \begin{cases} x + 1, & x \neq 1, \\ \text{не сущ.}, & x = 1. \end{cases}$$




**Формула теряет смысл при** $x_0 = 1.$

**В этом случае пишут:**

$$y(x) \to 2 \quad \text{при} \quad x \to 1.$$

**По-другому:**

$$\lim_{x \to 1} y(x) = 2.$$

# Способы вычисления предела

**1. Предел дроби при $x \to \infty$:**
**деление на старшую степень.**

**<u>Пример.</u>**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1-2x^2}{2+x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}-2}{\frac{2}{x^2}+1}=-2.$$

$$\frac{1}{x^2}\to 0, \quad \frac{2}{x^2}\to 0$$

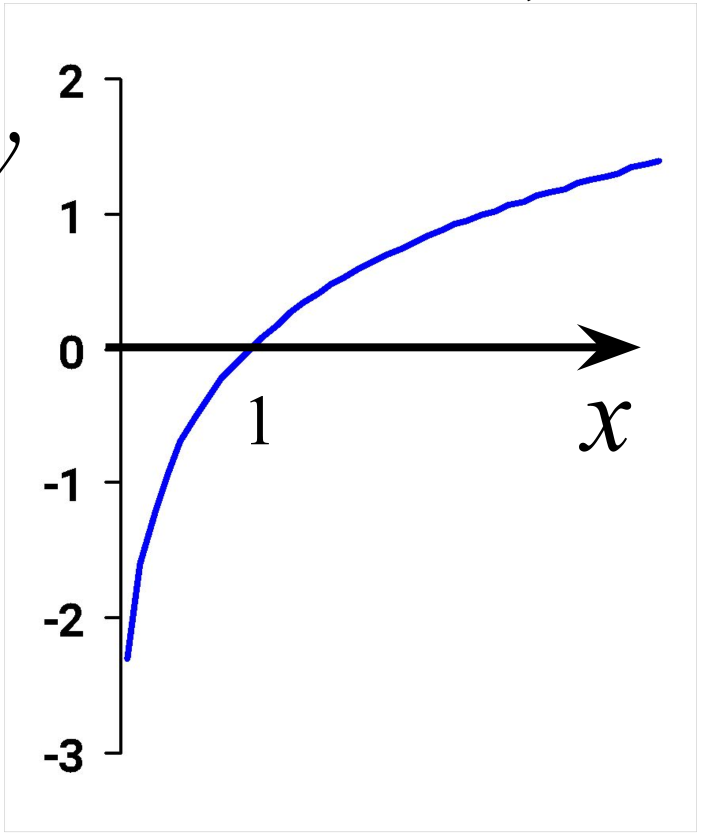
**2. Разложение на множители, когда $x \not\to \infty$**

<u>**Пример.**</u>

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2.$$

# Односторонние пределы

**Во многих случаях функция определена только с одной стороны от $x_0$. Тогда предел называют пределом слева, или пределом справа.**

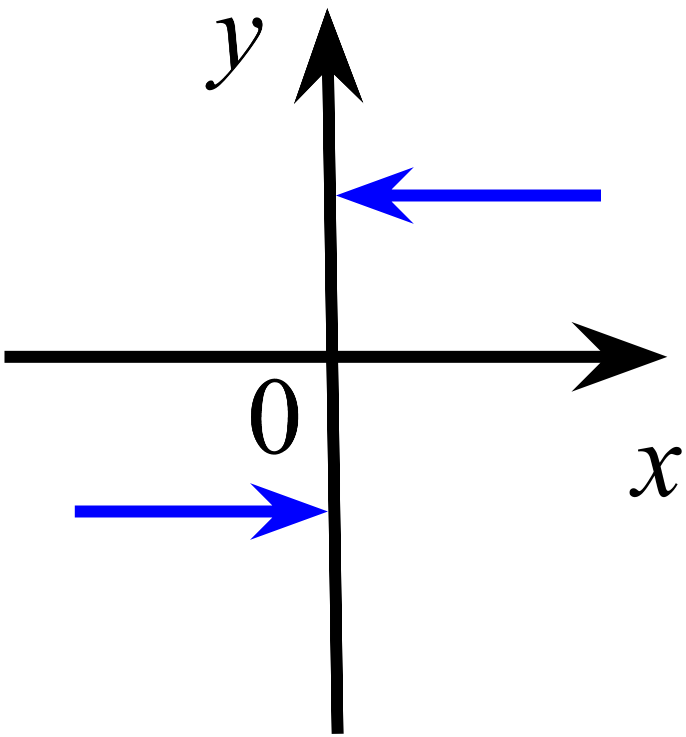



**<u>Пример 1.</u>**

$$\lim_{x \to 0+} \ln x = -\infty.$$

**Пример 2.**

$$y(x)=\operatorname{sign}x=\frac{|x|}{x}=\begin{cases}1, & x>0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$




$$\lim_{x\to 0+}\operatorname{sign}x=1$$

$$\lim_{x\to 0-}\operatorname{sign}x=-1$$

**<u>Опр.</u>** **Функция** $y = y(x)$ **называется** **непрерывной** **в точке** $x_0$, **если**

$$\lim_{x \to x_0} y(x) = y(x_0).$$

**Все элементарные функции непрерывны на своей области определения.**

**<u>Пример.</u>** $y = x^2, \quad y = e^x, \quad y = \sin x$

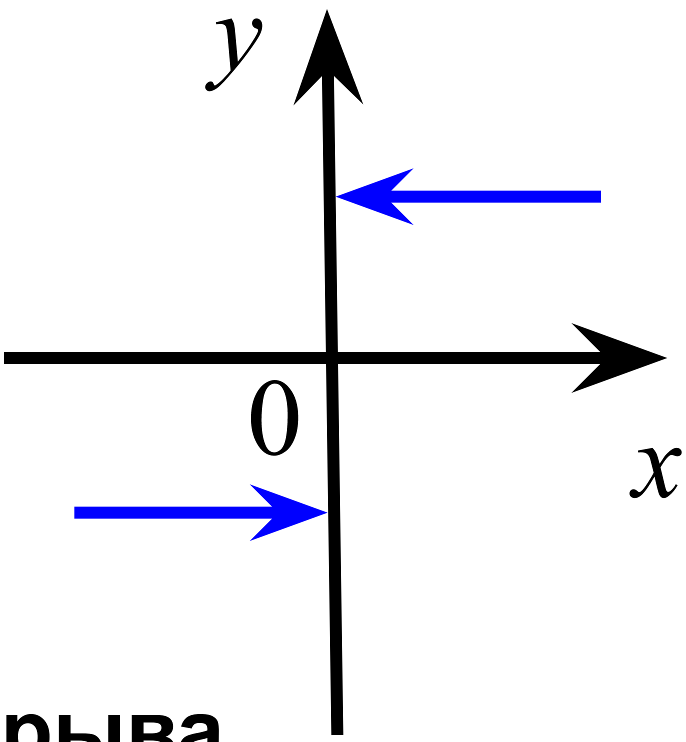
**- непрерывные функции.**

**<u>Опр.</u> Если в точке $x_0$ функция не является непрерывной, то $x_0$ - точка разрыва.**

**Рассматриваются точки разрыва 1-го и 2-ого рода.**

**Пример.**

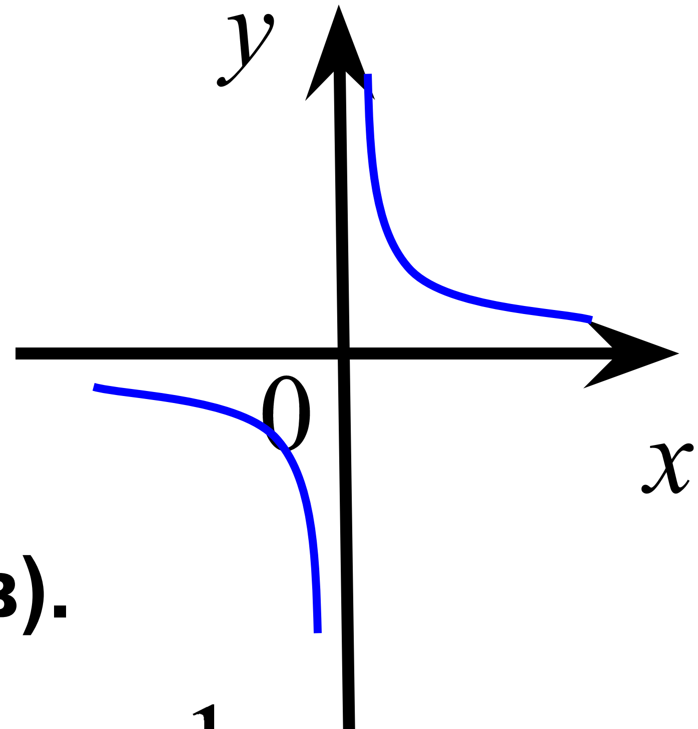
$$y(x) = \operatorname{sign} x.$$




$x_0 = 0$ - точка разрыва 1-го рода (конечный разрыв).

**Пример.**

$$y(x) = \frac{1}{x}.$$




$x_0 = 0$ - **точка разрыва 2-ого рода (бесконечный разрыв).**

$$\lim_{x \to 0+} \frac{1}{x} = +\infty; \qquad \lim_{x \to 0-} \frac{1}{x} = -\infty.$$