

Методи та засоби цифрової обробки
інформації.

Частина 2 -
Системи цифрової обробки інформації
(ЦОІ)
Лекція 1

Вступ до цифрової обробки
інформації. Сигнали та їх
перетворення при цифровій
обробці

1. Основні поняття та визначення
2. Узагальнена структура системи цифрової обробки інформації
3. Математичні моделі дискретних сигналів

Зміст дисципліни на весняний семестр

Модуль 1

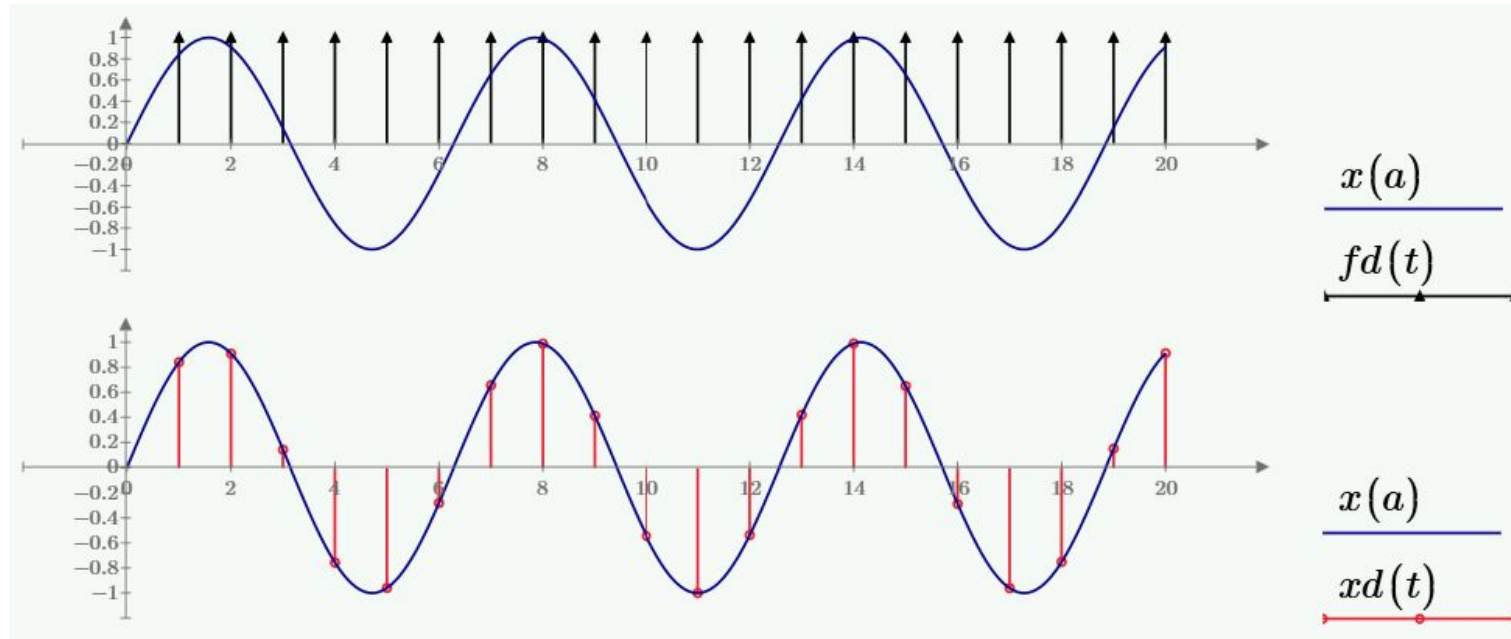
- Змістовий модуль 1. Дискретні та цифрові сигнали і системи
 - Тема 1. Вступ до цифрової обробки інформації. Сигнали та їх перетворення при цифровій обробці
 - Тема 2. Дискретизація та квантування сигналу
- Змістовий модуль 2. Математичний опис систем цифрової обробки інформації
 - Тема 3. Математичний опис лінійних дискретних систем в часовій області

Модуль 2

- Змістовий модуль 3. Цифрові фільтри
 - Тема 5. Види та способи реалізації цифрових фільтрів
 - Тема 6. Синтез цифрових фільтрів за заданою частотною характеристикою
- Змістовий модуль 4. Методи цифрової фільтрації та спектрально-кореляційного аналізу сигналів на основі дискретного перетворення Фур'є
 - Тема 7. Алгоритм цифрової фільтрації сигналів на основі дискретного перетворення Фур'є

1. Основні поняття та визначення

- *Цифровий сигнал* - будь-яка пронумерована послідовність чисел (цифрових кодів), наприклад, 3, 7, 11, 9, ..., N, в тому числі значень оцифрованого аналогового сигналу, що є функцією деякого рівновіддаленого дискретного аргумента (наприклад, порядкового номера, відстані або за замовчуванням – часу)



1. Основні поняття та визначення

- **Методи цифрової обробки сигналів** - математичні співвідношення або алгоритми, відповідно до яких виконуються обчислювальні операції над цифровими сигналами
 - Цифрова фільтрація
 - Спектрально-кореляційний аналіз
 - Модуляція і демодуляція сигналів
 - Адаптивна обробка сигналів

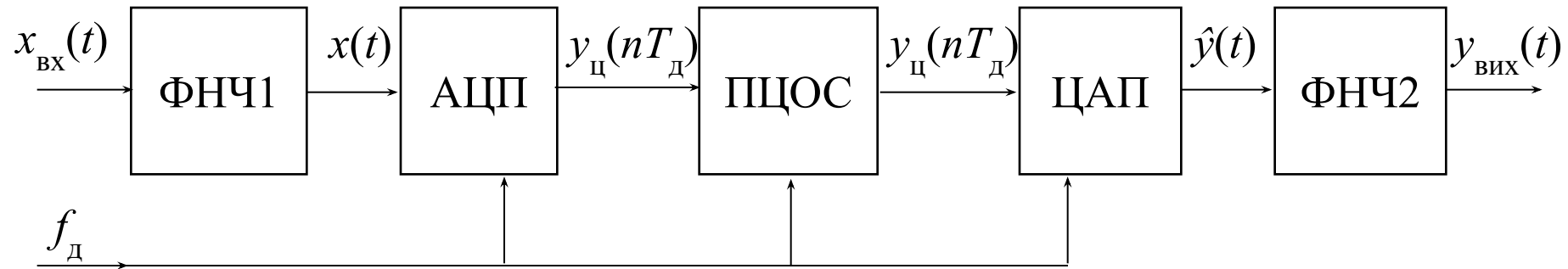
1. Основні поняття та визначення

- **Засоби реалізації цифрової обробки сигналів**
 - Жорстка (апаратна) логіка
 - Програмо-вані логічні матриці (ПЛМ)
 - Універсальні мікропроцесори
 - Цифрові сигнальні процесори (DSP)
 - Мікро-контролери
 - Персональні комп'ютери

1. Основні поняття та визначення



2. Узагальнена структура системи цифрової обробки інформації



$$y_{\text{ц}}(nT_{\text{д}}) = \Phi[x_{\text{ц}}(nT_{\text{д}})]$$

ФНЧ1 – фільтр нижніх частот 1

АЦП – аналогово-цифровий перетворювач

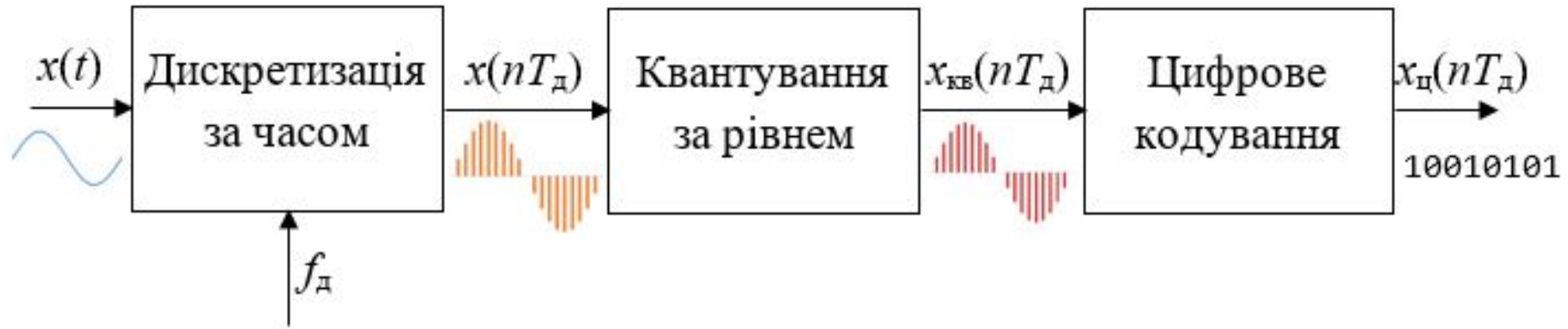
ПЦОС – пристрій цифрової обробки сигналу

ЦАП – цифро-аналоговий перетворювач

ФНЧ2 – фільтр нижніх частот 2

$f_{\text{д}}$ – частота дискретизації сигналу

2. Узагальнена структура системи цифрової обробки інформації



n – номер відліку

$T_d = 1/f_d$ – період дискретизації сигналу

f_d – частота дискретизації сигналу

3. Математичні моделі дискретних сигналів

- Під *дискретними* розуміють сигнали або функції, що існують при дискретних та, як правило, рівновіддалених, значеннях свого аргументу.
- Миттєві значення дискретного сигналу називають його *відліками*, або *вибірками*.

3. Математичні моделі дискретних сигналів

- **Теорема відліків**
Віттакера - Найквіста - Котельникова - Шеннона
- якщо безперервний сигнал $x(t)$ має спектр, обмежений частотою F_{max} , то він може бути однозначно і без втрат відновлений за своїми дискретними відліками, узятими з частотою

$$f_d = 2F_{max},$$

- або, іншими словами, за відліками, узятими з періодом

$$T_d = \frac{1}{2F_{max}}$$

3. Математичні моделі дискретних сигналів

Математично дискретний сигнал визначають:

- функцією дискретного часу nT_d , яка відповідає вибіркам аналогового сигналу в дискретні рівновіддалені моменти часу:

$$x(nT_d) = x(t) \Big|_{t=nT_d}, n = 0, 1, 2, \dots;$$

- функцією номера вибірки n , в загальному випадку не пов'язаного з часом:

$$x(n) = x(nT_d) \Big|_{T_d=1};$$

3. Математичні моделі дискретних сигналів

Математично дискретний сигнал визначають:

- функцією безперервного часу t :

$$x_d(t) = x(t)f_\delta(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_d) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_d)\delta(t - nT_d)$$

яка може бути отримана як добуток аналогового сигналу $x(t)$ та дискретизуючої функції

$$f_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_d)$$

3. Математичні моделі дискретних сигналів

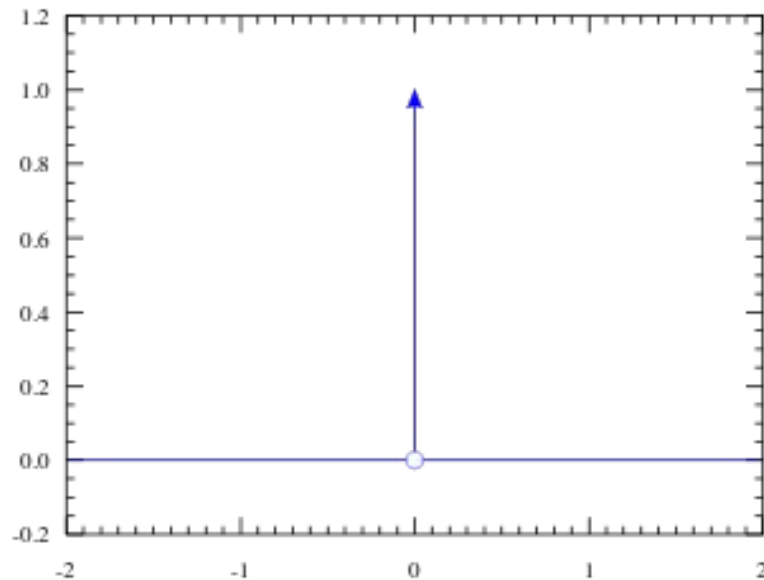
де $\delta(t - nT_d) = \begin{cases} \infty, & t = nT_d \\ 0, & t \neq nT_d \end{cases}$ – δ -імпульс нескінченної амплітуди, нульової тривалості та одиничної площини

$$\forall n = 0, 1, 2, \dots \quad \int_{t=nT_d-T_d/2}^{t=nT_d+T_d/2} \delta(t - nT_d) dt = 1,$$

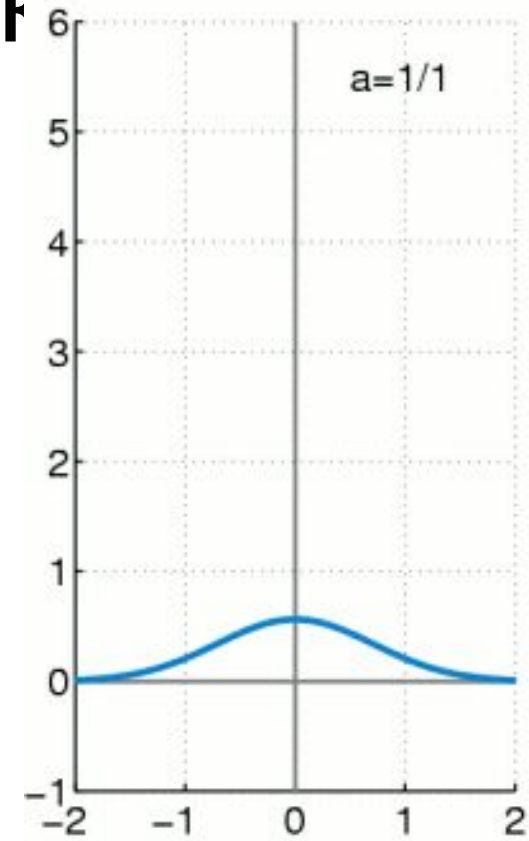
3. Математичні моделі дискретних сигналів

Функція Дірака

$$(\delta; f) = \int_{\mathbb{R}^n} \delta(t - a) f(t) dt = f(a)$$



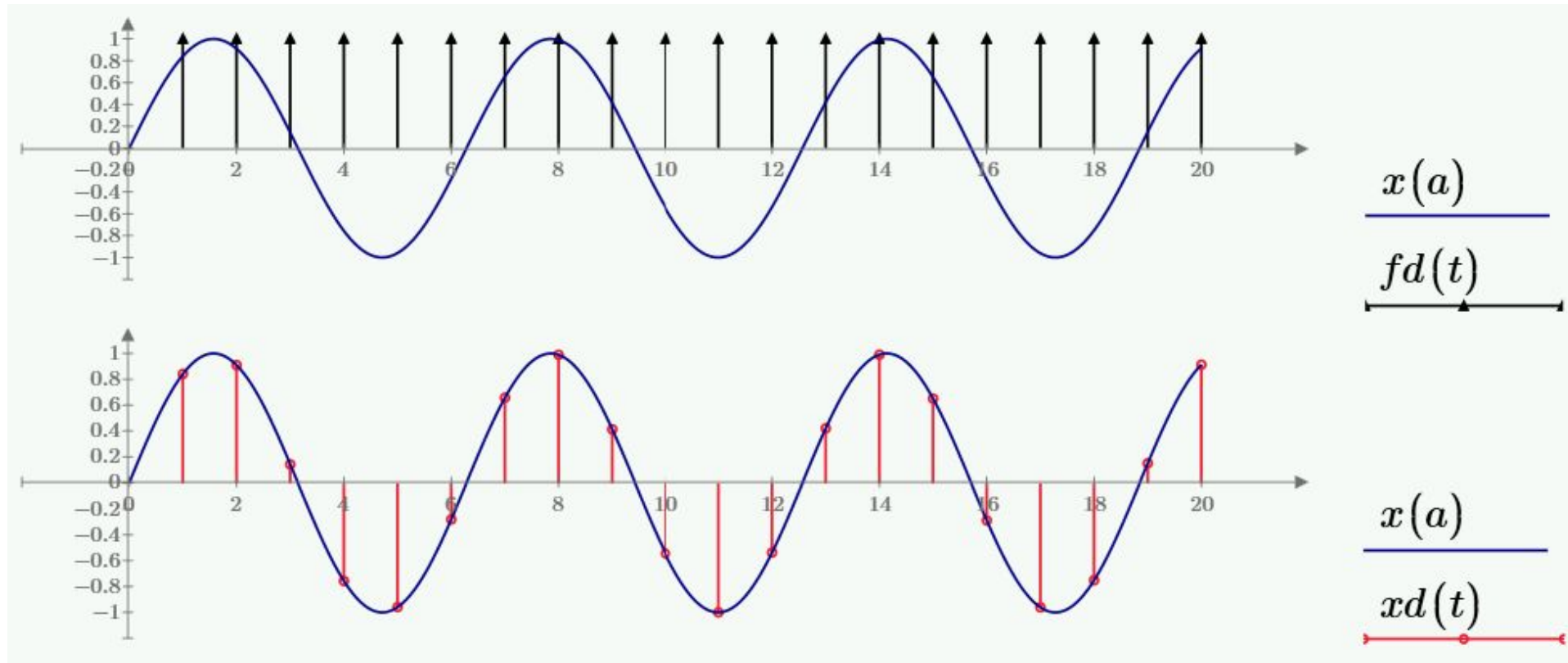
$$\int_{t=-\infty}^{t=+\infty} \delta(t) dt = 1$$



Дельта функція Дірака як границя (в сенсі границі за розподілом) послідовності гаусівських функцій розподілу

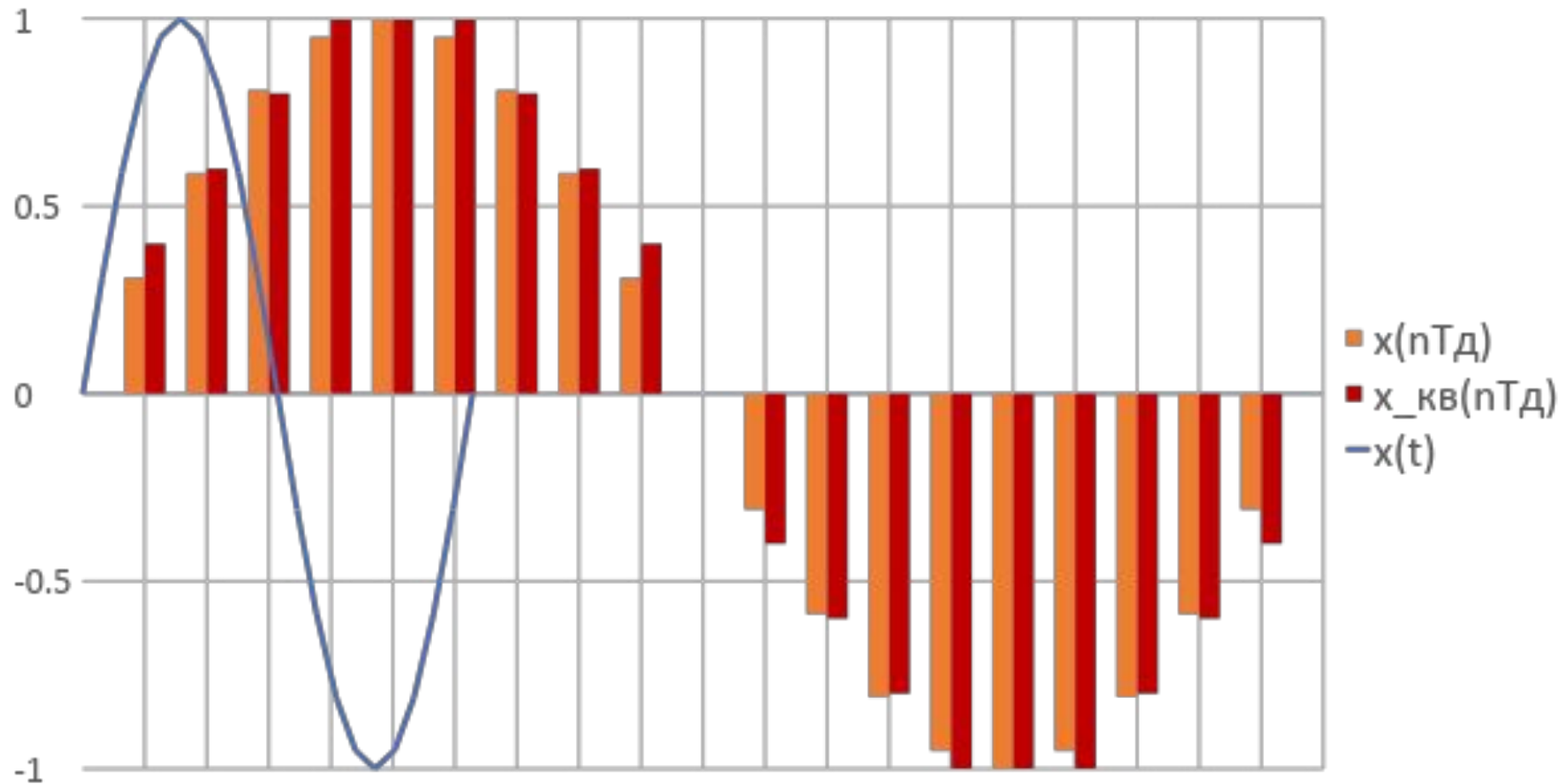
$$\delta_a(t) = \frac{1}{a\sqrt{\pi}} e^{-t^2/a^2} \text{ при } a \rightarrow 0$$

3. Математичні моделі дискретних сигналів



Графіки безперервного сигналу $x(t)$, дискретизуючої функції $fd(t)$ та квантованого сигналу $xd(t)$

3. Математичні моделі дискретних сигналів



Графіки безперервного $x(t)$, дискретного $x(nT_d)$ та квантованого $x_{kv}(nT_d)$ сигналів

3. Математичні моделі дискретних сигналів

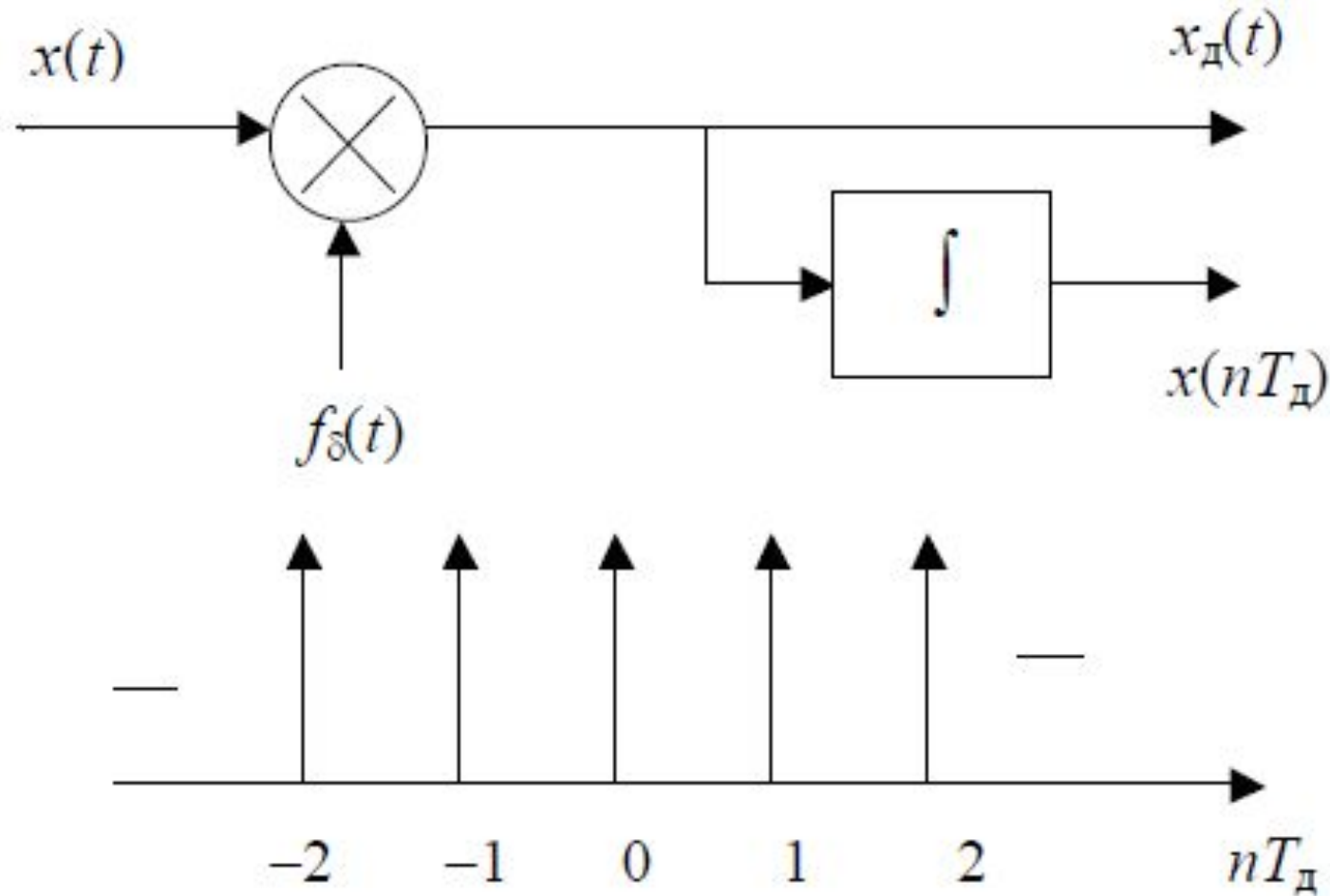
- Сигнали $x_d(t)$ та $x(nT_d)$ пов'язані лінійним співвідношенням

$$x(nT_d) = \int_{(n-0,5)T_d}^{(n+0,5)T_d} x_d(t) dt$$

- та мають однакові властивості (але різні розмірності). Тому всі вищенаведені визначення дискретного сигналу є математично адекватними:

$$x(nT_d) \cong x(n) \cong x_d(t).$$

3. Математичні моделі дискретних сигналів



Еквівалентна схема дискретизації сигналу за часом

Системи цифрової обробки інформації

Лекція 2. Дискретизація та квантування сигналу

1. Спектр дискретного сигналу
2. Квантування сигналів за рівнем
3. Цифрове кодування сигналу

1. Спектр дискретного сигналу

- *Спектральну щільність* або спектральну функцію дискретного сигналу, яку для спрощення ще називають *спектром*, можна знайти, дискретизувавши за часом перетворення Фур'є відповідного йому аналогового сигналу

$$X_a(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt.$$

- Замінивши t на nT_d , інтеграл $\int_{-\infty}^{\infty}$ на суму та dt на T_d , отримаємо

$$X'_d(j\omega) = T_d \sum_{-\infty}^{\infty} x(nT_d)e^{-j\omega nT_d}.$$

- Цей вираз має розмірність спектральної щільності (сигнал/частота).

1. Спектр дискретного сигналу

- Спектр може бути знайдений і прямим перетворенням Фур'є дискретного сигналу, поданого функцією безперервного часу:

$$X_{\text{д}}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - nT_{\text{д}})e^{-j\omega t} dt.$$

- Використовуючи фільтруючі властивості δ -функції

$$\int s(t)\delta(t - t_0) dt = s(t_0),$$

- отримаємо

$$X_{\text{д}}(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_{\text{д}})e^{-j\omega nT_{\text{д}}}.$$

1. Спектр дискретного сигналу

- Дискретний сигнал можна обчислити за його спектром в основній смузі частот за допомогою зворотного перетворення Фур'є:

$$x(nT_d) = \frac{T_d}{2\pi} \int_{-\omega_d/2}^{\omega_d/2} X_d(j\omega) e^{j\omega nT_d} d\omega$$

- Цей вираз отримується шляхом дискретизації за часом безперервного зворотного перетворення Фур'є аналогового сигналу

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_a(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

- шляхом заміни t на nT_d та використання замість спектральної щільності аналогового сигналу $X_a(j\omega)$ відповідної за розмірністю спектральної щільності дискретного сигналу $T_d X_d(j\omega)$ у смузі частот $\pm \omega_d/2$.

1. Спектр дискретного сигналу

- Зв'язок між спектрами дискретного й аналогового сигналів знаходиться на підставі визначення дискретного сигналу

$$x_{\text{д}}(t) = x(t)f_{\delta}(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_{\text{д}}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_{\text{д}})\delta(t - nT_{\text{д}})$$

- у якому дискретизуюча функція $f_{\delta}(t)$ подається або замінюється апроксимуючим її рядом Фур'є $f_{\delta}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_{\text{д}}t}$:

$$x_{\text{д}}(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_{\text{д}}t}.$$

Коефіцієнти ряду

$$C_k = \frac{1}{T_{\text{д}}} \int_{nT_{\text{д}} - T_{\text{д}}/2}^{nT_{\text{д}} + T_{\text{д}}/2} \delta(t - nT_{\text{д}}) e^{-jk\omega_{\text{д}}t} dt = \frac{1}{T_{\text{д}}} e^{-jk\omega_{\text{д}}nT_{\text{д}}} = \frac{1}{T_{\text{д}}}.$$

- відповідають рівномірному дискретному (або лінійчатому) спектру цієї періодичної функції.

1. Спектр дискретного сигналу

- Перетворення Фур'є сигналу при $C_k = 1/T_d$ призводить до такого виразу спектра дискретного сигналу через спектр відповідного аналогового сигналу:

$$X_d(j\omega) = \frac{1}{T_d} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{jk\omega_d t} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{T_d} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a[j(\omega - k\omega_d)]$$

- Для спектра дискретного сигналу цей зв'язок має вигляд

$$X'_d(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a[j(\omega - k\omega_d)]$$

- З цього випливає, що *спектр дискретного сигналу з точністю до постійного множника дорівнює сумі спектрів аналогового сигналу $X_a(j\omega)$, зсунутих за частотою на $k\omega_d$.*
- Перенос спектра $X_a(j\omega)$ на частоти $k\omega_d$ викликаний множенням аналогового сигналу на множину комплексних гармонійних сигналів $e^{jk\omega_d t}$, які є гармоніками дискретизуючої функції $f_\delta(t)$.

1. Спектр дискретного сигналу

- При дискретизації аналогового сигналу з фінітним спектром, обмеженим максимальною частотою ω_m , яка відповідає умові $\omega_m \leq \omega_d/2$, спектр дискретного сигналу $X_d(j\omega)$ в основній смузі частот $\pm\omega_d/2$ (при $|\omega| \leq \omega_d/2$) точно співпадає (до постійного множника T_d) із спектром аналогового сигналу:

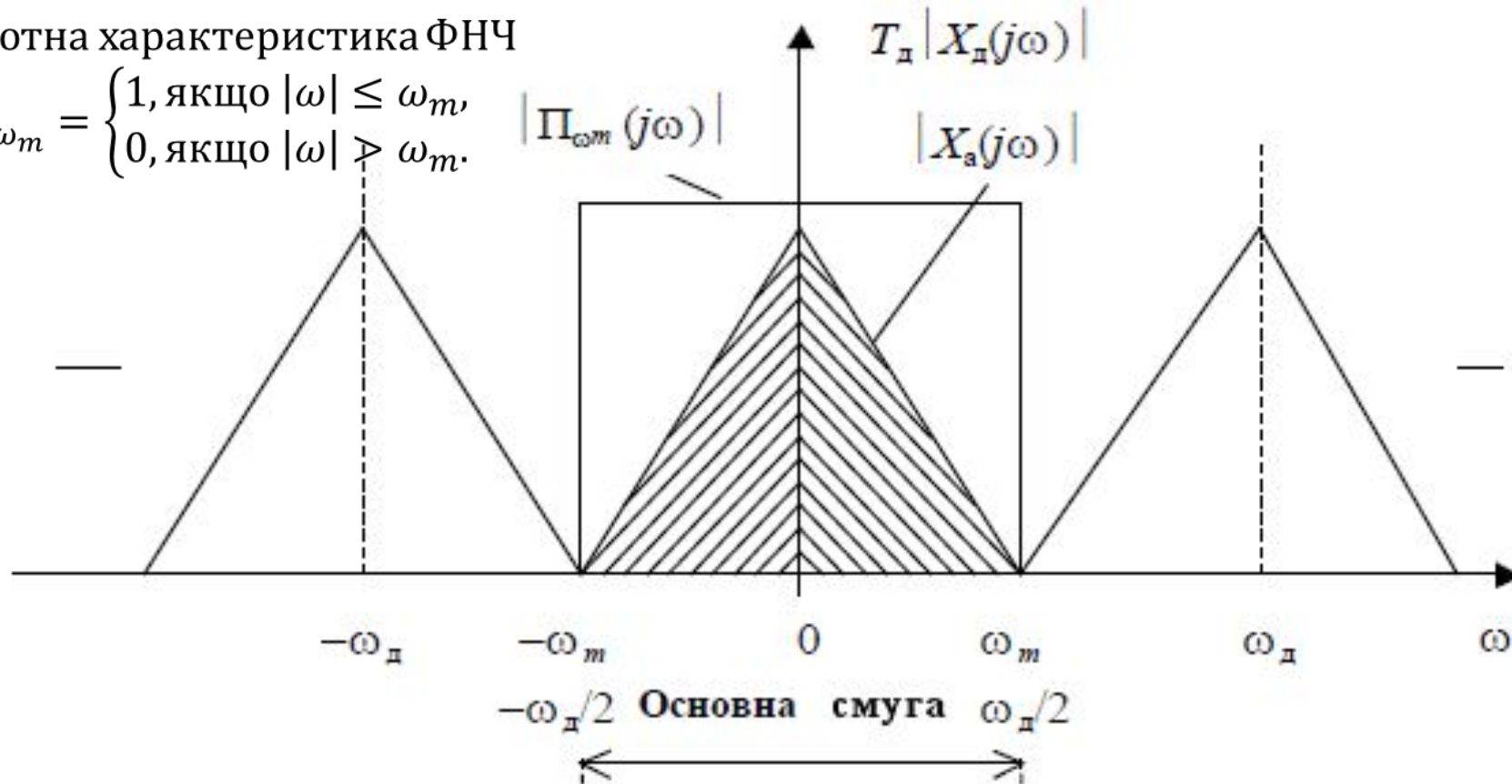
$$T_d X_d(j\omega) = X_a(j\omega)$$

- Умова $\omega_m \leq \omega_d/2$ (або $\omega_d \geq 2\omega_m$) відповідає **теоремі відліків Котельникова**.

1. Спектр дискретного сигналу

Частотна характеристика ФНЧ

$$P_{\omega_m} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } |\omega| \leq \omega_m, \\ 0, & \text{якщо } |\omega| > \omega_m. \end{cases}$$



Спектральні перетворення при дискретизації аналогового сигналу з фінітним спектром при $\omega_d \geq 2\omega_m$, ω_d - період повтору сигналу по частоті

1. Спектр дискретного сигналу

- Сигнал на виході ФНЧ відповідає зворотному перетворенню Фур'є деперіодизованого спектра дискретного сигналу $\Pi_{\omega_m}(j\omega)T_d X_d(j\omega)$, що має розмірність спектральної щільності:

$$x(t) = \frac{T_d}{2\pi} \int_{-\omega_m}^{\omega_m} \Pi_{\omega_m}(j\omega) X_d(j\omega) e^{j\omega t} dt$$

- Підставивши вираз для $X_d(j\omega)$ і замінивши ω_m на $\omega_d/2$, маємо

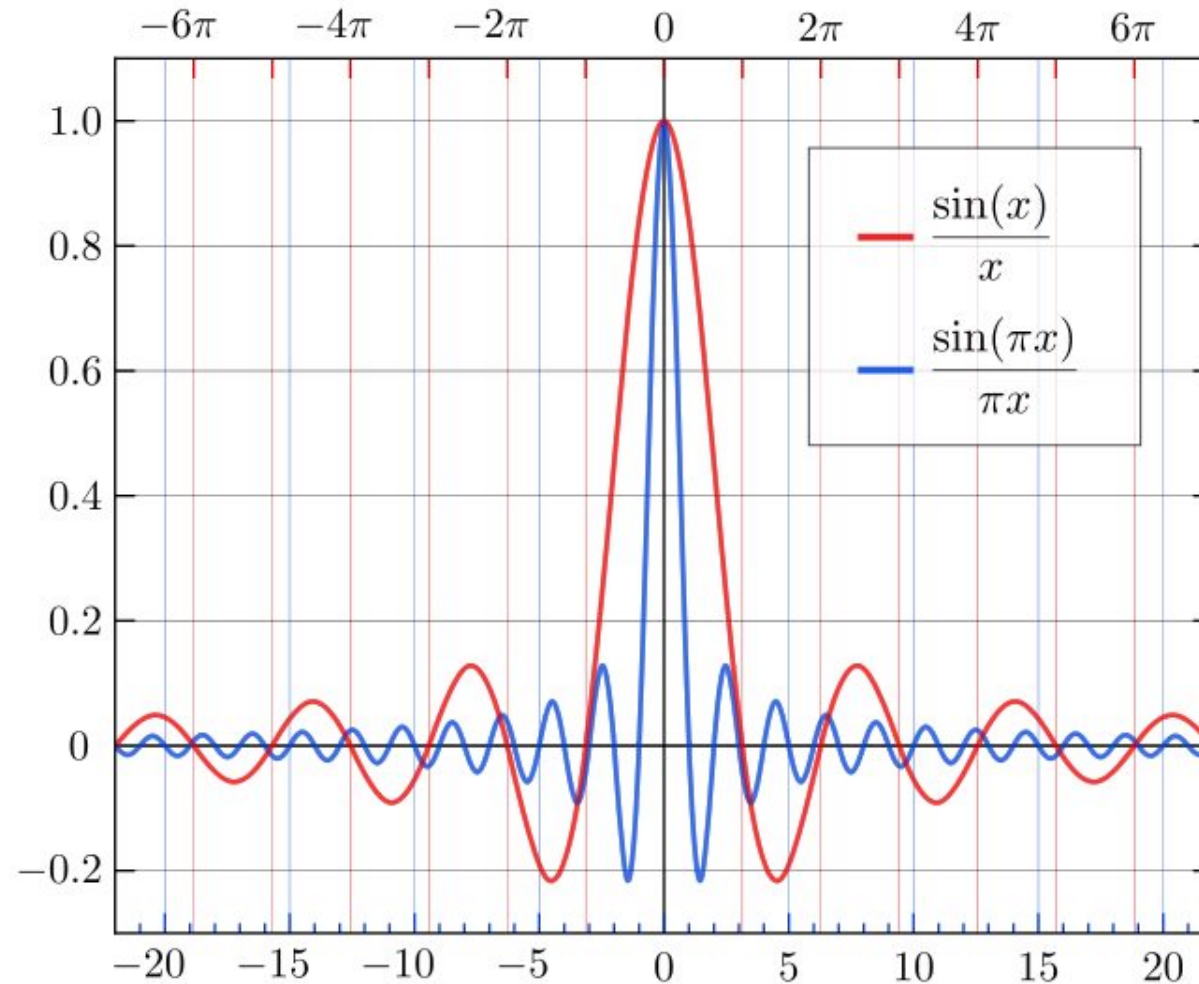
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_d) \frac{\sin[\omega_m(t - nT_d)]}{\omega_m(t - nT_d)}$$

- Цей вираз є розкладанням аналогового сигналу $x(t)$ в ряд по базисних інтерполюючих функціях

$$\frac{\sin x}{x} = \text{sinc } x \text{ — кардинальний синус}$$

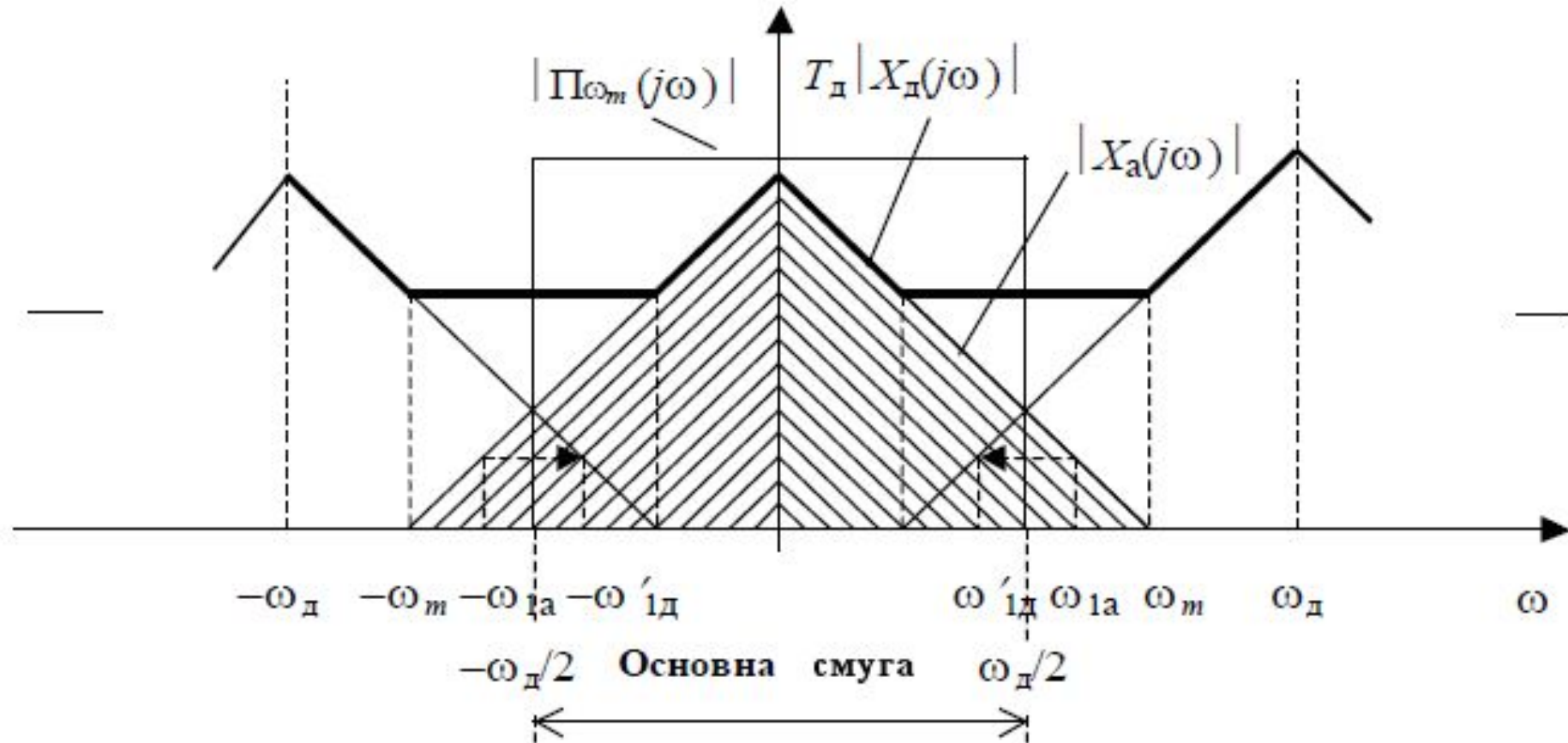
- з ваговими коефіцієнтами $x(nT_d)$ (ряд Котельникова). Відповідно до нього математично здійснюється відновлення аналогового сигналу за його дискретними вибірками.

1. Спектр дискретного сигнала



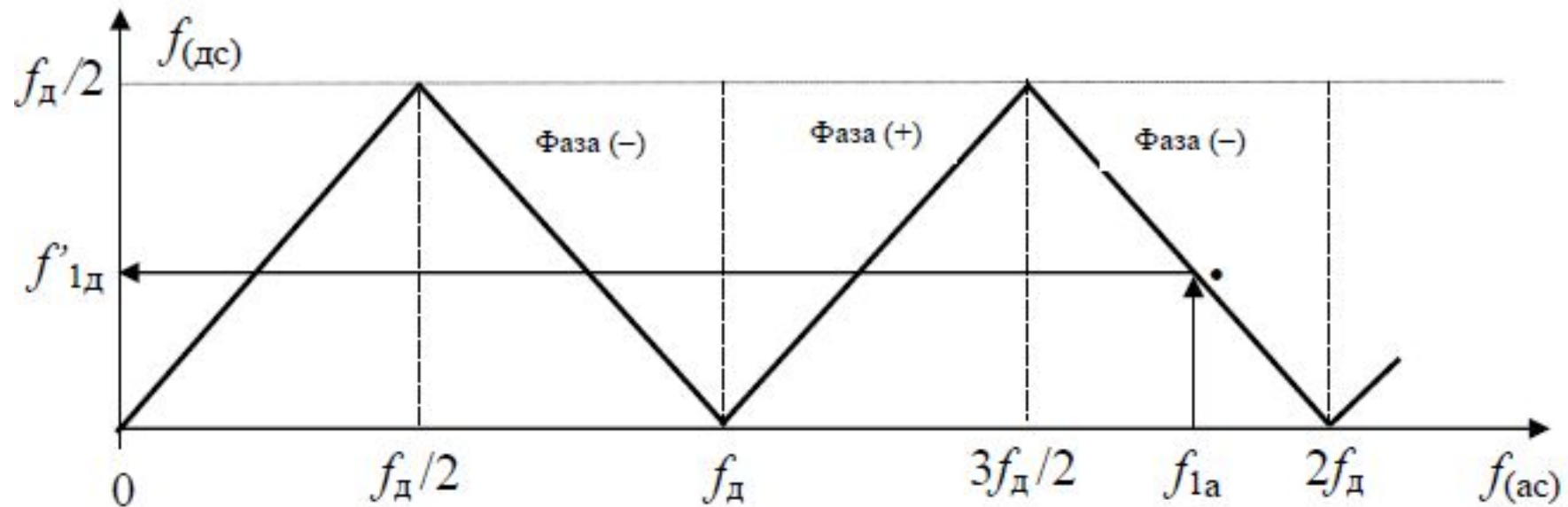
Кардинальный синус

1. Спектр дискретного сигналу



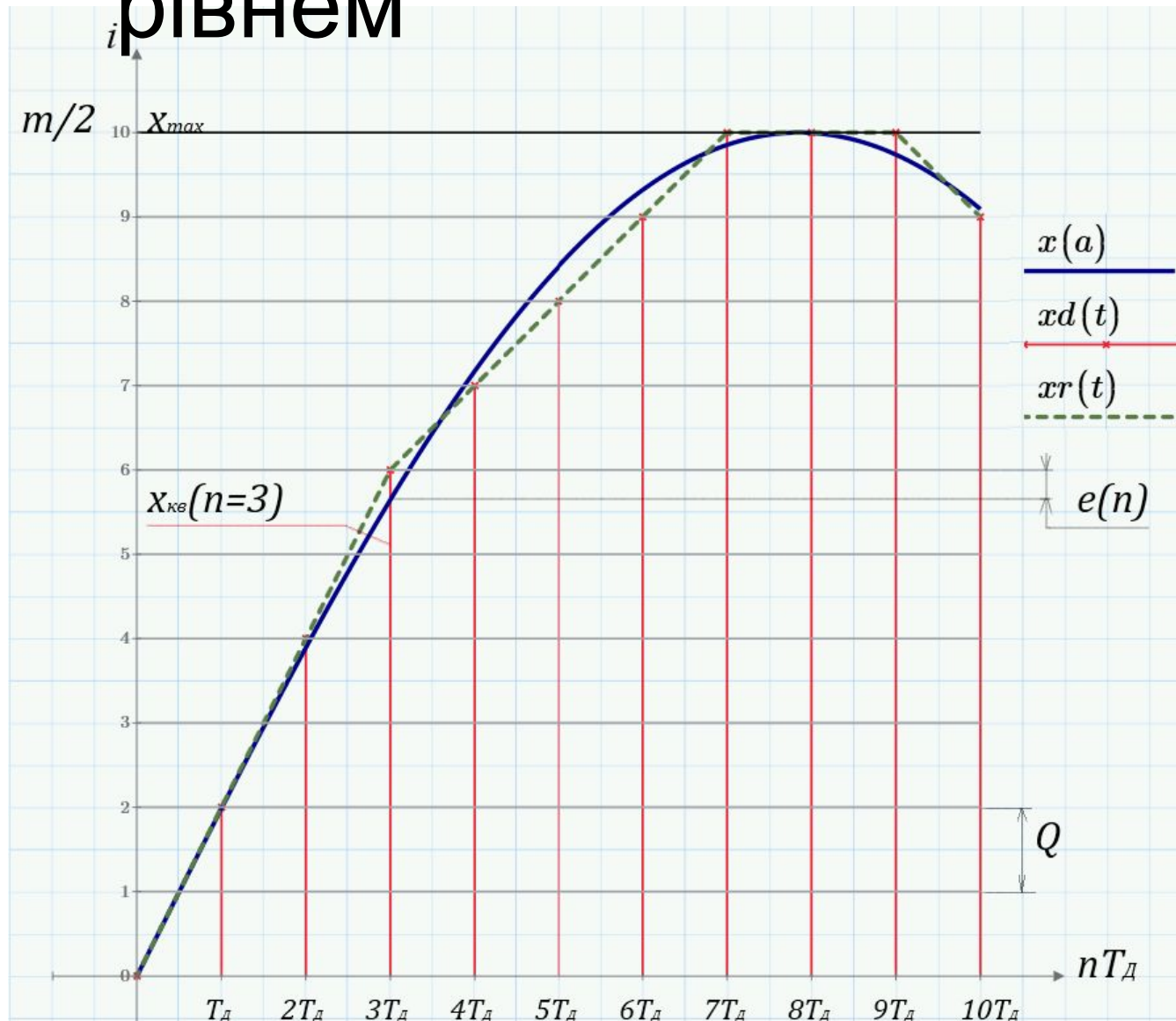
Спектральні перетворення при дискретизації аналогового сигналу з фінітним спектром при $\omega_d < 2\omega_m$. Явище накладення спектрів

1. Спектр дискретного сигналу



Графік перетворення частот при дискретизації сигналу

2. Квантування сигналів за рівнем



Ілюстрація квантування сигналу за рівнем

Квантування
можливе з урізанням та
з округленням.

При урізанні

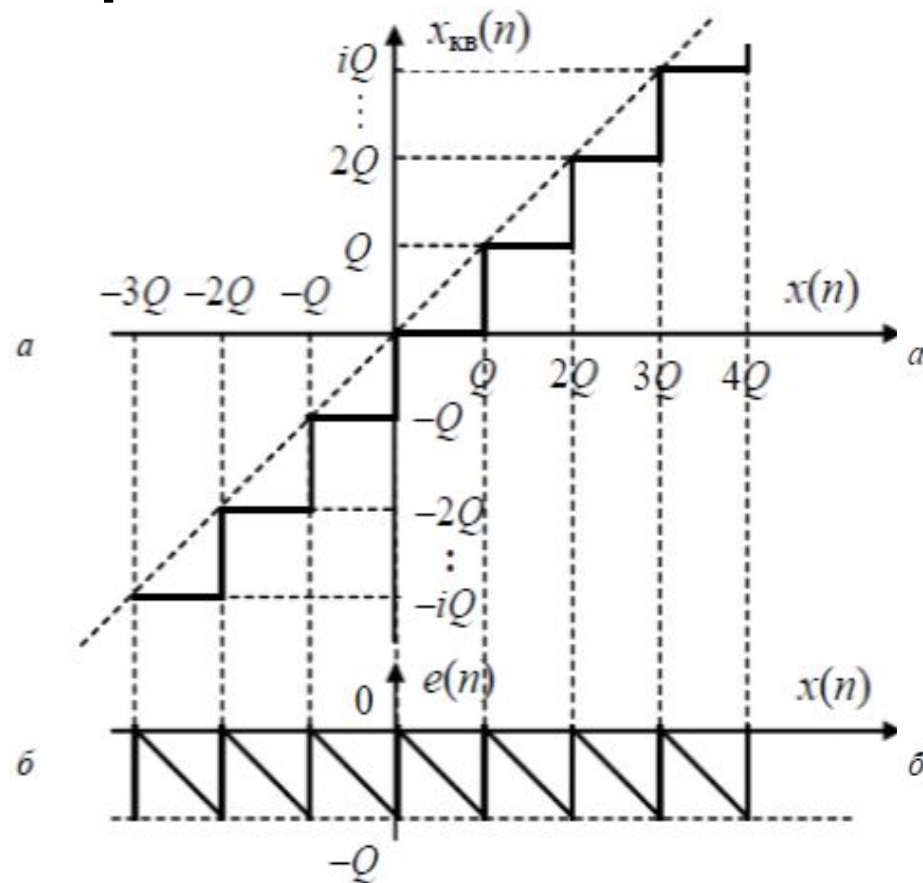
$$x_{\text{KB}}(n) = [x(n)/Q]_{\text{ЦЧ}} \quad Q = iQ,$$

при округленні

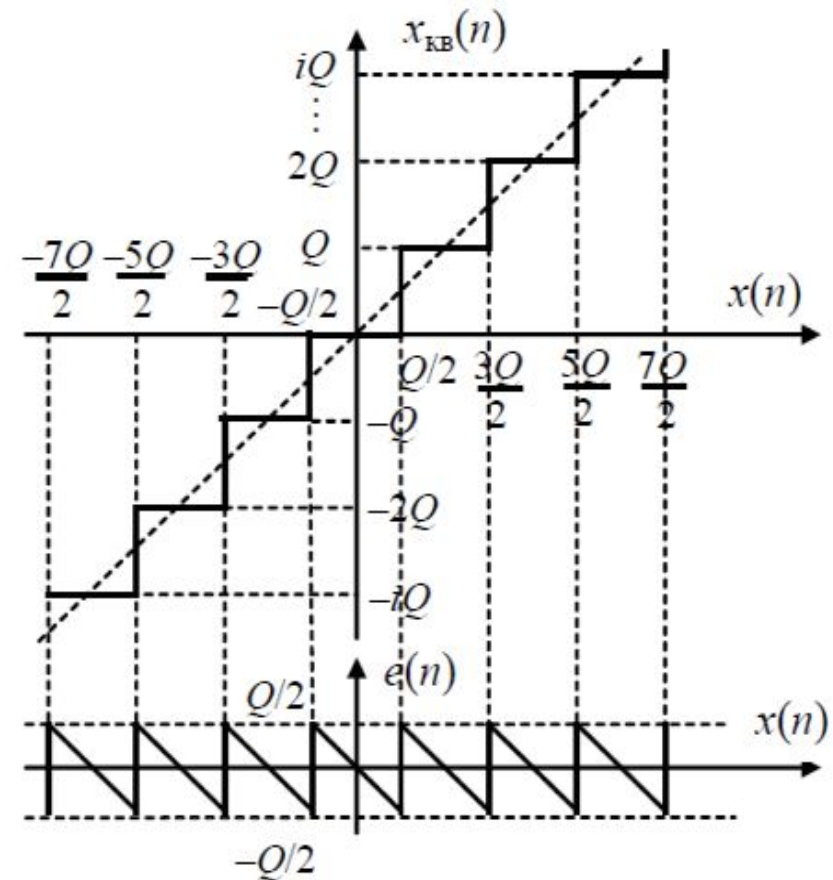
$$x_{\text{KB}}(n) = [x(n)/Q + 0,5]_{\text{ЦЧ}} Q = iQ,$$

де $i = [\cdot]_{\text{ЦЧ}}$ – ціла частина
взятого в дужки
відношення,
відповідного номеру
рівня квантування

2. Квантування сигналів за рівнем

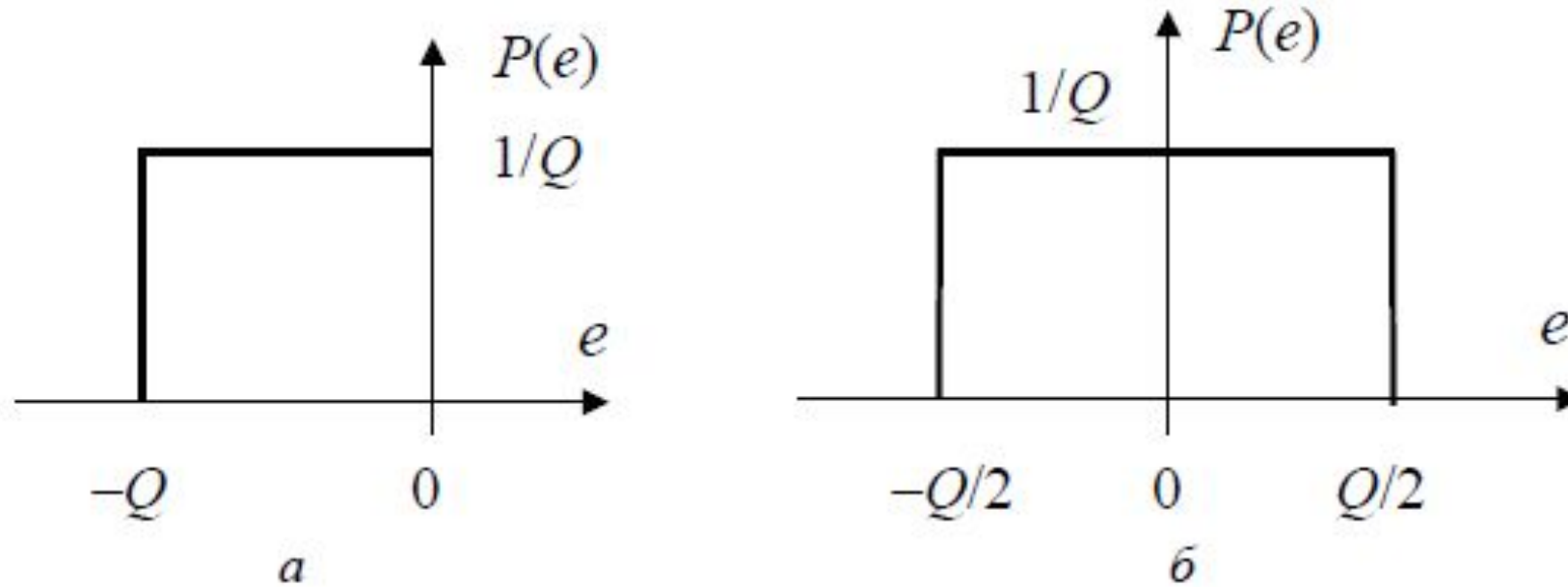


Амплітудна характеристика (а) та похибка квантування з урізанням (б)



Амплітудна характеристика (а) та похибка квантування з округленням (б)

2. Квантування сигналів за рівнем



Щільності імовірностей шуму квантування при урізанні (а) та округленні (б)

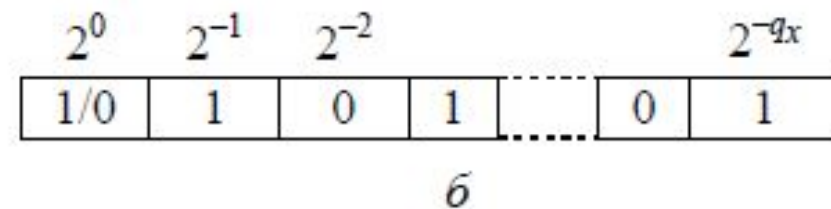
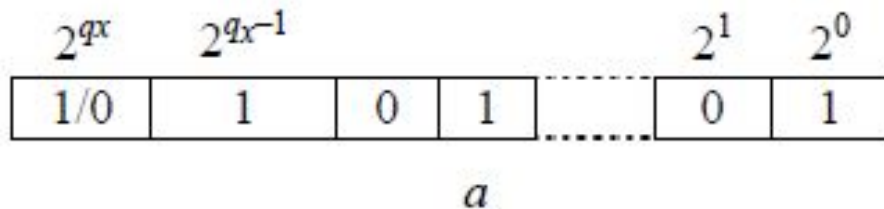
3. Цифрове кодування сигналу

- Отриманий двійковий код двохполярного АЦП являє собою ціле число зі знаком в прямому або додатковому коді. Воно здійснюється відповідно до алгоритму

$$x_{ц(цк)}(n) = x_{кв}(n)/Q = [x(n)/Q]_{цч} = i_{(2)}.$$

- Розряди цілочисельного коду $x_{ц(цк)}(n)$ мають вагу, яка зменшується від 2^{q_x} (старший знаковий розряд) до 2^0 (молодший розряд); $q_x = q_{ацп} - 1$ – кількість розрядів або бітів цифрового сигналу без урахування знакового розряду.
- Також застосовується подання двійкових чисел правильними дробами, називане *дробовим кодуванням* цифрового сигналу.

$$x_{ц(дк)}(n) = [x(n)/Q]_{цч}/2^{q_x} = i_{(2)}/2^{q_x} = x_{ц(цк)}(n) \cdot 2^{-q_x}.$$



Системи цифрової обробки інформації

Лекція 3. Математичний опис лінійних дискретних систем в часовій області

1. Методи математичного опису лінійних дискретних систем в часовій області
2. Дискретна часова згортка. Цифрові фільтри НІХ- та КІХ-типу

1. Методи математичного опису лінійних дискретних систем в часовій області

- Дискретна система, як і аналогова, повністю визначається *математичним оператором*, який встановлює зв'язок між її вихідним $y(n)$ та вхідним $x(n)$ сигналами або послідовностями:

$$y(n) = \Phi[x(n)].$$

- *Оператор системи $\Phi[\cdot]$, що реалізується апаратними або програмними засобами, називають алгоритмом обробки системи.* За видом оператора дискретні системи класифікуються на лінійні та нелінійні, інваріантні та неінваріантні до часу.
- Розглядатимуться алгоритми цифрової фільтрації, які відповідають *лінійним дискретним системам з постійними параметрами* (або коефіцієнтами). Вони задовільняють принципам *суперпозиції та інваріантності до часового зсуву.*

1. Методи математичного опису лінійних дискретних систем в часовій області

- Різницеве рівняння дискретної системи має вигляд

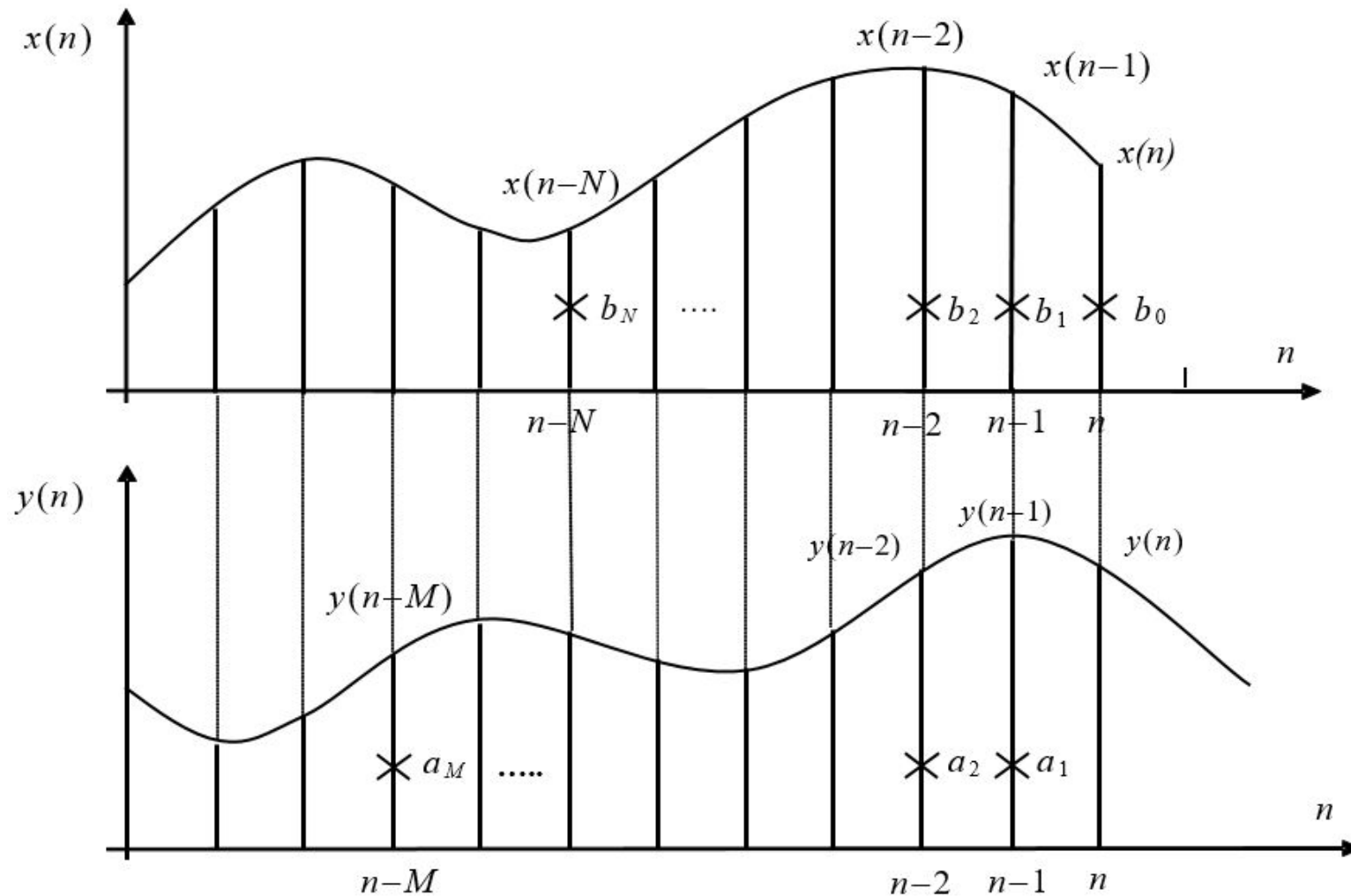
$$\sum_{k=0}^M a_k y(n - k) = \sum_{l=0}^N b_l x(n - l). \quad (1)$$

- При $a_0 = 1$ різницеве рівняння зводиться до вигляду

$$y(n) = \sum_{l=0}^N b_l x(n - l) - \sum_{k=1}^M a_k y(n - k). \quad (2)$$

- *Пристрій (або програма), яка реалізує різницеве рівняння (2) (тобто виконує обробку сигналу відповідно до різницевого рівняння), називається дискретним або цифровим фільтром (ЦФ).*

1. Методи математичного опису лінійних дискретних систем в часовій області



Графічна ілюстрація обробки сигналу відповідно до різницевого рівняння

1. Методи математичного опису лінійних дискретних систем в часовій області

- При значеннях коефіцієнтів $a_k \neq 0$ ЦФ називається *рекурсивним* (РФ). Рекурсія означає наявність у фільтрі *зворотного зв'язку*, тобто залежності вихідного сигналу $y(n)$ від його попередніх відліків $y(n - k)$.
- Різницевому рівнянню (2) з коефіцієнтами $a_k = 0$ відповідає *нерекурсивний* фільтр (НФ):

$$y(n) = \sum_{l=0}^N b_l x(n - l). \quad (3)$$

- Це фільтр без зворотного зв'язку, його вихідний сигнал визначається зваженою з вагами b_l сумою поточного та N попередніх відліків вхідного сигналу

2. Дискретна часова згортка. Цифрові фільтри НІХ- та КІХ-типу

- Дискретна часова згортка (ДЧЗ) визначається виразом

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h(m)x(n-m) = \sum_{m=0}^{\infty} x(m)h(n-m). \quad (4)$$

- Дискретна функція $h(m)$ (або $h(n)$), яка входить до (4) називається *імпульсною характеристикою дискретної системи*. Вона визначається як відгук дискретної системи на сигнал типу *одичний імпульс*

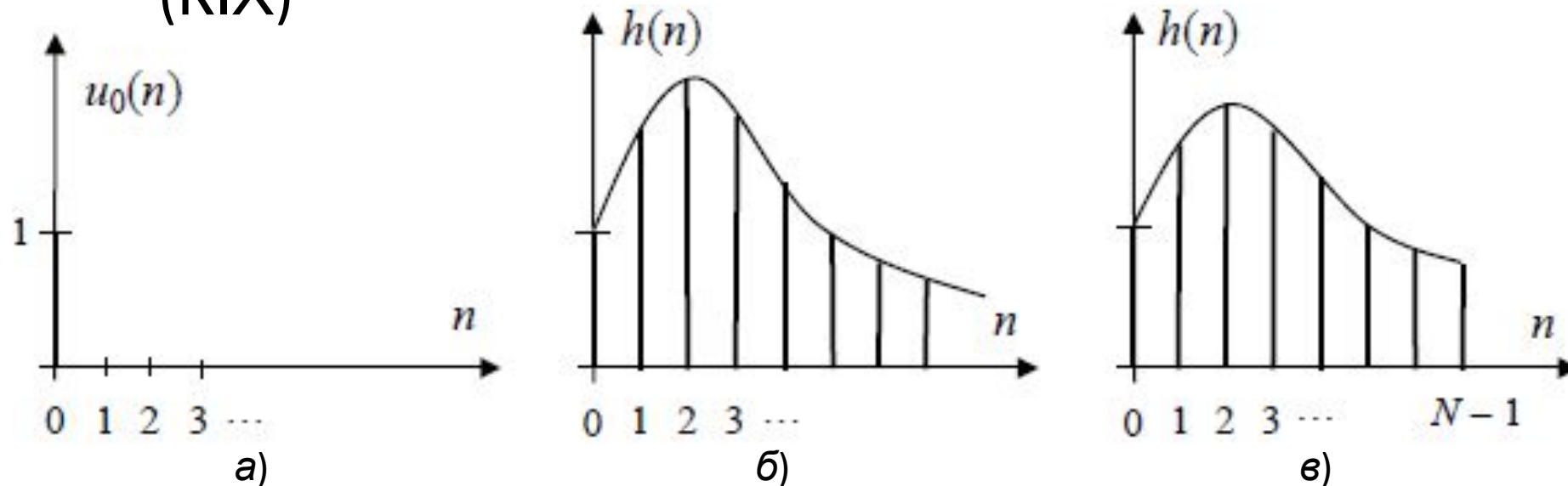
$$\begin{cases} s(t) = 1 : 0 \leq t < \Delta t; \\ s(t) = 0 : \text{інакше.} \end{cases}$$

$$h(t) = \Phi[s(t)]$$

- імпульсною характеристикою $h(t)$ аналогової системи є її реакція на сигнал типу дельта-імпульс.
- Нижня межа додавання в виразі (3.4) ($m = 0$) відповідає умові *фізичної реалізації системи*: $h(t) = 0$ при $n < 0$ (відгук не може випереджувати вплив).

2. Дискретна часова згортка. Цифрові фільтри НІХ- та КІХ-типу

- Можливі два види імпульсних характеристик ЦФ: необмеженої (НІХ) та кінцевої тривалості (КІХ)



Одиничний імпульс (а) та імпульсні характеристики цифрових фільтрів НІХ-типу (б) и КІХ-типу (в)

2. Дискретна часова згортка. Цифрові фільтри НІХ- та КІХ-типу

- Нескінченну імпульсну характеристику мають рекурсивні фільтри (РФ), тому їх звать також НІХ-фільтрами. За імпульсною характеристикою можна визначити *стійкість* РФ.
- Стійкому РФ відповідає згасаюча з часом імпульсна характеристика, що математично визначається як

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| < \infty.$$

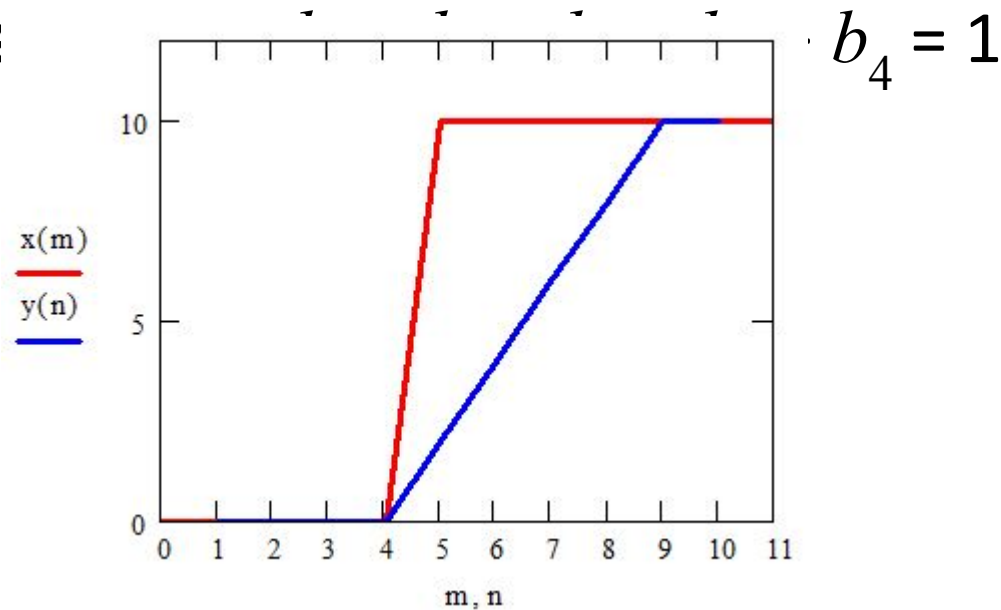
- Нерекурсивні цифрові фільтри відносяться до класу КІХ-фільтрів, тобто фільтрів з кінцевою імпульсною характеристикою. Вираз дискретної часової згортки (4) для НФ має кінцеві межі підсумовування, які визначаються довжиною імпульсної характеристики N :

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)h(n-m) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)x(n-m). \quad (5)$$

- Це означає, що ДЧЗ можна безпосередньо використовувати як алгоритм обробки при реалізації НФ. Для РФ це неможливо внаслідок нескінченної довжини його імпульсної характеристики та потрібного для її обрахування необмежено великої кількості обчислень.
- Зі співставлення виразів (3) та (5) слідує, що значення імпульсної характеристики у виразі (5) тотожні коефіцієнтам b_l у виразі (3): $h(n) = b_l|_{n=l}$, тобто є *коефіцієнтами різницевого рівняння* НФ.

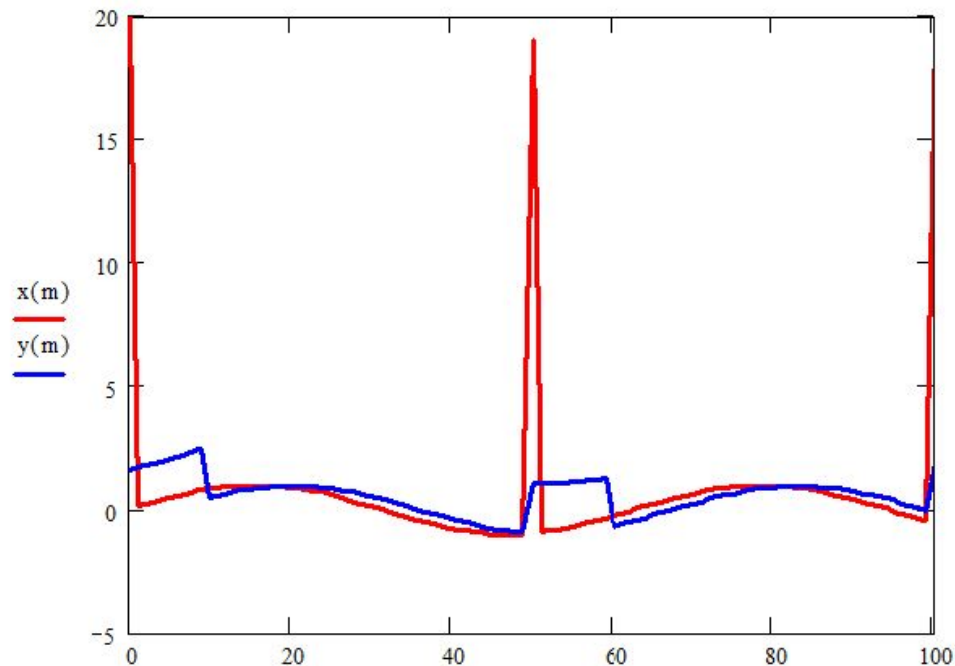
2. Дискретна часова згортка. Цифрові фільтри НІХ- та КІХ-типу

- Приклад 1. $x(n) = [0, 0, 0, 0, 0, 10, 10, 10, 10, 10, 10, \dots]$
- Різницеве рівняння НЦФ $y(n) = \sum_{l=0}^4 b_l x(n-l)$
- $b_l = 0.2$
- Обов'язков:



2. Дискретна часова згортка. Цифрові фільтри НІХ- та КІХ-типу

- Приклад 2. $x_1(n) = \sin(n)$; $x_2(n) = \begin{cases} 20, n = 0, 50, 100, \dots \\ 1, n \neq 0, 50, 100, \dots \end{cases}$
- $x(n) = x_1(n) + x_2(n)$
- Різницеве рівняння НЦФ $y(n) = \sum_{l=0}^9 b_l x(n-l)$
- $b_l = 0.1$
- Обов'язкова умова:
$$b_0 + b_1 + \dots + b_9 = 1$$



Системи цифрової обробки інформації

Лекція 4.

Методи математичного опису сигналів дискретних систем на комплексній площині (в частотній області)

1. Z-перетворення дискретних сигналів
2. Властивості Z-перетворення дискретних сигналів

1. Z-перетворення дискретних сигналів

- Аналогові сигнали на комплексній площині (в частотній області) описуються перетворенням Лапласа

$$X_a(p) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-pt} dt, \quad (1)$$

- яке є функцією комплексного оператора (комплексної частоти) $p = \sigma + j\omega$, та перетворенням Фур'є, яке відповідає перетворенню Лапласа, обчисленому вздовж уявної вісі $j\omega$ (вісі частот):

$$X_a(j\omega) = X_a(p) \Big|_{p=j\omega} = \int_0^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt.$$

- Для дискретних сигналів також існує перетворення Лапласа, отримване з виразу (1) шляхом його дискретизації за часом:

$$X(p) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)e^{-pnT_d}. \quad (2)$$

1. Z-перетворення дискретних сигналів

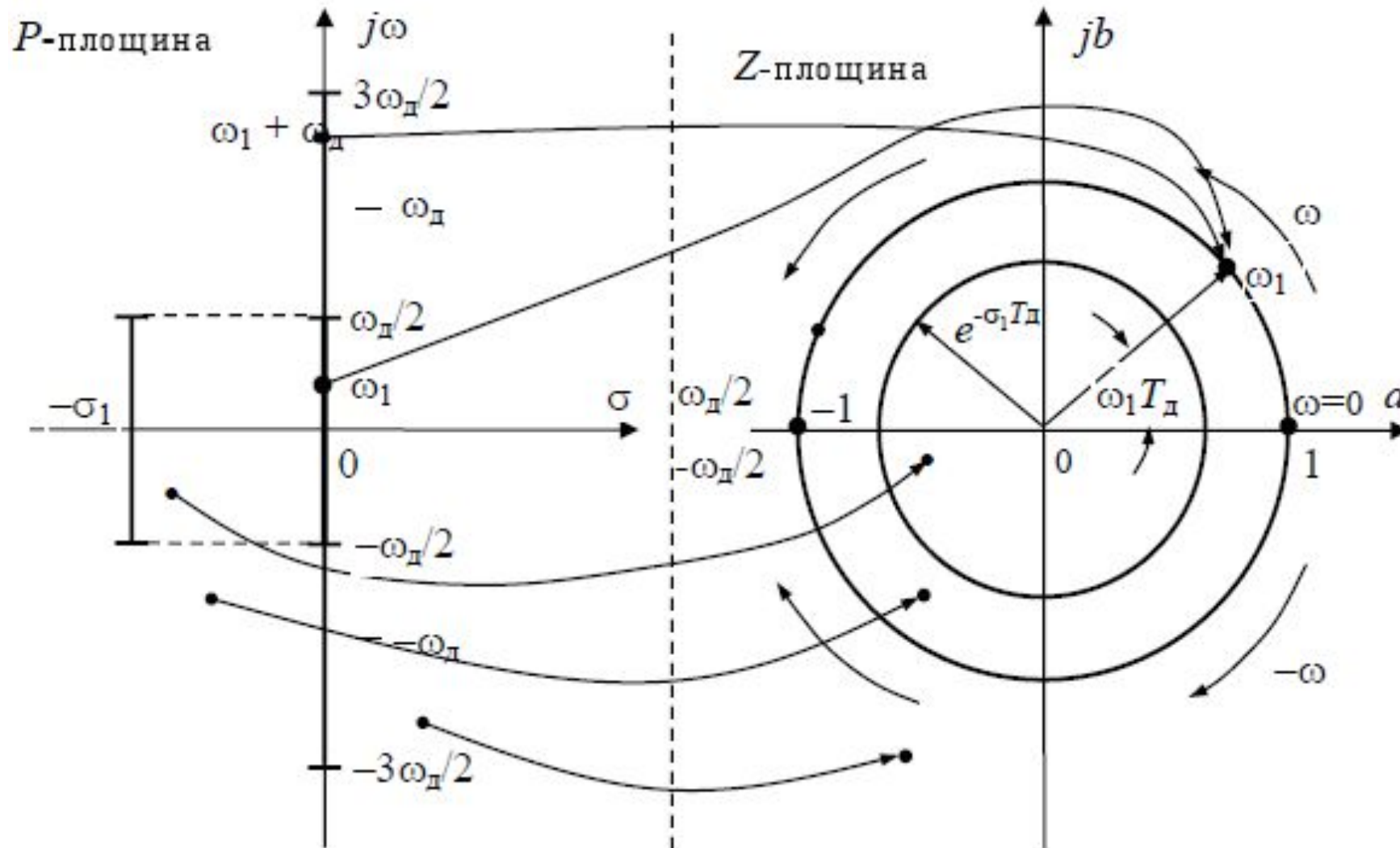
- Перетворення Лапласа не призводить до раціональних функцій (алгебраїчних рівнянь) при математичному описі дискретних сигналів и систем на комплексній P -площини. Цій важливій умові відповідає Z-перетворення дискретних сигналів, яке визначається виразом

$$Z\{x(n)\} = X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}. \quad (3)$$

- Комплексна змінна z у виразі (3) пов'язана зі змінною p (оператором Лапласа) співвідношенням

$$z = e^{pT_d} = a + jb = e^{\sigma T_d} e^{j\omega T_d}. \quad (4)$$

1. Z-перетворення дискретних сигналів



Відображення точок з комплексної P -площини на Z -площину

1. Z-перетворення дискретних сигналів

- Особливість z відображень полягає в їх циклічності по змінній ω , обумовленій періодичністю комплексної експоненти $e^{j\omega T_d}$ з періодом ω_d :

$$z = e^{\sigma T_d} e^{j\omega T_d} = e^{\sigma T_d} e^{j(\omega + \omega_d) T_d}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$$

- Так, точки уявної осі $j\omega$ P -площини ($\omega = 0$) циклічно переносяться на окружність одиничного радіуса Z -площини $e^{j\omega T_d}$, яка є віссю частот на Z -площині; кожній смужі частот шириною ω_d при цьому відповідає один обхід цієї окружності.
- Однозначне відображення точок має місце в основній смужі частот $\pm \omega_d/2$. Ліва P -напівплощина ($\omega < 0$) згортається всередину кола одиничного радіуса Z -площини, а права P -напівплощина ($\omega > 0$) відображається за його межі.
- Z -перетворення, обчислене на одиничній окружності, призводить до перетворення Фур'є дискретного сигналу, яке визначає його спектр:

$$X(z) \Big|_{z=e^{j\omega T_d}} = X(j\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n T_d}. \quad (5)$$

1. Z-перетворення дискретних сигналів

- Приклад 4.1.

- Визначити Z-перетворення функції Хевісайда $f(t) = 1(t)$.

$$F(z) = Z\{1(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots \quad (6)$$

- Помножимо обидві частини рівняння (6) на z^{-1}

$$z^{-1}F(z) = z^{-1} + z^{-2} + \dots \quad (7)$$

- Віднімемо з рівняння (6) рівняння (7)

$$F(z) - z^{-1}F(z) = 1.$$

- Звідси отримуємо

$$F(z) = Z\{1(t)\} = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}.$$

1. Z-перетворення дискретних сигналів

- Приклад 4.2.

- Визначити Z-перетворення функції, що лінійно зростає $f(t) = t$.

$$F(z) = Z\{t\} = \sum_{n=0}^{\infty} nT z^{-n} = Tz^{-1} + 2Tz^{-2} + 3Tz^{-3} + \dots \quad (8)$$

- Помножимо обидві частини рівняння (8) на z^{-1}

$$z^{-1}F(z) = Tz^{-2} + 2Tz^{-3} + 3Tz^{-4} + \dots \quad (9)$$

- Віднімемо з рівняння (8) рівняння (9)

$$F(z) - z^{-1}F(z) = Tz^{-1} + Tz^{-2} + Tz^{-3} + \dots \quad (10)$$

- Помножимо обидві частини рівняння (10) на z^{-1}

$$z^{-1}(F(z) - z^{-1}F(z)) = Tz^{-2} + Tz^{-3} + Tz^{-4} + \dots \quad (11)$$

- Віднімемо з рівняння (10) рівняння (11)

$$F(z) - z^{-1}F(z) - z^{-1}(F(z) - z^{-1}F(z)) = Tz^{-1}.$$

- Звідси отримуємо

$$F(z) = Z\{t\} = \frac{Tz^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} = \frac{Tz}{(z - 1)^2}.$$

1. Z-перетворення дискретних сигналів

- Приклад 4.3.

- Визначити Z-перетворення експоненційної функції $f(t) = e^{-t}$.

$$F(z) = Z\{e^{-t}\} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nT} = 1 + e^{-T}z^{-1} + e^{-2T}z^{-2} + e^{-3T}z^{-3} + \dots \quad (12)$$

- Помножимо обидві частини рівняння (4.12) на $e^{-T} \cdot z^{-1}$

$$e^{-T} \cdot z^{-1} \cdot F(z) = e^{-T}z^{-1} + e^{-2T}z^{-2} + e^{-3T}z^{-3} + \dots \quad (13)$$

- Віднімемо з рівняння (12) рівняння (13)

$$F(z) - e^{-T} \cdot z^{-1} \cdot F(z) = 1.$$

- Звідси отримуємо

$$F(z) = Z\{e^{-t}\} = \frac{1}{1 - e^{-T} \cdot z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-T}}.$$

2. Властивості Z-перетворення дискретних сигналів

- Властивості Z-перетворення
 - *Лінійність*
 - *Затримка*
 - *Згортка*
 - *Добуток*

2. Властивості Z-перетворення дискретних сигналів

- *Лінійність* – Z-перетворення суми дорівнює сумі Z-перетворень:

$$Z\{a_1x_1(n) + a_2x_2(n)\} = a_1X_1(z) + a_2X_2(z). \quad (14)$$

- *Затримка* – Z-перетворення затриманого на m відліків дискретного сигналу $x(n - m)$ дорівнює добутку Z-образа $X(z)$ незатриманого сигналу $x(n)$ на множник затримки z^{-m} :

$$Z\{x(n - m)\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n - m)z^{-(n-m)}z^{-m} = z^{-m}X(z) \quad (15)$$

2. Властивості Z-перетворення дискретних сигналів

- Приклад 4.4.

- Для дискретних сигналів $\{x_1\} = \{1, 2, 3\}$ та $\{x_2\} = \{5, 3, 1\}$ знайти Z-перетворення їх суми.

- Сума сигналів дорівнює

$$\{x_1\} + \{x_2\} = \{1 + 5, 2 + 3, 3 + 1\} = \{6, 5, 4\}.$$

- Знайдемо Z-перетворення сигналів

$$X_1(z) = 1 + \frac{2}{z} + \frac{3}{z^2}; \quad X_2(z) = 5 + \frac{3}{z} + \frac{1}{z^2}$$

- та складемо їх

$$X_1(z) + X_2(z) = 1 + \frac{2}{z} + \frac{3}{z^2} + 5 + \frac{3}{z} + \frac{1}{z^2} = 6 + \frac{5}{z} + \frac{4}{z^2}.$$

2. Властивості Z-перетворення дискретних сигналів

- Приклад 4.5.

- Для дискретного сигналу $\{x\} = \{5, 3, 1\}$ знайти його затримку на $m = 2$ відліки.

- Знайдемо Z-перетворення сигналу

$$X(z) = 5 + \frac{3}{z} + \frac{1}{z^2}$$

- та помножимо його на множник затримки z^{-2} :

$$\begin{aligned} Z\{x(n - 2)\} &= z^{-2} \cdot X(z) = z^{-2} \cdot \left(5 + \frac{3}{z} + \frac{1}{z^2} \right) = \\ &= 0 + \frac{0}{z} + \frac{5}{z^2} + \frac{3}{z^3} + \frac{1}{z^4}. \end{aligned}$$

2. Властивості Z-перетворення дискретних сигналів

- *Згортка* – Z-перетворення згортки двох послідовностей дорівнює добутку Z-перетворень цих послідовностей:

$$y(n) = x_1(n) * x_2(n) = \sum_{m=0}^{\infty} x_1(m)x_2(n - m);$$

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} x_1(m)x_2(n - m)z^{-(n-m)}z^{-m} = X_1(z) \cdot X_2(z). \quad (16)$$

- *Добуток* – Z-перетворення добутку двох послідовностей дорівнює комплексній згортці Z-образів цих послідовностей:

$$y(n) = x_1(n) \cdot x_2(n); Y(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X_1(v)X_2(z/v) \frac{dv}{v}, \quad (17)$$

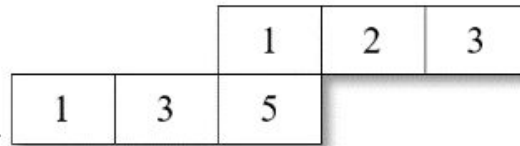
де v – змінна інтегрування;

C – контур інтегрування, який охоплює всі особливі точки підінтегральної функції.

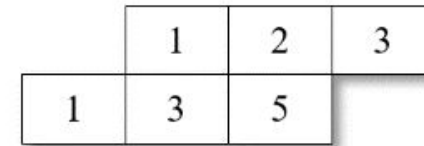
2. Властивості Z-перетворення дискретних сигналів

- Приклад 4.5.

- Для дискретних сигналів $\{x_1\} = \{1, 2, 3\}$ та $\{x_2\} = \{5, 3, 1\}$ знайти їх згортку.

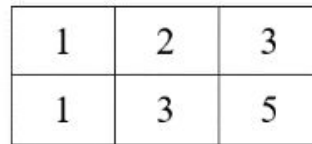


a)

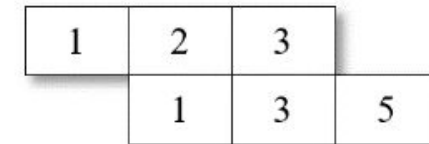


б)

- Запишемо $\{x_2\}$ у зворотному порядку $\{x_2\}_{зв} = \{1, 3, 5\}$.

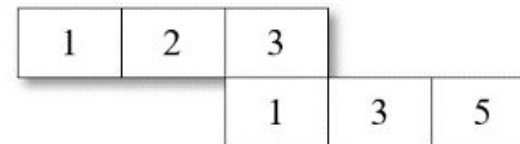


в)



г)

- Співставимо нульові відліки сигналів (рис. а):



д)

- Попарно перемножимо та додамо відліки, що мають пари:

$$y_0 = 1 \cdot 5 = 5$$

2. Властивості Z-перетворення дискретних сигналів

- Далі при кожній ітерації зсуватимемо $\{x_2\}_{3B}$ праворуч на 1 відлік (рис. б – д):

$$y_0 = 1 \cdot 5 = 5$$

$$y_1 = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 = 3 + 10 = 13;$$

$$y_2 = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 = 1 + 6 + 15 = 22;$$

$$y_3 = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 = 2 + 9 = 11;$$

$$y_4 = 3 \cdot 1 = 3.$$

$$\{y\} = \{x_1\} * \{x_2\} = \{5, 13, 22, 11, 3\}.$$

- Знайдемо Z-перетворення сигналів

$$X_1(z) = 1 + \frac{2}{z} + \frac{3}{z^2}; \quad X_2(z) = 5 + \frac{3}{z} + \frac{1}{z^2}$$

- та перемножимо їх

$$\begin{aligned} X_1(z) \cdot X_2(z) &= \left(1 + \frac{2}{z} + \frac{3}{z^2}\right) \left(5 + \frac{3}{z} + \frac{1}{z^2}\right) = \\ &= 5 + \frac{3}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{10}{z} + \frac{6}{z^2} + \frac{2}{z^3} + \frac{15}{z^2} + \frac{9}{z^3} + \frac{3}{z^4} = 5 + \frac{13}{z} + \frac{22}{z^2} + \frac{11}{z^3} + \frac{3}{z^4}. \end{aligned}$$

- Очевидно, що коефіцієнти при z^{-1} дорівнюють згортці сигналів.

Системи цифрової обробки інформації

Лекція 5. Характеристики дискретних систем

1. Тестові послідовності дискретних систем
2. Передавальна функція і частотна характеристика дискретної системи

1. Тестові послідовності дискретних систем

- Одиничний імпульс $u_0(n) = \begin{cases} 1, n = 0 \\ 0, n \neq 0 \end{cases}$ – має Z-образ $U_0(z) = 1$ та рівномірну спектральну щільність $U_0(j\omega) = 1$. Для дискретних систем він має таке саме значення, як і дельта-імпульс для аналогових. Відгуком на нього є **імпульсна характеристика** дискретної системи.
- Одиничний імпульс, затриманий на m відліків
$$u_0(n - m) = \begin{cases} 1, n = m \\ 0, n \neq m \end{cases}$$
- З урахуванням властивості затримки його Z- та F (Фур'є)-образи мають вигляд
$$Z\{u_0(n - m)\} = z^{-m}; \quad F\{u_0(n - m)\} = e^{-j\omega m T_d}.$$

1. Тестові послідовності дискретних систем

- Будь-яка дискретна послідовність може бути подана її дискретною згорткою з одиничним імпульсом

$$u_0(n): x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)u_0(n-m).$$

- Одиничний стрибок $u_1(n) = \begin{cases} 1, n \geq 0 \\ 0, n < 0 \end{cases}$ (функція включення).

Його Z -образ

$$U_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

- є сумою нескінченної кількості членів геометричної прогресії z^{-n} . Z -образу одиничного стрибка відповідає його спектральна щільність

$$U_1(j\omega) = U_1(z) \Big|_{z=e^{j\omega T_d}} = \frac{1}{1-e^{-j\omega T_d}},$$

1. Тестові послідовності дискретних систем

- Відгуком дискретної системи на сигнал $u_1(n)$ є її **перехідна характеристика**.

- Прямокутний імпульс кінцевої тривалості

$$u_N(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N - 1; \\ 0 & \text{для інших } n. \end{cases}$$

- Його Z-образ

$$U_N(z) = \sum_{n=0}^{N-1} z^{-n} = \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}}$$

- дорівнює сумі кінцевої кількості членів геометричної прогресії:

$$S = \sum_{n=0}^{N-1} a^n = \frac{1 - a^N}{1 - a}.$$

1. Тестові послідовності дискретних систем

- До того самого результату можна прийти, подавши сигнал $u_N(n)$ у вигляді

$$u_N(n) = u_1(n) - u_1(n - N),$$

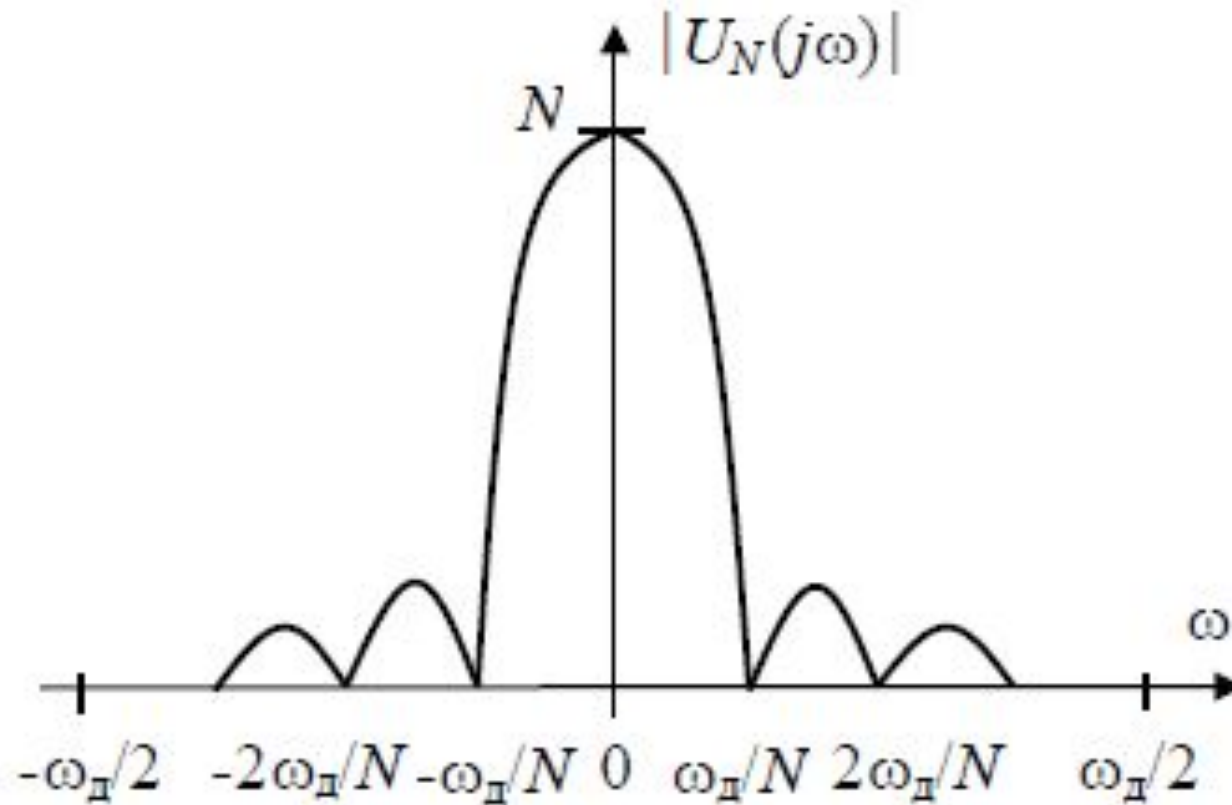
- що в Z -області означає

$$U_N(z) = U_1(z) - z^{-N}U_1(z) = \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}}.$$

- Спектральна щільність імпульсу визначається виразом

$$\begin{aligned} U_N(j\omega) &= (1 - e^{-j\omega NT_d}) / (1 - e^{-j\omega T_d}) = \\ &= \frac{e^{-j\omega NT_d/2} (e^{j\omega NT_d/2} - e^{-j\omega NT_d/2})}{e^{-j\omega T_d/2} (e^{j\omega T_d/2} - e^{-j\omega T_d/2})} = \\ &= e^{-j\omega(N-1)T_d/2} \cdot \frac{\sin(\omega NT_d/2)}{\sin(\omega T_d/2)}. \end{aligned}$$

1. Тестові послідовності дискретних систем



Графік модуля спектра дискретного імпульсу кінцевої тривалості

2. Передавальна функція і частотна характеристика дискретної системи

- Передавальна функція аналогової системи визначається відношенням перетворень Лапласа її вихідного та вхідного сигналів: $H(p) = Y(p)/X(p)$

$$H(p) = \frac{\sum_{l=0}^N b_l p^l}{\sum_{k=0}^M a_k p^k} = B(p)/A(p) \quad (1)$$

- та у вигляді перетворення Лапласа імпульсної характеристики системи $h(t)$

$$H(p) = \int_0^{\infty} h(t) e^{-pt} dt \quad (2)$$

- Передавальна функція також подається в нуль-полісній формі:

$$H(p) = C \prod_{i=1}^M (p - p_{0i}) / (p - p_{pi}), \quad (3)$$

- де C – нормуюча константа.

2. Передавальна функція і частотна характеристика дискретної системи

- За передавальною функцією аналогової системи безпосередньо знаходиться її частотна характеристика

$$H_a(j\omega) = Y(j\omega)/X(j\omega) = H(p) \Big|_{p=j\omega} ,$$

- яка відповідно до виразу (2) виражається ще як перетворення Фур'є її імпульсної характеристики

$$H_a(j\omega) = H(p) \Big|_{p=j\omega} = \int_0^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt .$$

- Передавальною функцією дискретної системи називається відношення Z-образів вихідного та вхідного сигналів системи

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad (4)$$

2. Передавальна функція і частотна характеристика дискретної системи

- За відомою передавальною функцією системи $H(z)$ та Z -перетворенню вхідного сигналу $X(z)$ шляхом зворотного Z -перетворення їхнього добутку можна аналітично знайти відгук системи на заданий вхідний вплив:

$$y(n) = Z^{-1}\{H(z)Z[x(n)]\}.$$

- Із Z -перетворення лівих та правих частин ДЧЗ

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} h(m)x(n-m)z^{-n} = H(z)X(z)$$

- впливає, що передавальна функція дискретної системи є Z -перетворенням її імпульсної характеристики:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)z^{-n}. \quad (5)$$

2. Передавальна функція і частотна характеристика дискретної системи

- Імпульсна характеристика системи відповідає зворотному Z -перетворенню її передавальної функції:

$$h(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C H(z) z^{n-1} dz. \quad (6)$$

- Частотна характеристика дискретної системи знаходиться за передавальною функцією системи $H(z)$ простою заміною z на $e^{j\omega T_d}$:

$$H(j\omega) = Y(j\omega)/X(j\omega) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega T_d}}. \quad (7)$$

2. Передавальна функція і частотна характеристика дискретної системи

- З виразу (5) випливає, що частотна характеристика дискретної системи є Фур'є-перетворенням її імпульсної характеристики:

$$H(j\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n T_D}. \quad (8)$$

- а імпульсна характеристика – зворотним перетворенням Фур'є частотної характеристики:

$$h(n) = \frac{T_D}{2\pi} \int_{-\frac{\omega_D}{2}}^{\frac{\omega_D}{2}} H(j\omega)e^{j\omega n T_D} d\omega. \quad (9)$$

2. Передавальна функція і частотна характеристика дискретної системи

- Як Фур'є-образи дискретних сигналів, так і частотні характеристики дискретної системи (7), (8) являють собою функції відносної або нормованої частоти $\omega = \omega T_d = 2\pi f / f_d$, називаної також *цифровою частотою*.
- Значенням кругової частоти ω в межах $(0 \div \omega_d)$ та $(-\omega_d/2 \div \omega_d/2)$ відповідають значення цифрової частоти λ в межах $(0 \div 2\pi)$ та $(-\pi \div \pi)$.
- Частотна характеристика дискретної системи як функція цифрової частоти λ визначається виразами:

$$H(j\lambda) = Y(j\lambda) / X(j\lambda) = H(z) \Big|_{z=e^{j\lambda}} ; \quad (10)$$

$$H(j\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) e^{-j\lambda n} . \quad (11)$$

2. Передавальна функція і частотна характеристика дискретної системи

- З визначення частотної характеристики дискретної системи як перетворення Фур'є імпульсної характеристики (8), (11) випливає також властивість її періодичності з періодом по частоті ω_d або 2π .
- Математично це пояснюється періодичністю комплексної експоненти

$$e^{j\omega n T_d} = e^{j(\omega + k\omega_d)n T_d} = e^{j(\lambda + 2\pi k)n};$$

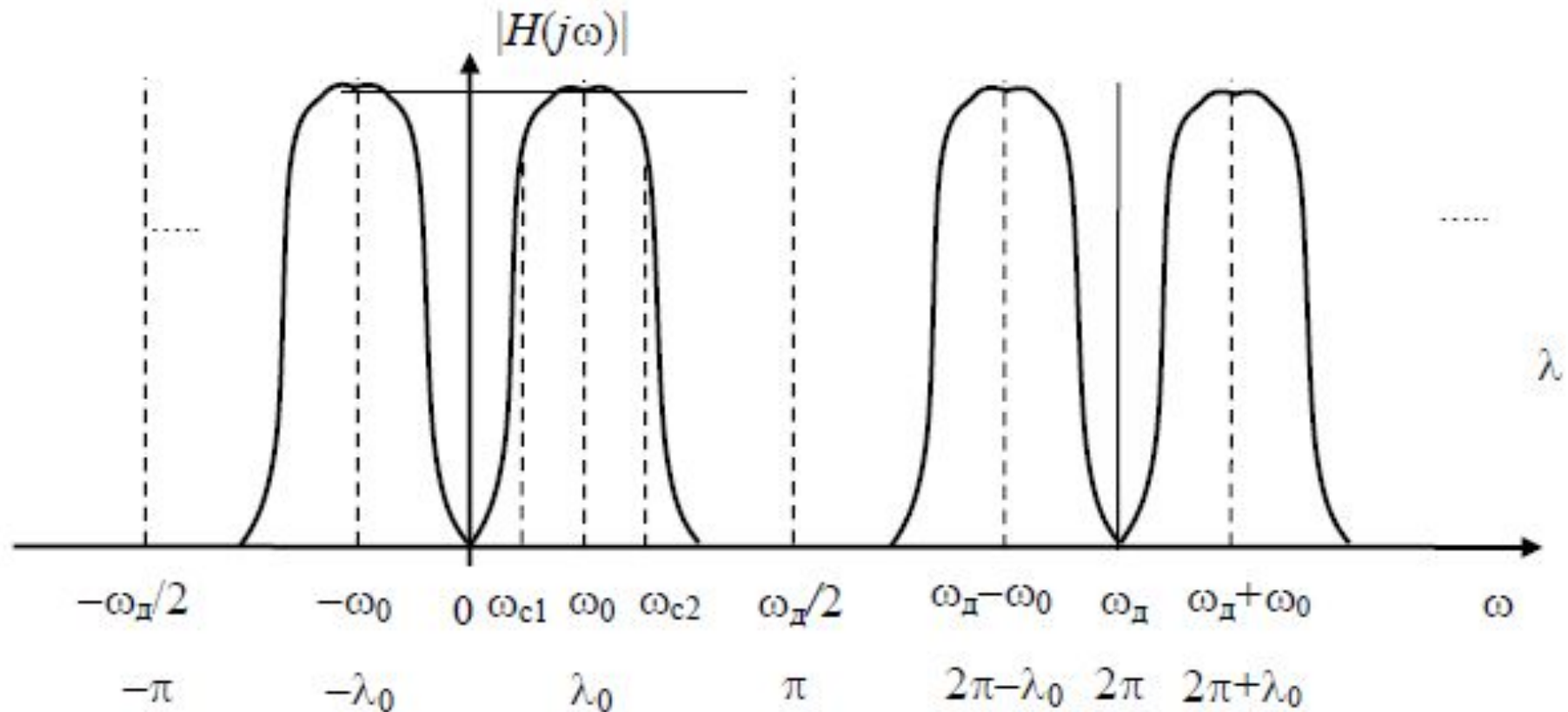
$$H(j\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) e^{-j(\omega + k\omega_d)n T_d} = H[j(\omega + k\omega_d)]$$

- або

$$H(j\omega) = H[j(\lambda + 2\pi k)],$$

- де $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

2. Передавальна функція і частотна характеристика дискретної системи



Приблизний вигляд АЧХ цифрового смугового фільтра

Системи цифрової обробки інформації

Лекція 6 Рекурсивні цифрові фільтри

1. Характеристики рекурсивних цифрових фільтрів
2. Форми реалізації рекурсивних цифрових фільтрів

1. Характеристики рекурсивних цифрових фільтрів

- **Передавальні функції** цифрових фільтрів знаходяться за допомогою Z -перетворення різницевих рівнянь або дискретної часової згортки, якими дискретні системи описуються в часовій області.
- **Рекурсивний** фільтр (РФ) реалізує алгоритм обробки, який визначається різницевим рівнянням

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m) \quad (1)$$

- Виконаємо Z -перетворення лівих та правих частин

$$y(n) = \sum_{l=0}^N b_l x(n-l) - \sum_{k=1}^M a_k y(n-k). \quad (2)$$

- враховуючи властивості лінійності та затримки Z -перетворення, отримаємо

$$Y(z) = \sum_{l=0}^N b_l z^{-l} X(z) - \sum_{k=1}^M a_k z^{-k} Y(z).$$

1. Характеристики рекурсивних цифрових фільтрів

- Переходячи до відношення $Y(z)/X(z)$, отримаємо загальний вигляд передавальної функції рекурсивного фільтра:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{l=0}^N b_l z^{-l}}{1 + \sum_{k=1}^M a_k z^{-k}} = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}. \quad (3)$$

- Воно являє собою відношення двох поліномів порядку N та M ($M \geq N$) по степенях комплексної змінної z^{-1} . Його можна розглядати ще й як добуток двох передавальних функцій: $H_H(z) = B(z^{-1})$ – нерекурсивної частини та $H_P(z) = 1/A(z^{-1})$ – рекурсивної частини фільтра, тобто $H(z) = H_H(z)H_P(z)$.
- Наприклад, передавальній функції $H(z) = b_0/(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2})$ відповідає різницеве рівняння $y(n) = b_0 x(n) - a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2)$.

1. Характеристики рекурсивних цифрових фільтрів

- При аналізі цифрових фільтрів передавальну функцію (3) виражають також у вигляді відношення поліномів $B(z)$ та $A(z)$ по позитивних степенях змінної z . Для цього досить чисельник та знаменник (3) помножити на z^M :

$$H(z) = z^{M-N} \frac{\sum_{l=0}^N b_l z^{N-l}}{1 + \sum_{k=0}^M a_k z^{M-k}} = \frac{B(z)}{A(z)}. \quad (4)$$

- Передавальні функції рекурсивного фільтра у формі (3), (4) зазвичай подаються узагальнено відношенням двох поліномів $B(z)$, $A(z)$ або $B(z^{-1})$, $A(z^{-1})$ однакового порядку $N = M$:

$$H(z) = Y(z)/X(z) = \left(\sum_{l=0}^M b_l z^{M-l} \right) / \left(\sum_{k=0}^M a_k z^{M-k} \right) = \\ = B(z)/A(z). \quad (5)$$

$$H(z) = Y(z)/X(z) = \left(\sum_{l=0}^M b_l z^{-l} \right) / \left(1 + \sum_{k=1}^M a_k z^{-k} \right) = \\ = B(z^{-1})/A(z^{-1}). \quad (6)$$

1. Характеристики рекурсивних цифрових фільтрів

- **Нулі** передавальної функції є коренями чисельника (5), тобто значеннями змінної z , що обертають на нуль поліном $B(z)$:

$$B(z) = 0 \text{ при } z = z_{0i} = |z_{0i}|e^{j\omega_{0i}T_d} = |z_{0i}|e^{j\lambda_{0i}},$$

- де $|z_{0i}|$ – модуль, ω_{0i} – кутова частота й λ_{0i} – цифрова частота нуля.
 - **Полюси** відповідають кореням знаменника передавальної функції
- $$A(z) = 0 \text{ при } z = z_{pi} = |z_{pi}|e^{j\omega_{pi}T_d} = |z_{pi}|e^{j\lambda_{pi}}:$$
- $|z_{pi}|$, ω_{pi} , λ_{pi} є модулем, круговою та цифровою частотами полюса відповідно. Індекс i означає номер нуля й полюса: $i = 1, 2, \dots, M$, а M – їх кількість, що дорівнює порядку фільтра.

1. Характеристики рекурсивних цифрових фільтрів

- Знаючи нулі й полюси передавальної функції, її можна подати в *нуль-полюсній формі*, використавши розкладення поліномів чисельника та знаменника на елементарні співмножники:

$$H(z) = \prod_{i=1}^M \frac{(z - z_{0i})}{(z - z_{pi})} = \prod_{i=1}^M \frac{(1 - z_{0i}z^{-1})}{(1 - z_{pi}z^{-1})}. \quad (7)$$

- У виразі (7) може бути присутнім нормувальний множник $C = b_0/a_0$, якщо коефіцієнти b_0, a_0 передавальної функції не рівні одиниці.

1. Характеристики рекурсивних цифрових фільтрів

- **Частотну характеристику** РФ можна отримати на основі будь-якого з виразів його передавальної функції $H(z)$ – дрібно-поліноміального (3), (5), (6), нуль-поліусного (7) або розкладення на елементарні дроби, використавши заміну $z = e^{j\omega T_d}$.

- Передавальній функції (3) відповідає частотна характеристика РФ вигляду

$$H(j\omega) = \sum_{l=0}^N b_l e^{-j\omega l T_d} / \left(1 + \sum_{k=1}^M a_k e^{-j\omega k T_d} \right). \quad (8)$$

- Перетворення функції

$$X_a(p) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-pt} dt. \quad (9)$$

- на показову форму

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$

- призводить до аналітичних виразів для модуля $|H(j\omega)|$ й аргументу $\varphi(\omega)$ частотної характеристики, тобто до АЧХ й ФЧХ.

1. Характеристики рекурсивних цифрових фільтрів

- Передавальній функції РФ в нуль-полюсній формі (7) відповідає вираз для ЧХ, який вказує спосіб її графоаналітичного обчислення:

$$H(j\omega) = \prod_{i=1}^M \frac{(e^{j\omega T_d} - |z_{0i}| e^{j\omega_{0i} T_d})}{(e^{j\omega T_d} - |z_{pi}| e^{j\omega_{pi} T_d})} = \prod_{i=1}^M \frac{R_{0i}(j\omega)}{R_{pi}(j\omega)}. \quad (10)$$

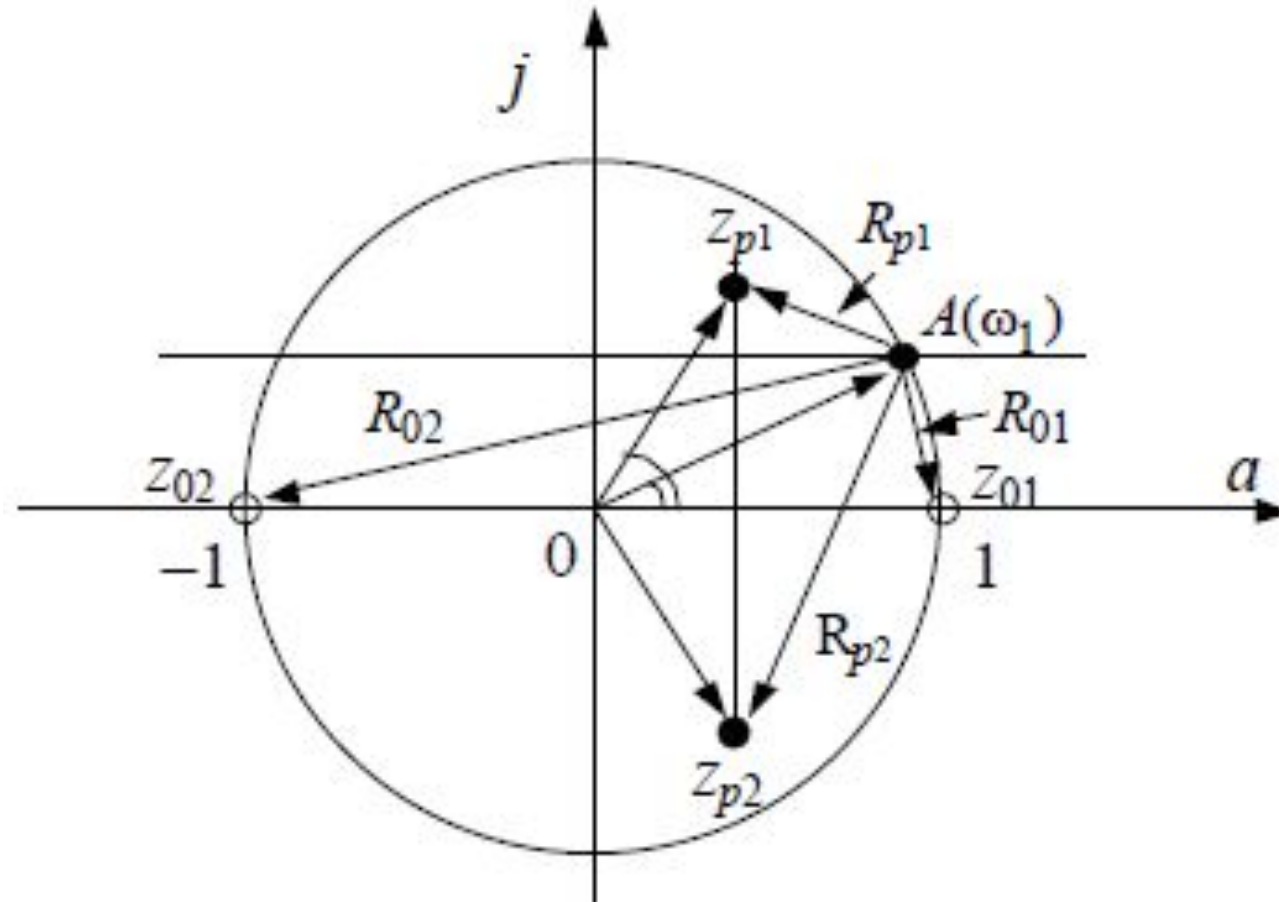
- Чисельник та знаменник виразу (10) є векторними відстанями R_{0i} , R_{pi} від точки на одиничній окружності з кутовою координатою ωT_d до нулів z_{0i} та полюсів z_{pi} РФ відповідно. Перехід до модуля й аргументу виразу (10) дає вираз для АЧХ й ФЧХ РФ у вигляді

$$|H(j\omega)| = \prod_{i=1}^M |R_{0i}| / \prod_{i=1}^M |R_{pi}|; \quad (11)$$

$$\varphi(\omega) = \sum_{i=1}^M \psi_{0i} - \sum_{i=1}^M \psi_{pi}. \quad (12)$$

- де $|R_{0i}|$, $|R_{pi}|$ – довжини векторів $R_{0i}(j\omega)$, $R_{pi}(j\omega)$; ψ_{0i} , ψ_{pi} – кути, утворені ними з віссю абсцис.

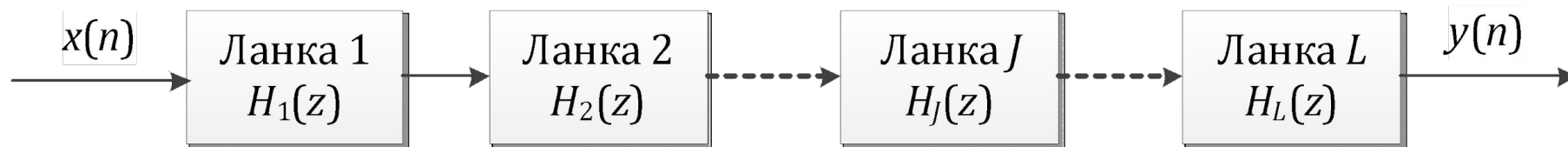
1. Характеристики рекурсивних цифрових фільтрів



Картина нулів і полюсів ЦФ

Таким чином, положення полюсів визначає смугу пропускання частотної характеристики фільтра, а положення нулів – її смугу затримки.

2. Форми реалізації рекурсивних цифрових фільтрів



- Передавальна функція каскадно реалізованого РФ визначається добутком передавальних функцій его ланок:

$$H(z) = \prod_{J=1}^L H_J(z),$$
$$H_J(z) = \frac{1 + b_{1J}z^{-1} + b_{2J}z^{-2}}{1 + a_{1J}z^{-1} + a_{2J}z^{-2}} = \frac{z^2 + b_{1J}z + b_{2J}}{z^2 + a_{1J}z + a_{2J}} =$$
$$= \frac{(z - z_{01J})(z - z_{02J})}{(z - z_{p1J})(z - z_{p2J})}. \quad (13)$$

- де $H_J(z)$ – передавальна функція J -ої біквадратної ланки при значенні коефіцієнта $b_{0J} = 1$; при $b_{0J} \neq 1$ додається загальний нормувальний або масштабний множник C_0 .

2. Форми реалізації рекурсивних цифрових фільтрів

- Коефіцієнти ланок та їх полюси й нулі пов'язані співвідношеннями

$$z_{01,2J} = \left(-b_{1J} \pm \sqrt{b_{1J}^2 - 4b_{2J}} \right) / 2; \quad z_{p1,2J} = \left(-a_{1J} \pm \sqrt{a_{1J}^2 - 4a_{2J}} \right) / 2;$$
$$b_{1J} = -(z_{01J} + z_{02J}); \quad a_{1J} = -(z_{p1J} + z_{p2J});$$
$$b_{2J} = z_{01J} \cdot z_{02J}; \quad a_{2J} = z_{p1J} \cdot z_{p2J}. \quad (5.14)$$

- Пари нулів та полюсів, які визначають значення коефіцієнтів J -ої ланки, можуть бути дійсними різними, дійсними рівними, а при $(b_{1J}^2 - 4b_{2J}) < 0$ та $(a_{1J}^2 - 4a_{2J}) < 0$ – комплексно-спряженими:

$$z_{0(p)1J} = z_{0(p)2J}^* = z_{0(p)J}.$$

2. Форми реалізації рекурсивних цифрових фільтрів

- У випадку комплексно-спряжених коефіцієнтів співвідношення (14) матимуть вигляд

$$b_{1J} = -2\operatorname{Re}\{z_{0J}\} = -2r_{0J} \cos \lambda_{0J}; \quad b_{2J} = |z_{0J}|^2 = r_{0J}^2; \quad (15)$$
$$a_{1J} = -2\operatorname{Re}\{z_{pJ}\} = -2r_{pJ} \cos \lambda_{pJ}; \quad a_{2J} = |z_{pJ}|^2 = r_{pJ}^2$$

де $\lambda_{0(p)J} = \omega_{0(p)J}T_d$ – нормована частота нуля або полюса.

- Для ланки першого порядку $a_1 = -z_{p1}$, $b_1 = -z_{01}$.
- **Приклад.** Значенням нулів та полюсів $z_{01} = 1$, $z_{02} = -1$, $z_{p1,2} = 0,4 \pm j0,6$ відповідають значення коефіцієнтів ланки 2-го порядку: $b_0 = 1$; $b_1 = 0$; $b_2 = -1$; $a_1 = -0,8$; $a_2 = 0,52$.

2. Форми реалізації рекурсивних цифрових фільтрів

- Частотна характеристика $H(j\omega)$ каскадно реалізованого фільтра також визначається добутком частотних характеристик його ланок $H_J(j\omega)$:

$$H(j\omega) = H(z) \Big|_{z=e^{-j\omega T_d}} = \prod_{J=1}^L H_J(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}.$$

- Її модуль $|H(j\omega)|$ (АЧХ фільтра) та аргумент $\varphi(\omega)$ (ФЧХ фільтра) дорівнюють відповідно

$$|H(j\omega)| = \prod_{J=1}^L |H_J(j\omega)|, \quad \varphi(\omega) = \sum_{J=1}^L \varphi_J(\omega).$$

- Вираз для частотної характеристики ланок $H_J(j\lambda)$, поданої функцією нормованої цифрової частоти $\lambda = \omega T_d$, має вигляд

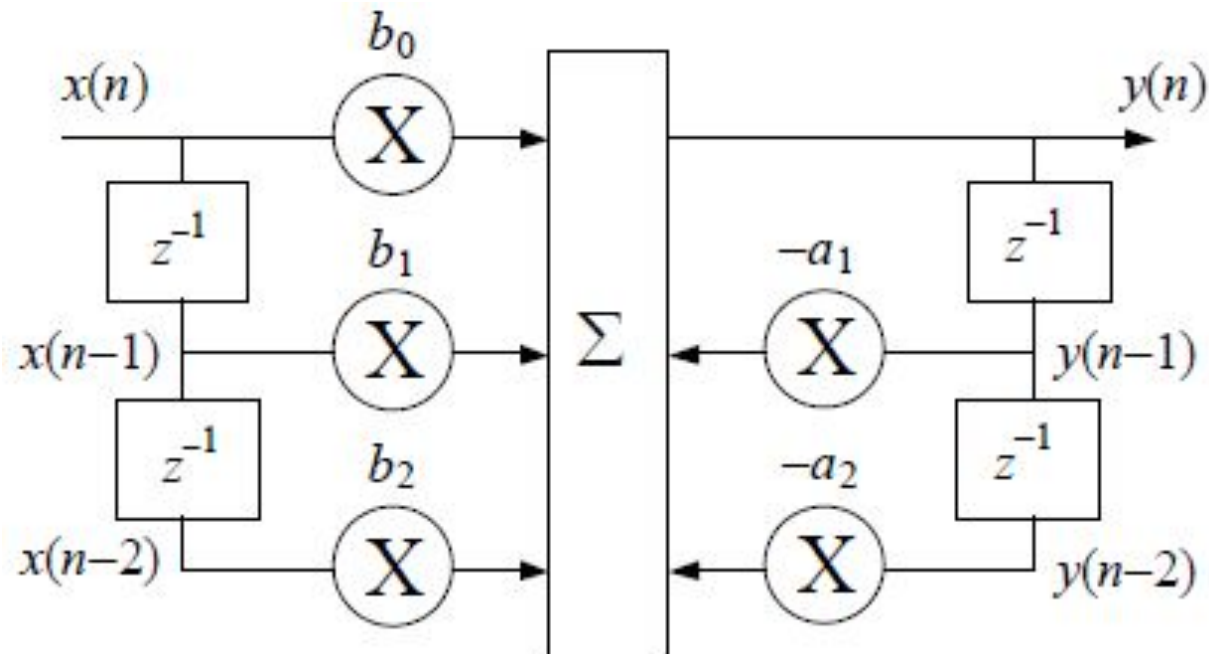
$$H_J(j\lambda) = \frac{1 + b_{1J}e^{-j\lambda} + b_{2J}e^{-j2\lambda}}{1 + a_{1J}e^{-j\lambda} + a_{2J}e^{-j2\lambda}}.$$

2. Форми реалізації рекурсивних цифрових фільтрів

- **Пряма форма** реалізації біквадратної ланки описується різницевою рівнянням вигляду

$$y(n) = b_0x(n) + b_1x(n - 1) + b_2x(n - 2) - a_1y(n - 1) + a_2y(n - 2). \quad (16)$$

- Йому відповідає структурна схема ланки:



2. Форми реалізації рекурсивних цифрових фільтрів

- Канонічна форма реалізації ланки 2-го порядку може бути отримана шляхом подання його передавальної функції в такому вигляді:

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{1}{A(z)} B(z) = \frac{W(z)}{X(z)} \cdot \frac{Y(z)}{W(z)} = H_p(z)H_H(z),$$

де $W(z)$ – допоміжна змінна;

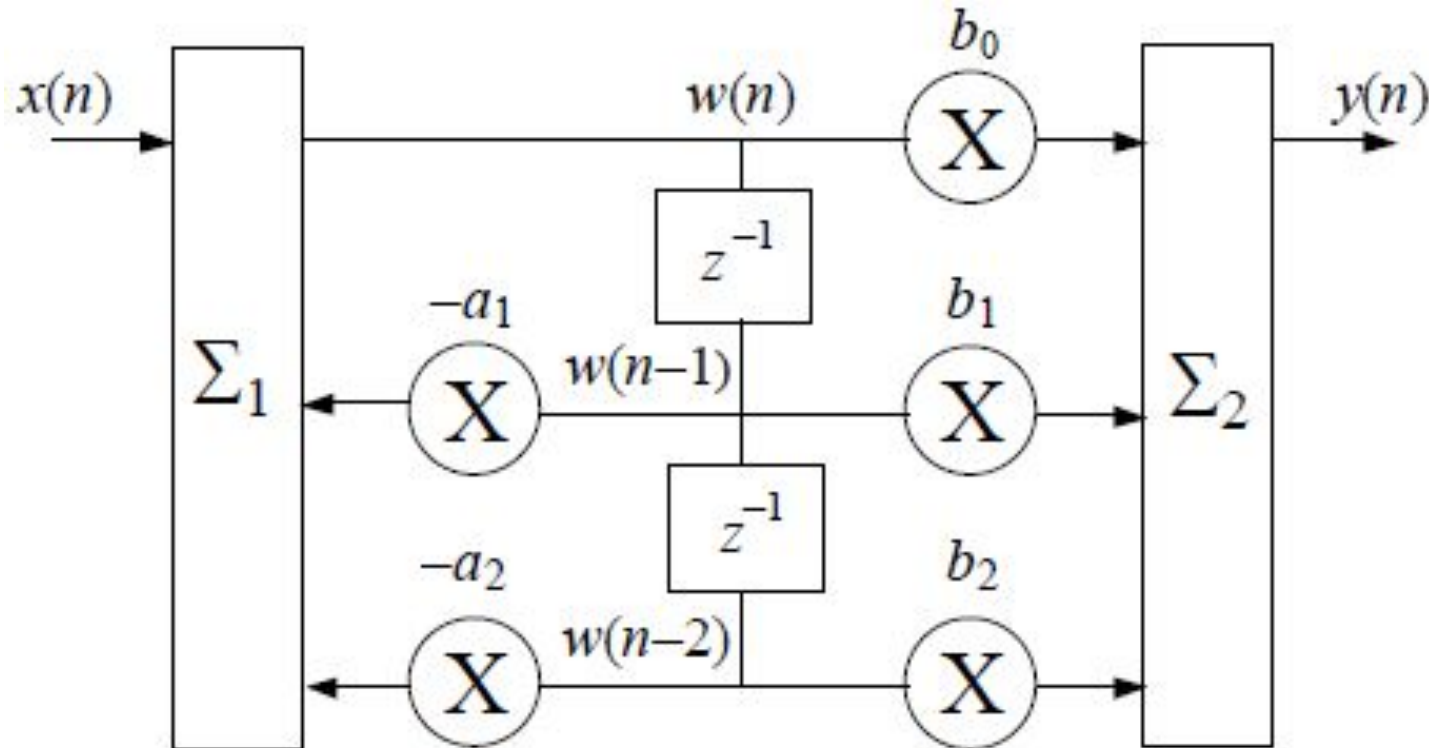
- $H_p(z) = 1/(1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2})$ – передавальна функція рекурсивної частини ланки;
- $H_H(z) = b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}$ – передавальна функція нерекурсивної частини ланки.
- Структура такої ланки має вдвічі меншу кількість елементів пам'яті z^{-1} .

2. Форми реалізації рекурсивних цифрових фільтрів

- Канонічна форма реалізації РФ описується двома різницевиими рівняннями:

$$w(n) = x(n) - a_1 w(n-1) - a_2 w(n-2),$$

$$y(n) = b_0 w(n) + b_1 w(n-1) + b_2 w(n-2), \quad (17)$$



Системи цифрової обробки інформації

Лекція 7

Нерекурсивні цифрові фільтри

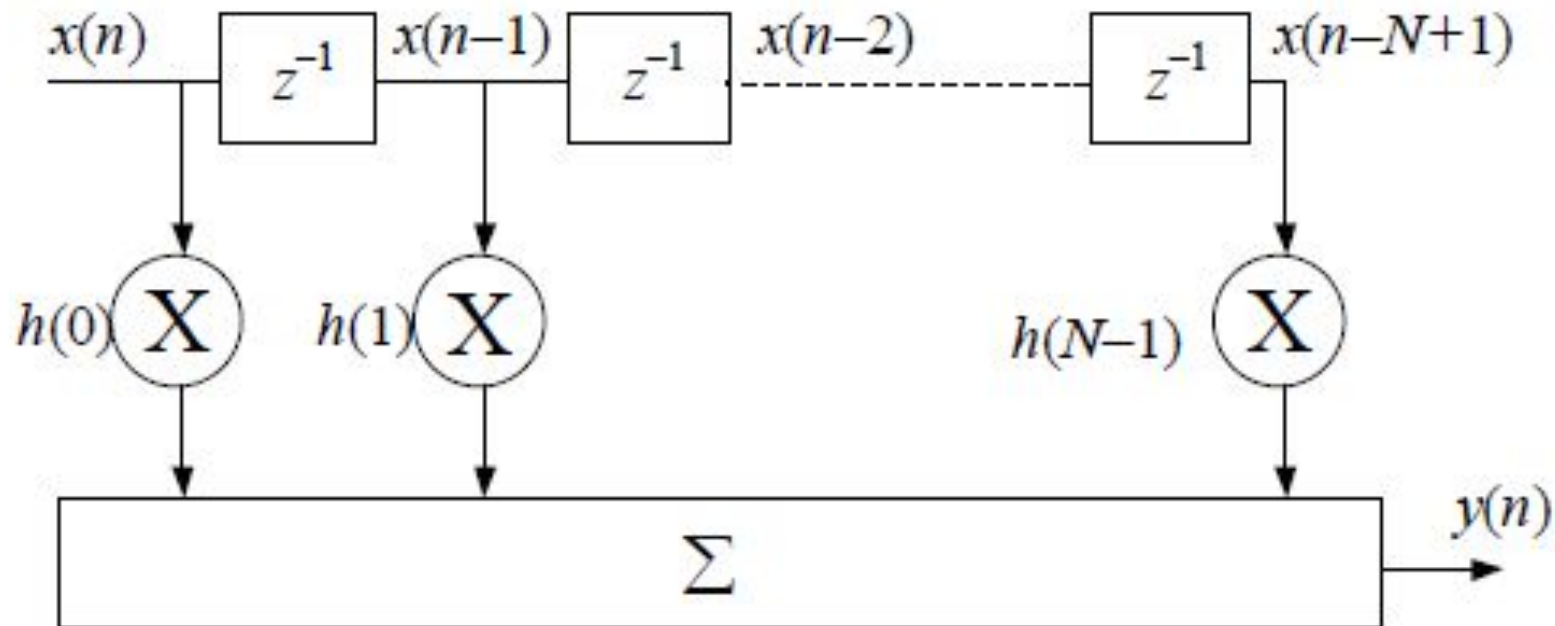
1. Пряма форма реалізації нерекурсивного цифрового фільтра
2. Передавальна функція та частотна характеристика нерекурсивного цифрового фільтра
3. Загальні принципи синтезу цифрового фільтра

1. Пряма форма реалізації нерекурсивного цифрового фільтра

- Нерекурсивному фільтру, що базується на прямому обчисленні дискретної часової згортки

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)x(n-m).$$

- відповідає структурна схема

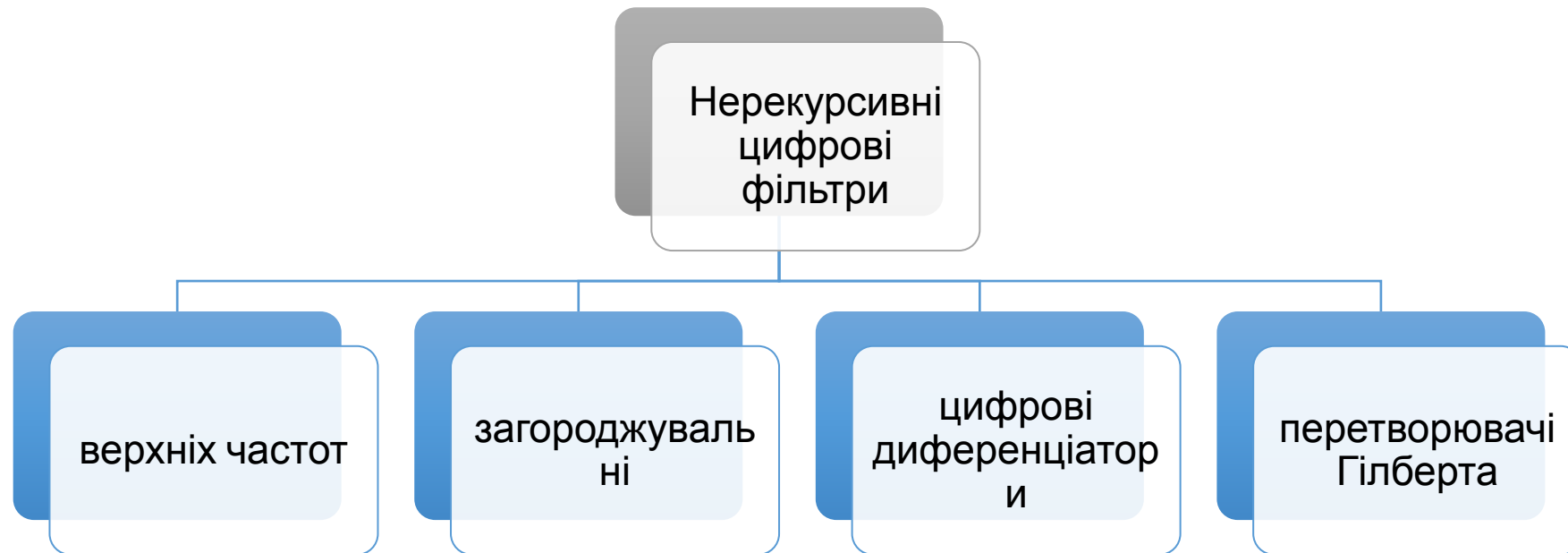


2. Передавальна функція та частотна характеристика нерекурсивного цифрового фільтра

- **Передавальна функція $H(z)$ та частотна характеристика $H(j\omega)$ НФ визначаються Z -перетворенням та перетворенням Фур'є його імпульсної характеристики:**

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n}; \quad H(j\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega nT_d}.$$

2. Передавальна функція та частотна характеристика нерекурсивного цифрового фільтра



3. Загальні принципи синтезу цифрового фільтра

- Синтез ЦФ в загальному випадку включає синтез передавальної функції та структури фільтра за його заданою частотною або імпульсною характеристикою та оцінювання потрібної розрядності чисел для коефіцієнтів фільтра та відліків вхідного, вихідного та внутрішніх сигналів.
- *Синтез передавальної функції ЦФ $H(z)$ за заданою частотною характеристикою $H_d(j\omega)$ полягає в її апроксимації та визначенні коефіцієнтів передавальної функції.* Під заданою (апроксимованою) частотною характеристикою ЦФ $H_d(j\omega)$ розуміється, як правило, його амплітудно-частотна характеристика $|H_d(j\omega)|$. Можливий також синтез ЦФ за заданою фазо-частотною характеристикою.

3. Загальні принципи синтезу цифрового фільтра

Методи синтезу ЦФ

аналітичні

- забезпечують рішення задачі апроксимації в замкненій аналітичній формі

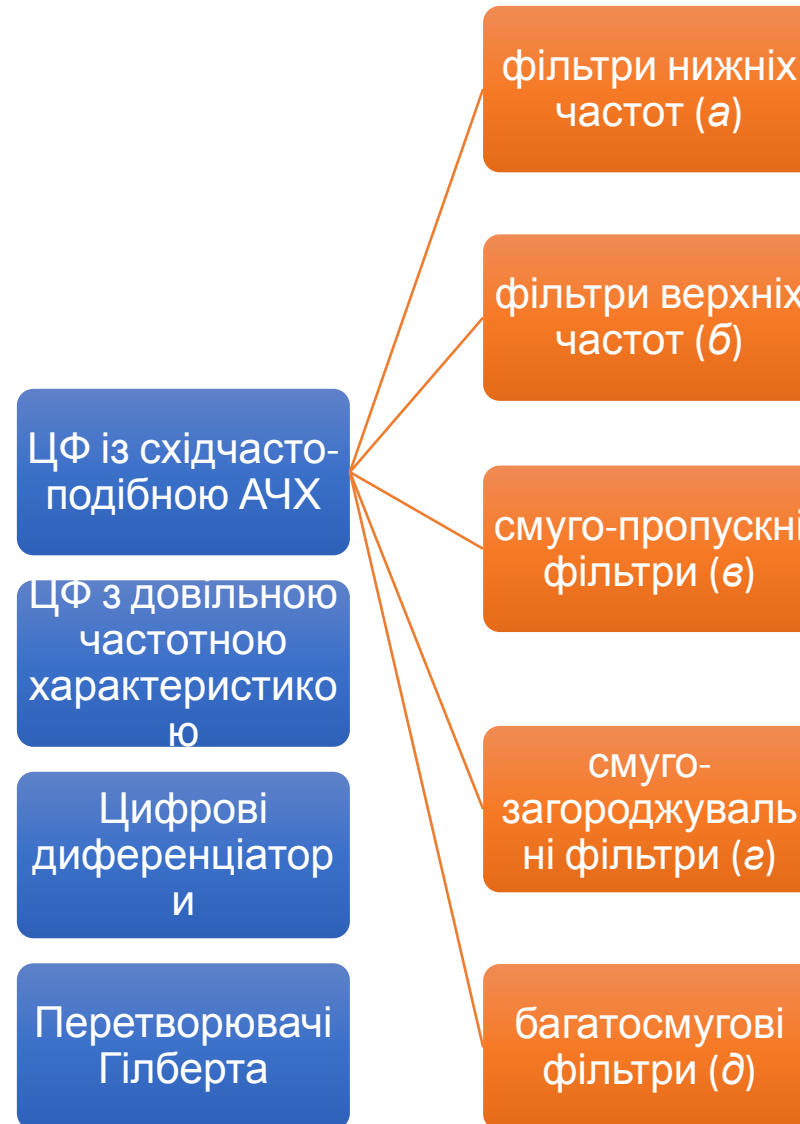
ітераційні

- поєднують аналітичний та чисельний підходи та використовують ітерації (наприклад, методи вагових функцій, частотної вибірки)

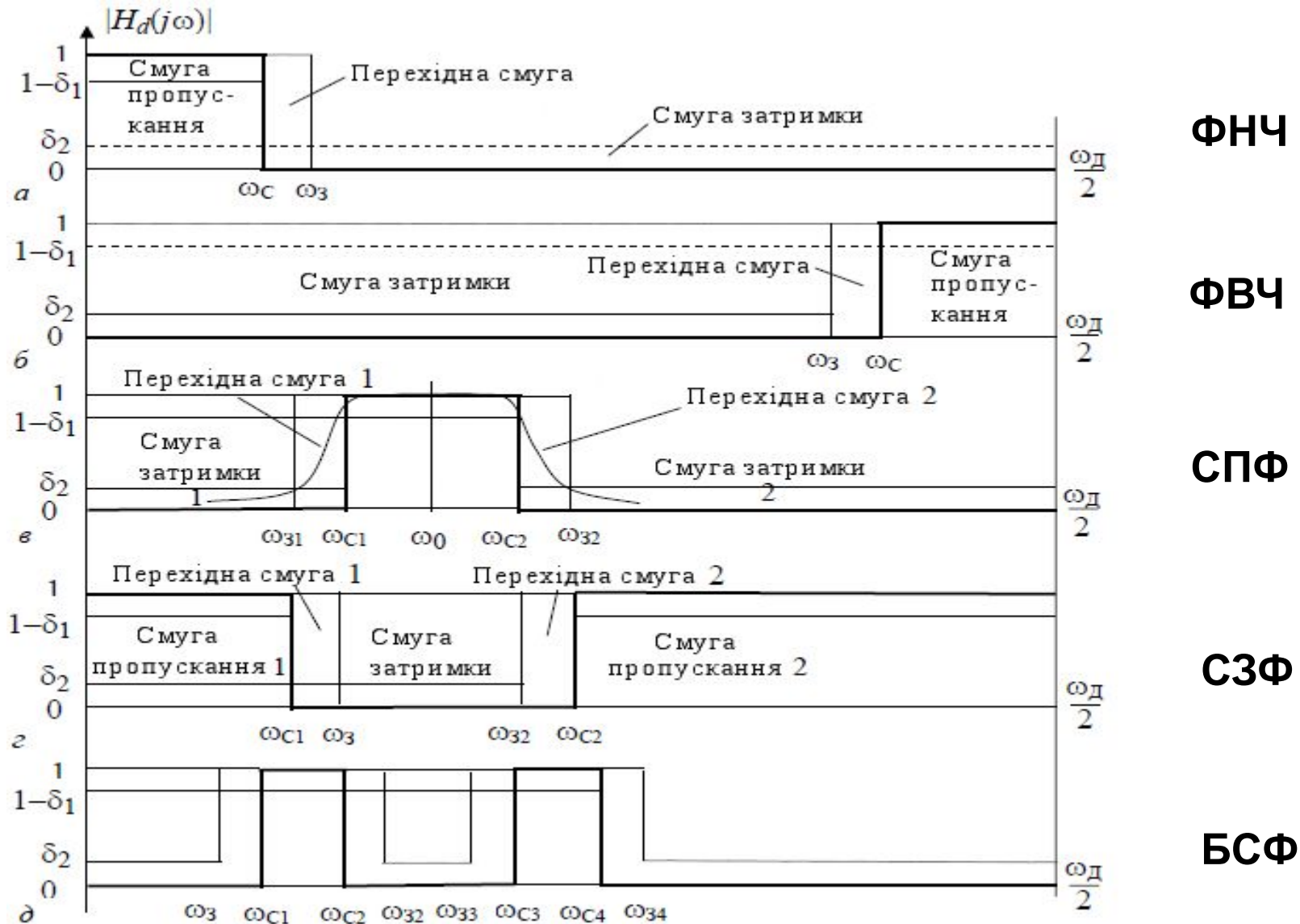
чисельні

- засновуються на апроксимації заданої частотної характеристики з мінімальною похибкою відповідно до певних критеріїв оптимальності

3. Загальні принципи синтезу цифрового фільтра



3. Загальні принципи синтезу цифрового фільтра



3. Загальні принципи синтезу цифрового фільтра

Вихідні дані для синтезу ЦФ

тип фільтра

частоти зрізу, затримки ω_c, ω_z

припустима нерівномірність АЧХ фільтра a_p , дБ

мінімальне загасання АЧХ в смузі затримки a_z , дБ

3. Загальні принципи синтезу цифрового фільтра

Визначення вимог

```
graph TD; A[Визначення вимог] --> B[Обчислення коефіцієнтів]; B --> C[Вибір структури]; C --> D[Аналіз впливу розрядності]; D --> E[Реалізація програмними та/або апаратними засобами];
```

Обчислення коефіцієнтів

Вибір структури

Аналіз впливу розрядності

Реалізація програмними та/або апаратними засобами

Системи цифрової обробки інформації

Лекція 8

Синтез рекурсивних фільтрів за аналоговим прототипом

1. Методи синтезу рекурсивних фільтрів за аналоговим прототипом.
2. Метод білінійного перетворення.

1. Методи синтезу рекурсивних фільтрів за аналоговим прототипом

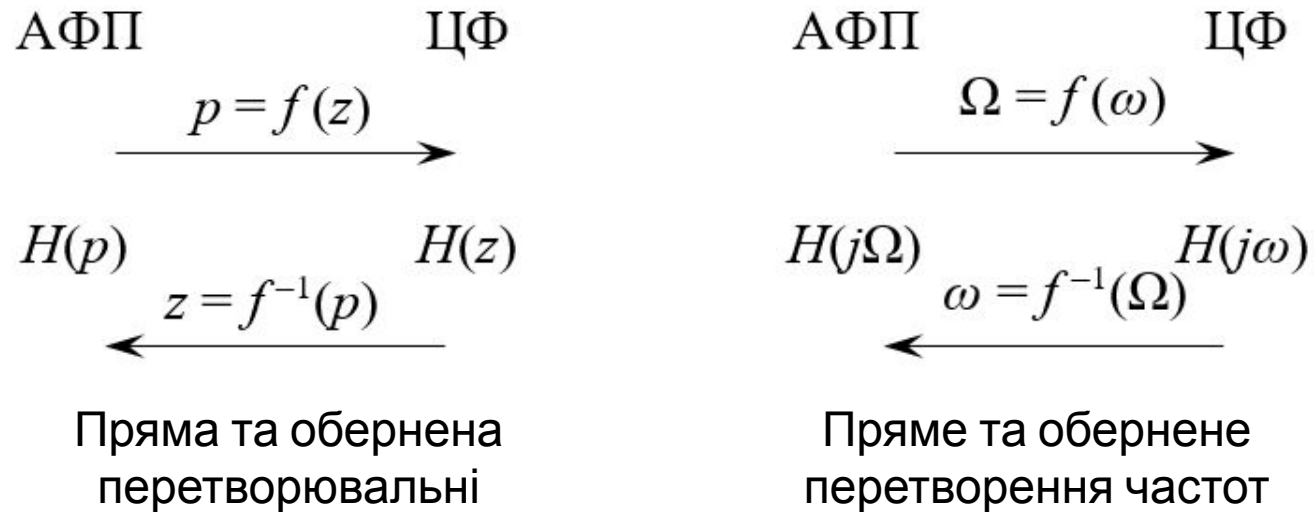
- Синтез РФ за аналоговим прототипом базується на встановленні взаємозв'язку між їх математичними описами та характеристиками в часовій або частотній області, що дозволяє використовувати для синтезу РФ добре розроблені методи синтезу аналогових фільтрів.
- Відомі такі методи синтезу РФ за аналоговим прототипом:

- *відображення диференціалів*, який полягає в дискретизації диференційного рівняння аналогового ланцюга, тобто переході від похідних до кінцевих різниць

$dx/dt \rightarrow x(n) - x(n - 1)$, $d^2x/dt^2 \rightarrow x(n) - 2x(n - 1) + x(n - 2)$ та ін.;

- *інваріантності імпульсних характеристик*, що базується на дискретизації імпульсної характеристики аналогового ланцюга;
- *метод нулів та полюсів* вигляду $p + p_{p(0)i} \rightarrow 1 - z^{-1} e^{-pp(0) iT_d}$, де $p_{p(0)i}$ – полюси та нулі перетвореної передавальної функції аналогового ланцюга;
- *метод білінійного перетворення* (інваріантності частотних характеристик).

2. Метод білінійного перетворення



Перетворювальні функції мають відповідати таким вимогам:

- ліва P -напівплощина $p = \sigma + j\Omega$, $\sigma < 0$, в якій розміщуються полюси стійкого АФП, має однократно відобразитися всередину кола одиничного радіуса $|z| < 1$, в якому на Z -площині розміщуються полюси стійкого ЦФ, тобто стійкому АФП має відповідати стійкий ЦФ;
- вся уявна вісь частот $j\Omega$ АФП, $\Omega = (0 \pm \infty)$, повинна однократно, тобто за один обхід, відобразитися на окружність одиничного радіуса Z -площини $e^{j\omega T_d}$, $\omega = (0 \pm \omega_d/2)$, забезпечуючи близькість частотних характеристик обох фільтрів.

2. Метод білінійного перетворення

- **Просте білінійне перетворення** можна застосовувати у випадку, коли аналоговий та цифровий фільтри *однакового типу* (ФНЧ – ФНЧ, ППФ – ППФ і т.д.).

- Йому відповідають перетворювальні функції та частотні перетворення вигляду

$$p = f(z) = \alpha \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}, \quad z = f^{-1}(p) = \frac{\alpha + p}{\alpha - p};$$

$$\Omega = \alpha \cdot \operatorname{tg} \frac{\omega T_{\text{д}}}{2} = f(\omega), \quad \omega = (2/T_{\text{д}}) \operatorname{arctg}(\Omega/\alpha),$$

де α – нормувальна константа.

2. Метод білінійного перетворення

- Один із способів визначення нормувальної константи α полягає в тому, що мінімальній частоті зрізу ЦФ ставиться у відповідність одиничне значення частоти зрізу нормалізованого АФП

$$\Omega_c = \alpha \cdot \operatorname{tg} \frac{\omega_c T_d}{2} = 1 \text{ рад/с.}$$

- Звідси

$$\alpha = \operatorname{ctg} \frac{\omega_c T_d}{2}.$$

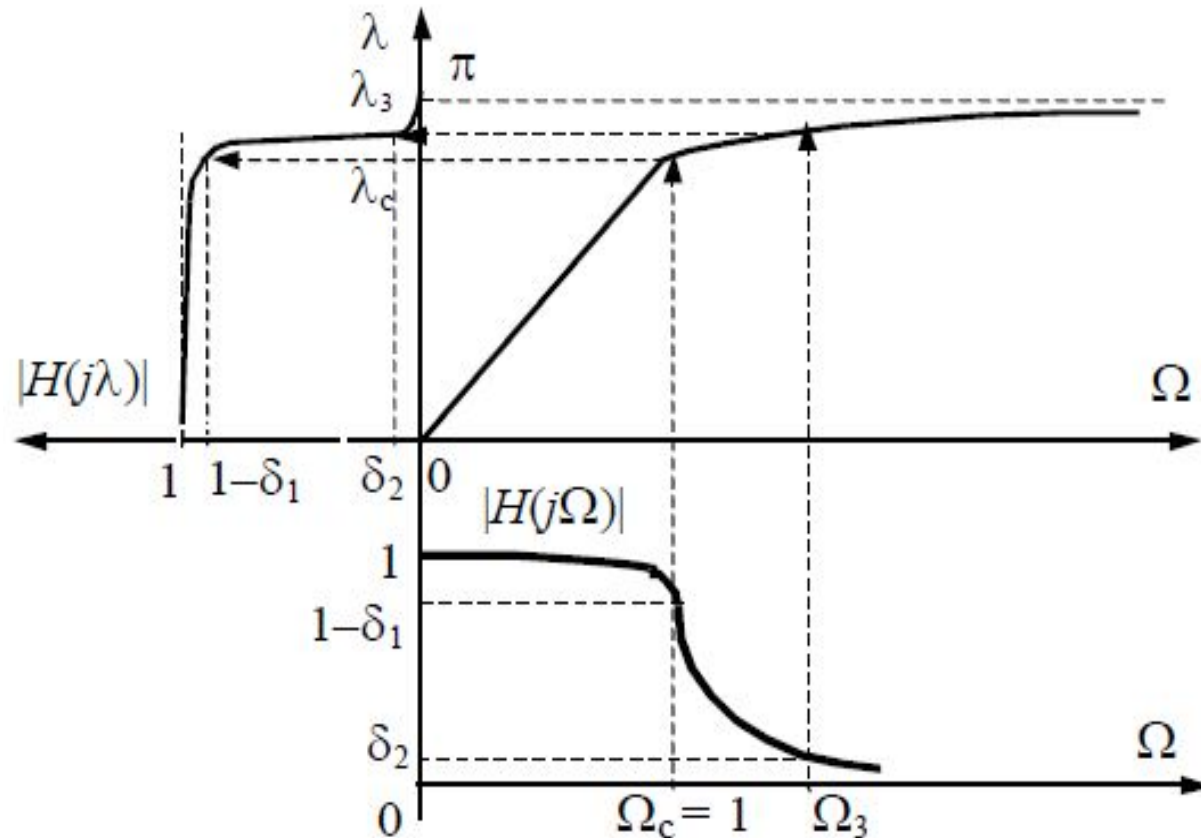
- В результаті переходу до нормованих частот ЦФ $\lambda = \omega T_d$ частотні перетворення приймають вигляд

$$\Omega = f(\lambda) = \operatorname{ctg} \frac{\lambda}{2} \operatorname{tg} \frac{\lambda}{2}; \quad \lambda = f^{-1}(\Omega) = 2 \operatorname{arctg}(\Omega \cdot \operatorname{tg} \lambda_c / \alpha)$$

- При $\Omega = 0$ λ також дорівнює нулю,
при $\Omega \rightarrow \infty$ $\lambda \rightarrow \pi$ ($\omega \rightarrow \omega_d/2$).

2. Метод білінійного перетворення

$$\Omega_c = f(\lambda_c) = 1; \quad \Omega_3 = f(\lambda_3) = \operatorname{ctg} \frac{\lambda_c}{2} \operatorname{tg} \frac{\lambda_3}{2}; \quad \lambda_3 = \omega_3 T_D.$$



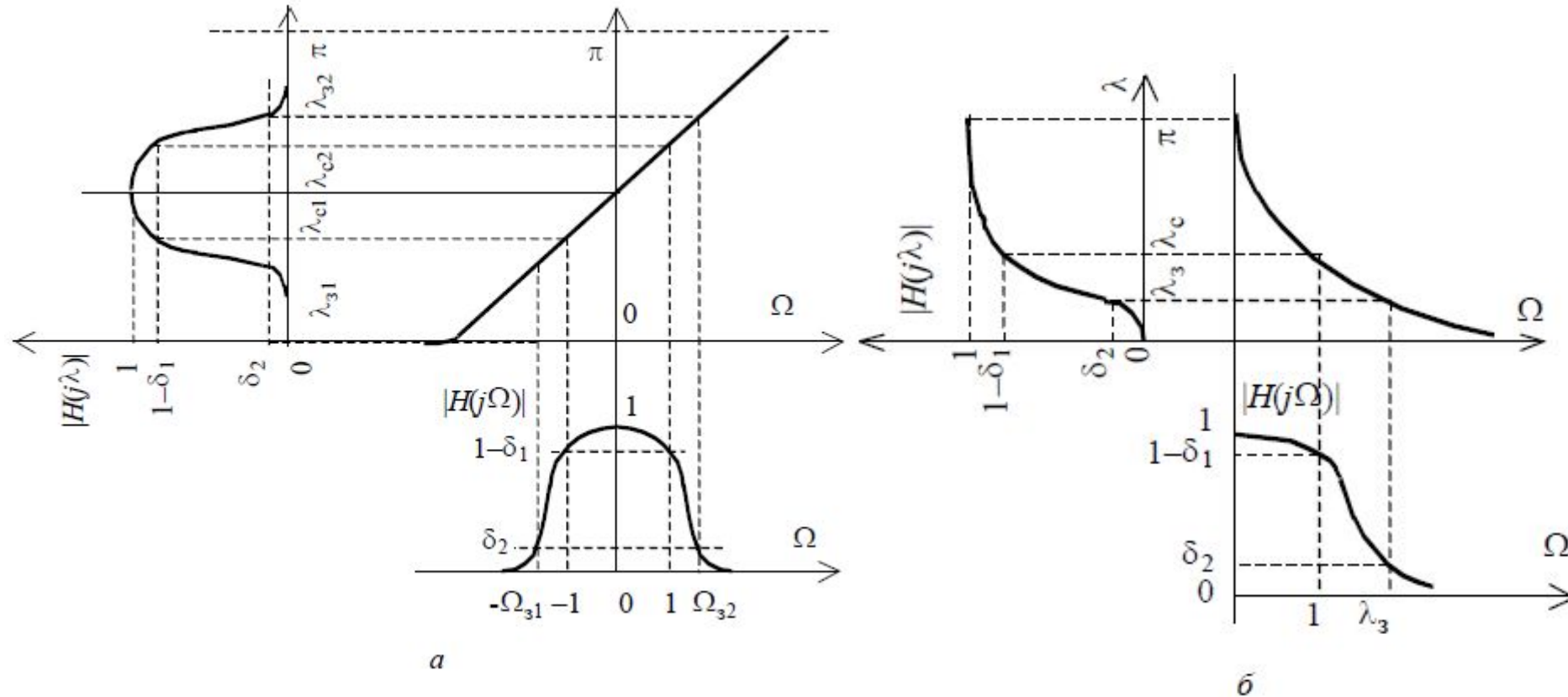
Перетворення частотної характеристики аналогового ФНЧ
на частотну характеристику цифрового ФНЧ

2. Метод білінійного перетворення

Таблиця 1 - Узагальнені перетворювальні

Тип ЦФ	Перетворення $p \rightarrow z$	Перетворення $\Omega \rightarrow \lambda$
ФНЧ	$p = \alpha(z - 1)/(z + 1)$	$\Omega_3 = \alpha \cdot \operatorname{tg}(\lambda_3/2)$
	$\alpha = \operatorname{ctg}(\lambda_c/2)$	$\Omega_c = 1$
ФВЧ	$p = \alpha(z + 1)/(z - 1)$	$\Omega_3 = \alpha \cdot \operatorname{ctg}(\lambda_3/2)$
	$\alpha = \operatorname{tg}(\lambda_c/2)$	$\Omega_c = 1$
ППФ	$p = \alpha(z^2 - 2\beta z + 1)/(z^2 - 1)$	$\Omega_{31,2} = \alpha(\beta - \cos \lambda_{31,2})/\sin \lambda_{31,2} $
	$\alpha = \operatorname{ctg}[(\lambda_{c2} - \lambda_{c1})/2]$	$\Omega_{c1,2} = \pm 1$
	$\beta = \cos[(\lambda_{c2} + \lambda_{c1})/2]/\cos[(\lambda_{c2} - \lambda_{c1})/2]$	
ПЗФ	$p = \alpha(z^2 - 1)/(z^2 - 2\beta z + 1)$	$\Omega_{31,2} = \alpha \sin \lambda_{31,2}/(\beta - \cos \lambda_{31,2}) $
	$\alpha = \operatorname{tg}[(\lambda_{c2} - \lambda_{c1})/2]$	$\Omega_{c1,2} = \pm 1$
	$\beta = \cos[(\lambda_{c2} + \lambda_{c1})/2]/\cos[(\lambda_{c2} - \lambda_{c1})/2]$	

2. Метод білінійного перетворення



Графіки узагальнених частотних перетворень для ЦФ ППФ (а) та ФВЧ (б)

2. Метод білінійного перетворення

- Синтез АФП включає вибір апроксимуючої функції, визначення порядку фільтра m , значень нулів p_{0i} та полюсів p_{pi} та передавальної функції за заданими граничними частотами $\Omega_c = 1, \Omega_s$ та допусками на похибки апроксимації заданої АЧХ $\delta_1, \delta_2 (a_n, a_s)$. Синтез виконується за довідниками або за допомогою спеціальних комп'ютерних програм.
- Нулі та полюси синтезованого АФП НЧ повністю визначають його передавальну функцію $H(p)$:

$$H(p) = C \prod_{i=1}^{m_1} (p - p_{0i}) / \prod_{i=1}^{m_1} (p - p_{pi}),$$

- де C – нормувальний множник; m_1 – кількість кінцевих нулів ($m_1 < m$).

2. Метод білінійного перетворення

- За допомогою узагальненої перетворювальної функції $p = f_{o\sigma}(z)$ передавальну функцію АФП НЧ можна безпосередню трансформувати в передавальну функцію ЦФ заданого типу:

$$H(z) = H(p)|_{p = f_{o\sigma}(z)}.$$

- Перетворюючи далі вираз для $H(z)$ до вигляду, що відповідає обраній структурі ЦФ – каскадній або паралельній, можна знайти *чисельні значення коефіцієнтів ланок* $b_{0J}, b_{1J}, b_{2J}, a_{1J}, a_{2J}$ потрібні для його реалізації.

2. Метод білінійного перетворення

Таблиця 2 - Вирази для нулів та полюсів ЦФ різного

Тип фільтра а	Перетворення	Примітка
ФНЧ		При $p_{0i} = \infty$ $z_{0i} = -1$
ФВЧ		При $p_{0i} = \infty$ $z_{0i} = 1$
ППЧ		При $p_{0i} = \infty$ $z_{0(2i-1,2i)} = \pm 1$
ПЗФ		При $p_{0i} = \infty$ $z_{0(2i-1, 2i)} =$ $= \beta \pm (\beta^2 - 1)^{1/2}$

2. Метод білінійного перетворення

- *Передавальні функції ланок другого порядку каскадної та паралельної структури знаходять об'єднанням в пари комплексно-спряжених полюсів фільтрів та групуванням їх у випадку каскадної форми з найближчими за розташуванням на комплексній Z -площині парами нулів, які можуть бути комплексно-спряженими або дійсними.*
- Кількість ланок (L) ЦФ визначається його порядком M : при парному порядку $L = M/2$, при непарному $L = (M + 1)/2$, при цьому одна ланка має перший порядок. Йому відповідають дійсні значення нуля та полюса.
- Порядок цифрових ФНЧ та ФВЧ співпадає з порядком аналогового ФНЧ-прототипу ($M = m$), а ППФ та ПЗФ – вдвічі більший ($M = 2m$).
- Коефіцієнти $b_{0J}, b_{1J}, b_{2J}, a_{1J}, a_{2J}$ ланок знаходяться через нулі та полюси цифрового фільтра.
- Результати синтезу перевіряються та уточнюються шляхом розрахунку ЧХ синтезованого фільтра: $H(j\omega) = H(z)|_{z=e^{j\omega T_d}}$.

2. Метод білінійного перетворення

Синтез РФ включає наступні етапи:

- На основі вихідних даних на синтез ЦФ (граничних частот $f_c, f_3, (\lambda_c, \lambda_3)$) та допусків на похибки апроксимації АЧХ a_{Π}, a_3) визначаються *вихідні дані на синтез АФП*, що визначають вимоги до його АЧХ: допуски на похибки апроксимації a_{Π}, a_3 – те самі, що й для ЦФ, та граничні частоти $\Omega_c = 1$ та $\Omega_3 = f_{об}(\lambda_3)$, які отримуються за допомогою частотних перетворювальних функцій $\Omega = f_{об}(\lambda)$ (табл. 1).
- За значеннями a_{Π}, a_3 та Ω_3 синтезується АФПНЧ: вибирається тип апроксимуючої функції, визначається порядок фільтра m та значення його полюсів та нулів: $p_{pi}, p_{0i}, i = 1, 2, \dots, m$. Від вигляду апроксимації залежить порядок фільтра m , як наслідок, складність його реалізації та швидкодія.

2. Метод білінійного перетворення

- За співвідношеннями (табл. 2) розраховуються значення полюсів та нулів ЦФ заданого типу:

$$z_{pk} = f_{об}^{-1}(p_{pi}); \quad z_{0k} = f_{об}^{-1}(p_{0i}),$$

- де $k = 1, 2, \dots, M$; M – порядок ЦФ: $M = m$ для ФНЧ, ФВЧ та $M = 2m$ для ППФ та ПЗФ.
- На комплексній Z -площині будується картина нулів та полюсів ЦФ та виконується об'єднання полюсів в комплексно-спряжені або дійсні пари $(z_{p1,2})_J$, які ставляться у відповідність J -ій ланці ЦФ; у випадку каскадної форми реалізації вони групуються з найближчими до них за розташуванням на комплексній Z -площині парами кінцевих комплексно-спряжених або дійсних нулів $(z_{p1,2})_J$, де $J = 1, 2, \dots, L$ – номер ланки, а $L = [M/2]_{цц}$ – кількість ланок ЦФ. При непарному порядку фільтра додається одна ланка 1 порядку.

2. Метод білінійного перетворення

- Обирається структура фільтра – каскадна або паралельна та розраховуються коефіцієнти її ланок $a_{1J}, a_{2J}, b_{0J}, b_{1J}, b_{2J}, B_{0J}, B_{1J}, C$.
- Розраховуються АЧХ та ФЧХ фільтра та співставляються з заданими.
- Знаходиться мінімальна необхідна розрядність коефіцієнтів фільтра, при якій АЧХ ще задовольняє заданим вимогам (за параметрами нерівномірності та загасання a_{Π}, a_3).

Системи цифрової обробки інформації

Лекція 9 Синтез нерекурсивних цифрових фільтрів

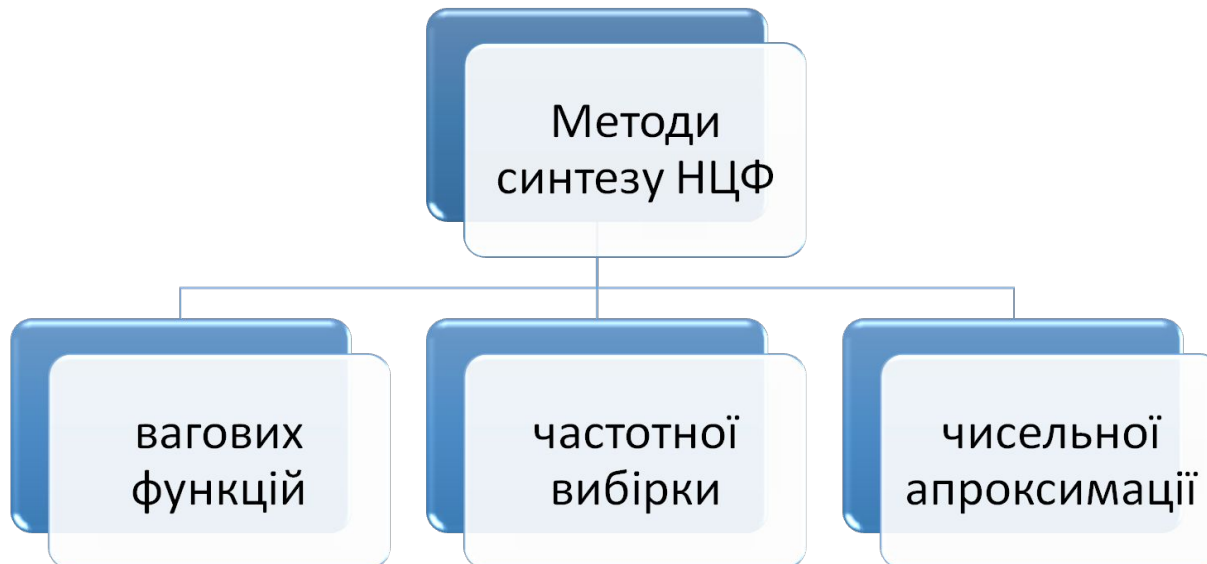
- 1 Метод вагових функцій
- 2 Метод частотної вибірки
- 3 Чисельні методи

1 Метод вагових функцій

- Синтез передавальної функції

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n}$$

нерекурсивних фільтрів (фільтрів КІХ-типу) зводиться до знаходження їх імпульсної характеристики $h(n)_N$ кінцевої довжини N .



1 Метод вагових функцій

- Методом вагових функцій імпульсна характеристика фільтра може бути безпосередньо знайдена за заданою частотною характеристикою фільтра $H_d(j\omega)$ за допомогою її зворотного перетворення Фур'є:

$$h_d(n) = \frac{T_d}{2\pi} \int_{-\frac{\omega_d}{2}}^{\frac{\omega_d}{2}} H_d(j\omega) e^{j\omega n T_d} d\omega .$$

1 Метод вагових функцій

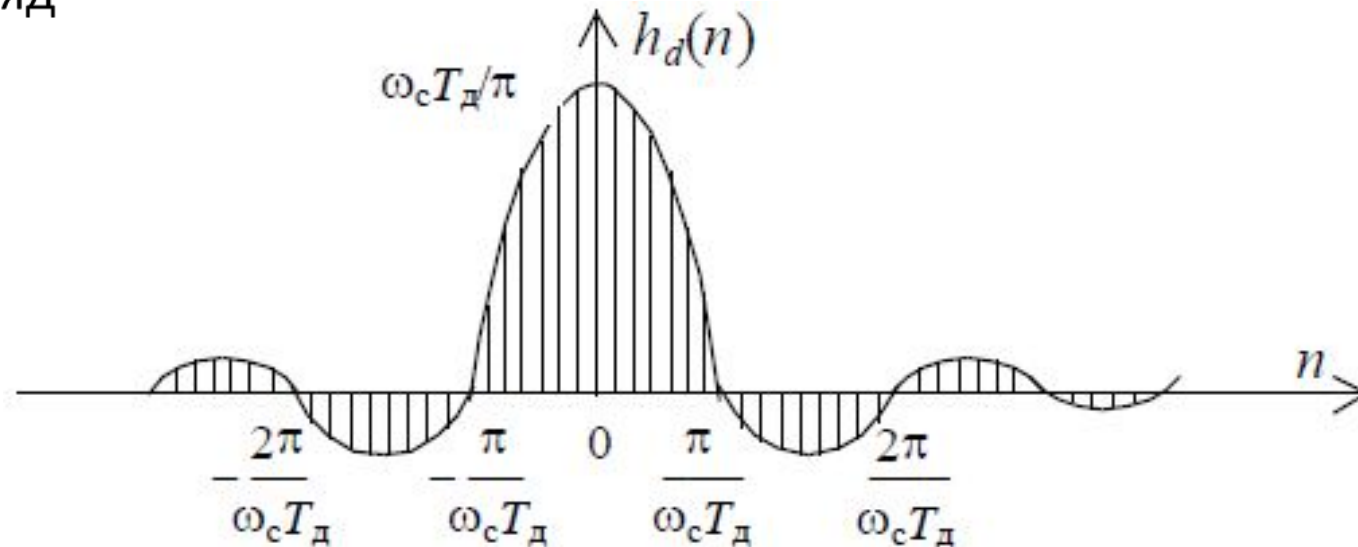
- Для цифрового ФНЧ з частотної характеристикою

$$H_d(j\omega) = \begin{cases} 1, & \text{при } -\omega_c \leq \omega \leq \omega_c \\ 0, & \text{при інших } \omega \end{cases}$$

імпульсна характеристика

$$h_d(n) = \frac{T_D}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} H_d(j\omega) e^{j\omega n T_D} d\omega = \frac{\omega_c T_D}{\pi} \cdot \frac{\sin \omega_c n T_D}{\omega_c n T_D} = \frac{\lambda_c}{\pi} \cdot \frac{\sin \lambda_c n}{\lambda_c n}$$

має вигляд



Імпульсна характеристика ідеального ФНЧ

1 Метод вагових функцій

- КІХ-фільтр, що може бути фізично реалізований з частотною характеристикою, близькою до заданої, можна отримати на основі імпульсної характеристики шляхом зсуву її вправо на $\frac{N-1}{2}$ відліків та урізання за межами $n < 0$ та $n \geq N$.
- При цьому частотна характеристика фільтра апроксимується урізаним рядом Фур'є з коефіцієнтами $h_d\left(n - \frac{N-1}{2}\right)$:

$$H(j\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h_d\left(n - \frac{N-1}{2}\right) e^{-j\omega n T_d}.$$

1 Метод вагових функцій

- Для покращення якості апроксимації в методі вагових функцій імпульсну характеристику НЦФ конструюють обмеженням довжини зсунутої імпульсної характеристики $h_d \left(n - \frac{N-1}{2} \right)$ за допомогою спеціальних вагових функцій або вікон $w(n)$ кінцевої довжини N :

$$h(n) = h_d \left(n - \frac{N-1}{2} \right) w(n).$$

- Просте урізання еквівалентно множенню на прямокутну вагову функцію $w_R(n) = 1, n = 0, \dots, N-1$.

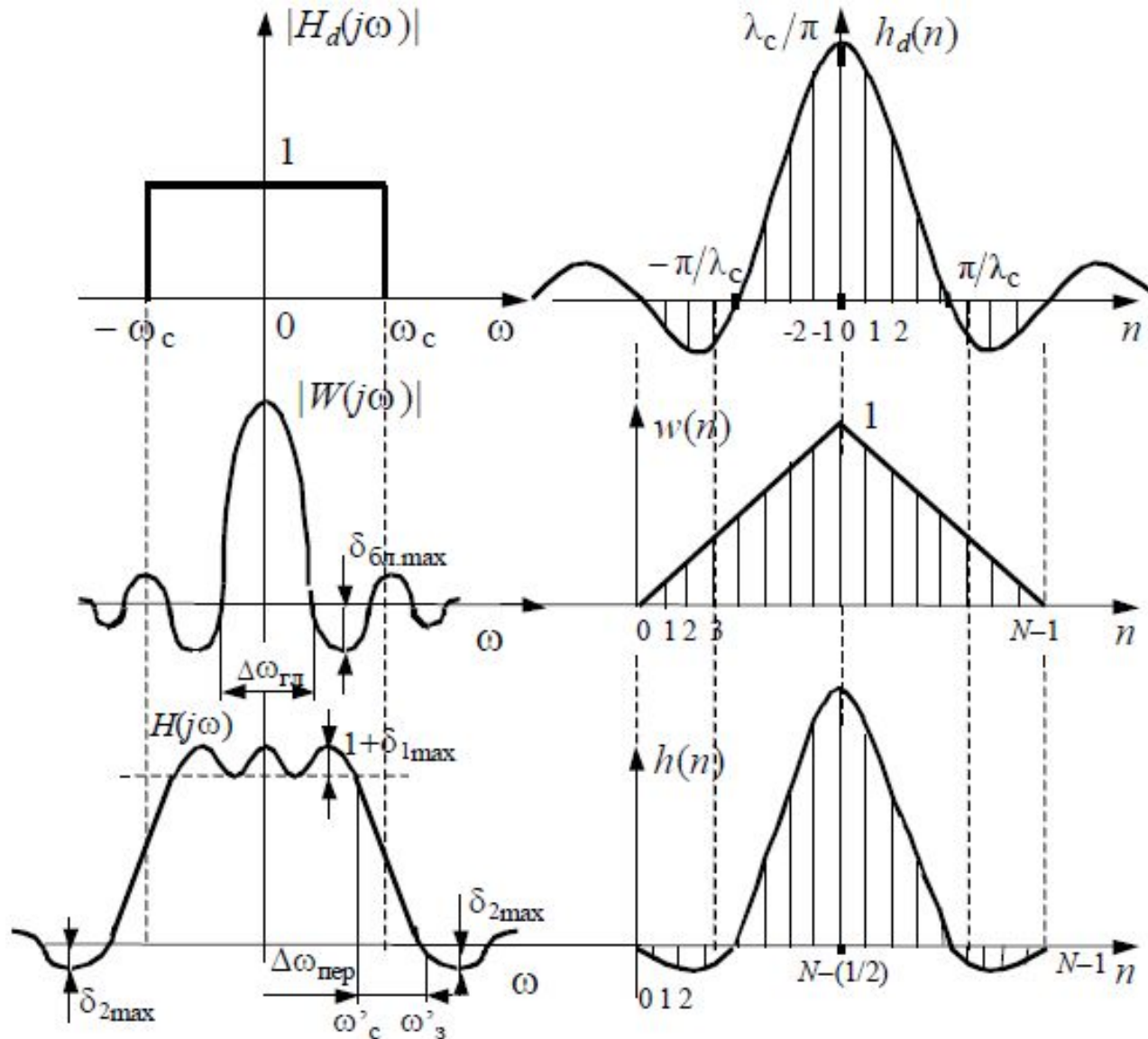
1 Метод вагових функцій

- Отриманій таким чином імпульсній характеристиці відповідає частотна характеристика фільтра $H(j\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega nT_d}$, що апроксимує задану. Вона є згорткою в частотній області заданої частотної характеристики $H_d(j\omega)$ з частотною характеристикою (Фур'є-образом) вагової функції $W(j\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} w(n)e^{-j\omega nT_d}$:

$$H(j\omega) = W(j\omega) * H_d(j\omega) = \frac{T_d}{2\pi} \int_{-\frac{\omega_d}{2}}^{\frac{\omega_d}{2}} H_d(j\Theta) W[j(\omega - \Theta)] d\Theta,$$

де * – символ згортки; Θ – змінна інтегрування.

1 Метод вагових функцій



Графічна ілюстрація синтезу НФ методом вагових функцій

1 Метод вагових функцій

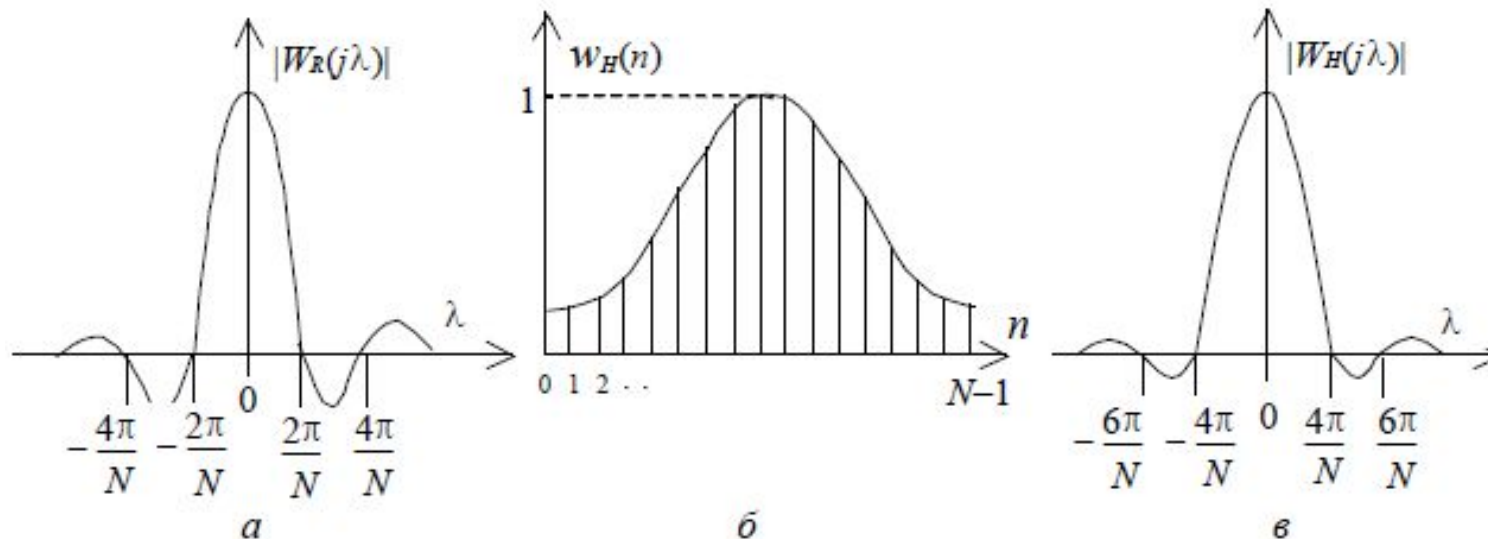
Параметри вагових

Тип вагової функції	D	$\delta_{\text{бп max}}, \text{дБ}$	$\delta_{2\text{max}}, \text{дБ}$
Прямокутна	2	-13,7	-21
Трикутна	4	-27	-26
Ханна	4	-31	-44
Хеммінга	4	-41	-53
Блекмана	6	-57	-74

1 Метод вагових функцій

- Частотна характеристика прямокутної вагової функції визначається виразом

$$W_R(j\omega) = e^{-j\omega \frac{N-1}{2} T_D} \cdot \frac{\sin(\omega N T_D / 2)}{\sin(\omega T_D / 2)}.$$

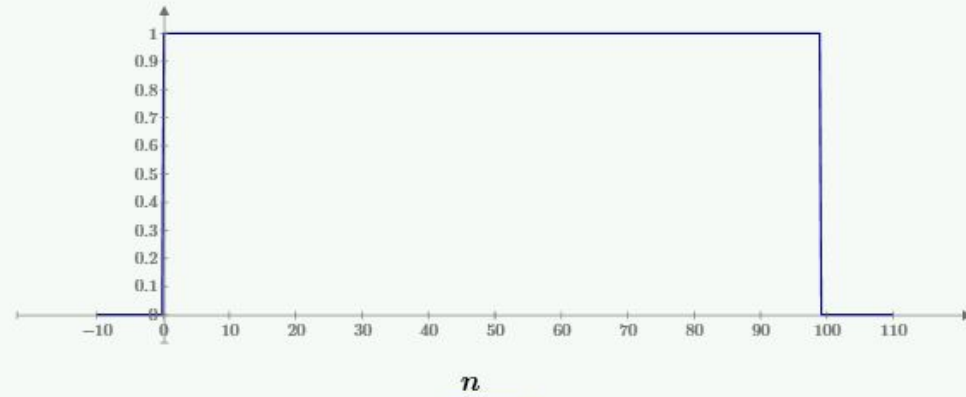


Частотна характеристика **прямокутної** вагової функції (а),
вагова функція **Хеммінга** (б) та її частотна характеристика (в)

1 Метод вагових функцій

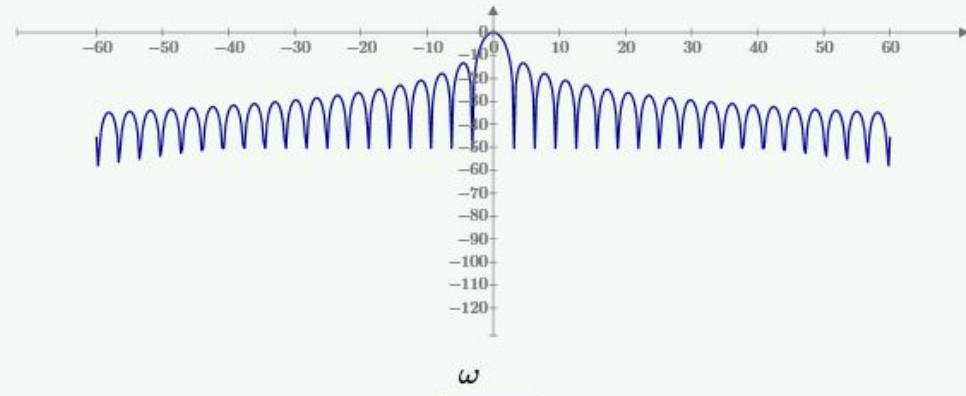
Square

$$w(n) := \text{if}(0 \leq n \leq N-1, 1, 0)$$



$w(n)$

$$S(\omega) := \frac{1}{K} \cdot \sum_{k=0}^{K-1} w(k) \cdot e^{-1i \cdot \omega \cdot k \cdot Td}$$



$Df(|S(\omega)|)$

1 Метод вагових функцій

- Трикутну вагову функцію довжиною N визначають згорткою двох прямокутних вагових функцій довжини $N/2$:

$$\begin{aligned} w_T(n) &= w_R(n) * w_R(n) = \\ &= \begin{cases} 2n/(N-1), & 0 \leq n \leq (N-1)/2 \\ 2 - 2n/(N-1), & (N-1)/2 \leq n \leq (N-1) \end{cases} \end{aligned}$$

- Частотна характеристика трикутної вагової функції дорівнює квадрату частотної характеристики прямокутної вагової функції половинної довжини:

$$|W_T(j\omega_d)| = \frac{\sin^2(\omega T_d N/4)}{\sin^2(\omega T/2)}$$

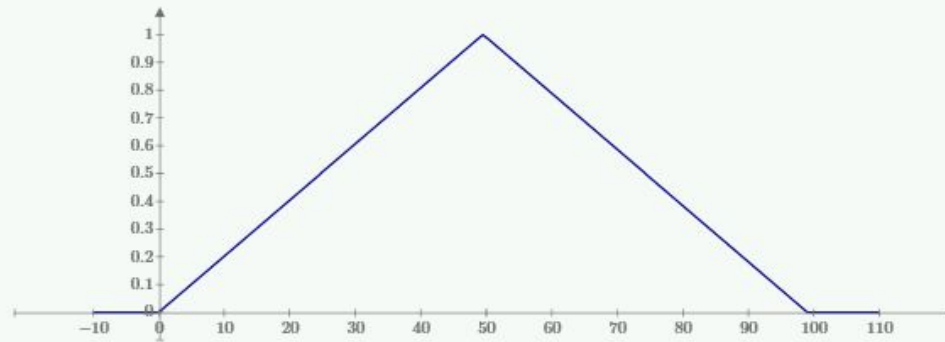
- У неї вдвічі більша ширина головної пелюстки ($D = 4$) при достатньо великому рівні бічних пелюсток. Бічні пелюстки мають ширину

$$\Delta\omega_{\text{бп}} = 2\omega_d/N \quad (\Delta\lambda_{\text{бп}} = 4\pi/N).$$

1 Метод вагових функцій

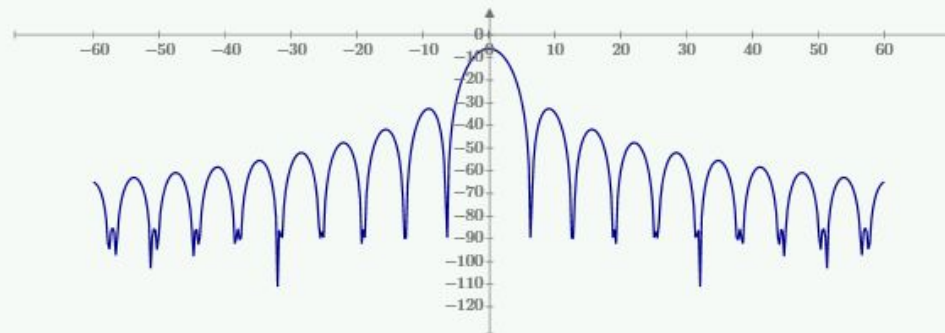
Barlett (Triangle)

$$A := \frac{N-1}{2} \quad w(n) := \text{if} \left(0 \leq n \leq N-1, 1 - \left| \frac{n}{A} - 1 \right|, 0 \right)$$



$w(n)$

$$S(\omega) := \frac{1}{K} \cdot \sum_{k=0}^{K-1} w(k) \cdot e^{-1i \cdot \omega \cdot k \cdot Td}$$



$Df(|S(\omega)|)$

1 Метод вагових функцій

- Узагальнена вагова функція Хеммінга описується виразом

$$w_H(n) = \alpha - (1 - \alpha) \cos \left[2\pi \frac{n}{N - 1} \right], n = 0, 1, \dots, N - 1.$$

- При $\alpha = 0,5$ вона відповідає ваговій функції Ханна, при $\alpha = 0,54$ – ваговій функції Хеммінга.
- Частотну характеристику вагової функції Хеммінга подають сумою трьох зважених частотних характеристик прямокутної вагової функції $W_R(j\omega)$ з центральними частотами $\omega_0 = 0$ та $\omega_{1,2} = \pm\omega_D/(N - 1)$:

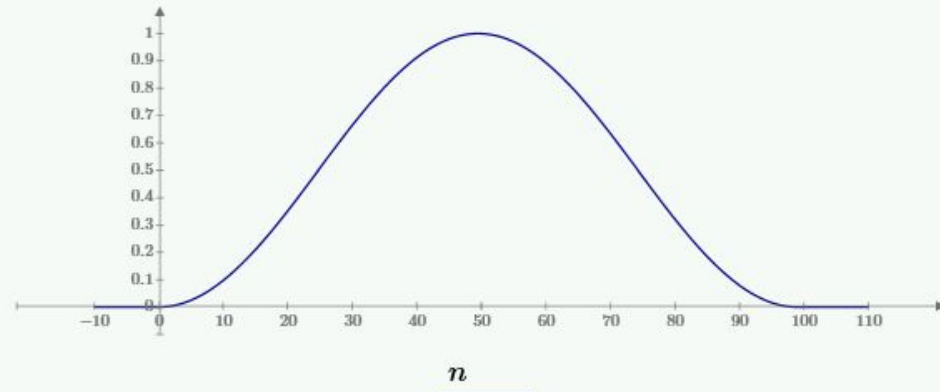
$$W_H(j\omega) = \alpha W_R(j\omega) + \frac{1 - \alpha}{2} W_R \left[j \left(\omega - \frac{\omega_D}{N - 1} \right) \right] + \frac{1 - \alpha}{2} W_R \left[j \left(\omega + \frac{\omega_D}{N - 1} \right) \right].$$

1 Метод вагових функцій

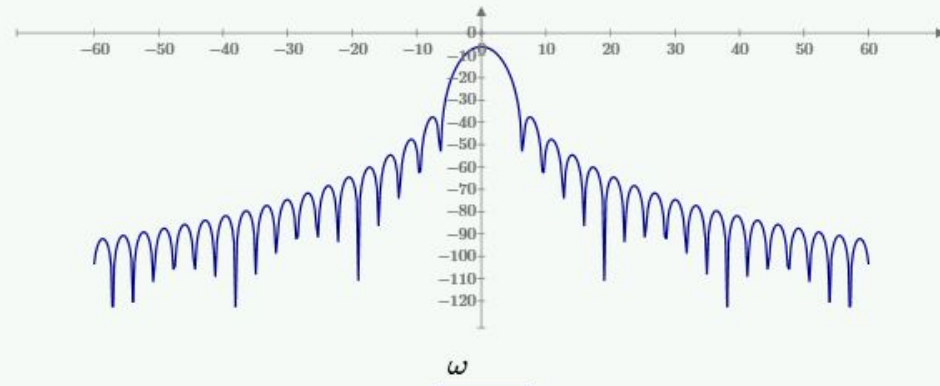
Hann

$$\alpha := 0.5 \quad 1 - \alpha = 0.5$$

$$f_H(n) := \alpha - (1 - \alpha) \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{n}{N-1}\right) \quad w(n) := \text{if}(0 \leq n \leq N-1, f_H(n), 0)$$



$$S(\omega) := \frac{1}{K} \cdot \sum_{k=0}^{K-1} w(k) \cdot e^{-i\omega \cdot k \cdot Td}$$



1 Метод вагових функцій

$$N := 100 \quad Td := \frac{2}{N} \quad Df(x) := \text{if}(x = 0, 1, 20 \cdot \log(x))$$

Hamming

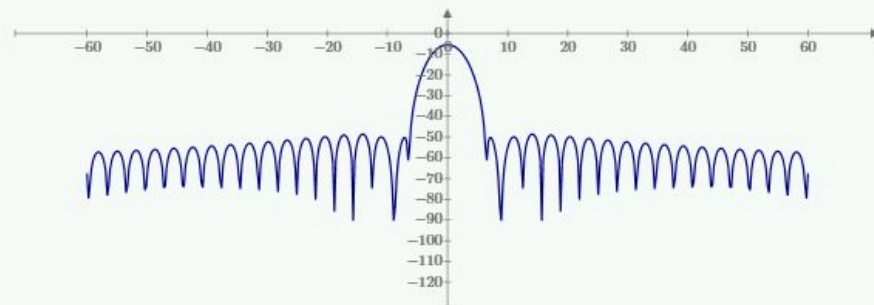
$$\alpha := 0.53836 \quad 1 - \alpha = 0.46164$$

$$f_H(n) := \alpha - (1 - \alpha) \cdot \cos\left(2 \pi \cdot \frac{n}{N-1}\right) \quad w(n) := \text{if}(0 \leq n \leq N-1, f_H(n), 0)$$



$w(n)$

$$K := 100 \quad S(\omega) := \frac{1}{K} \cdot \sum_{k=0}^{K-1} w(k) \cdot e^{-1i \cdot \omega \cdot k \cdot Td}$$



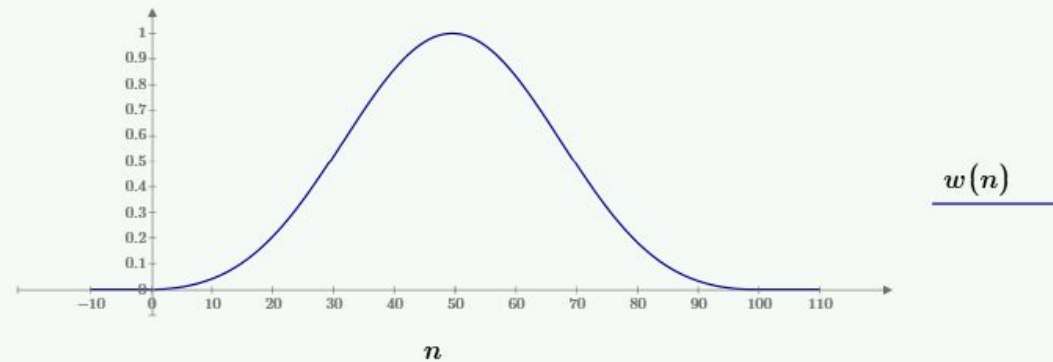
$Df(|S(\omega)|)$

1 Метод вагових функцій

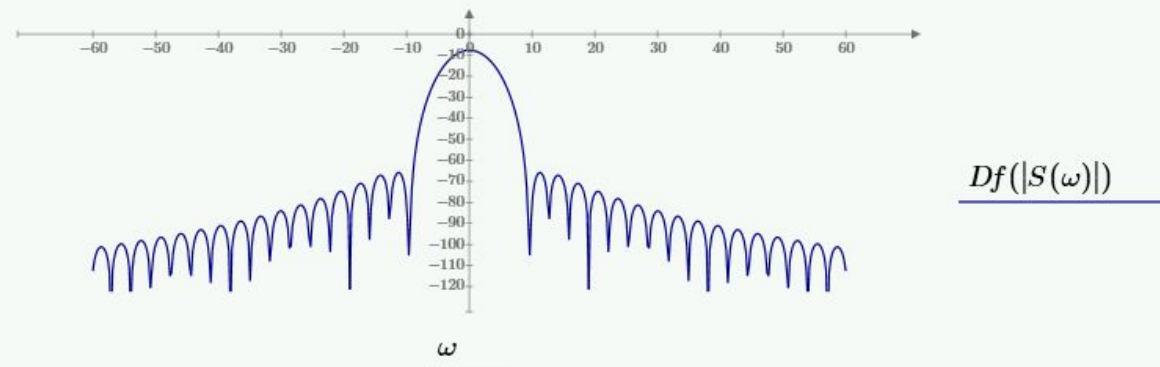
Blackman

$$a := \begin{bmatrix} 0.42 \\ 0.5 \\ 0.08 \end{bmatrix}$$

$$f_B(n) := a_0 - a_1 \cdot \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + a_2 \cdot \cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right) \quad w(n) := \text{if}(0 \leq n \leq N-1, f_B(n), 0)$$



$$S(\omega) := \frac{1}{K} \cdot \sum_{k=0}^{K-1} w(k) \cdot e^{-i\omega \cdot k \cdot Td}$$



1 Метод вагових функцій

- Вагова функція *Блекмана* має вигляд

$$w_B(n) = 0.42 - 0.5 \cos\left(2\pi \frac{n}{N-1}\right) + 0.08 \cos\left(4\pi \frac{n}{N-1}\right).$$

- Частотна характеристика вагової функції Блекмана порівняно з ваговою функцією Хеммінга містить дві додаткові складові $0,04W_R[j(\omega \pm 2\omega_d/N)]$. У неї ширша (в 1,5 рази) головна пелюстка ($D = 6$), але дуже малий рівень бічних пелюсток. Ширина бічних пелюсток $\Delta\omega_{бп} = \omega_d/N$ ($\Delta\lambda_{бп} = 2\pi/N$).
- При синтезі НФ використовуються також ефективні вагові функції Ланцоша, Каппеліні, Дольфа-Чебишева, Блекмана-Харріса та ін., які відповідають певним критеріям оптимальності. Однак особливе значення та застосування серед них має клас вагових функцій (*вікон*) *Кайзера*.

1 Метод вагових функцій

- Параметри вагових функцій Кайзера можуть змінюватися в широких межах за допомогою коефіцієнта β , який входить до математичного виразу цієї функції

$$w_C(n) = I_0 \left(\beta \sqrt{1 - \left[1 - \frac{2n}{(N-1)} \right]^2} \right) / I_0(\beta),$$
$$n = 0, 1, \dots, N - 1,$$

де $I_0(x)$ – модифікована функція Бесселя першого роду нульового порядку.

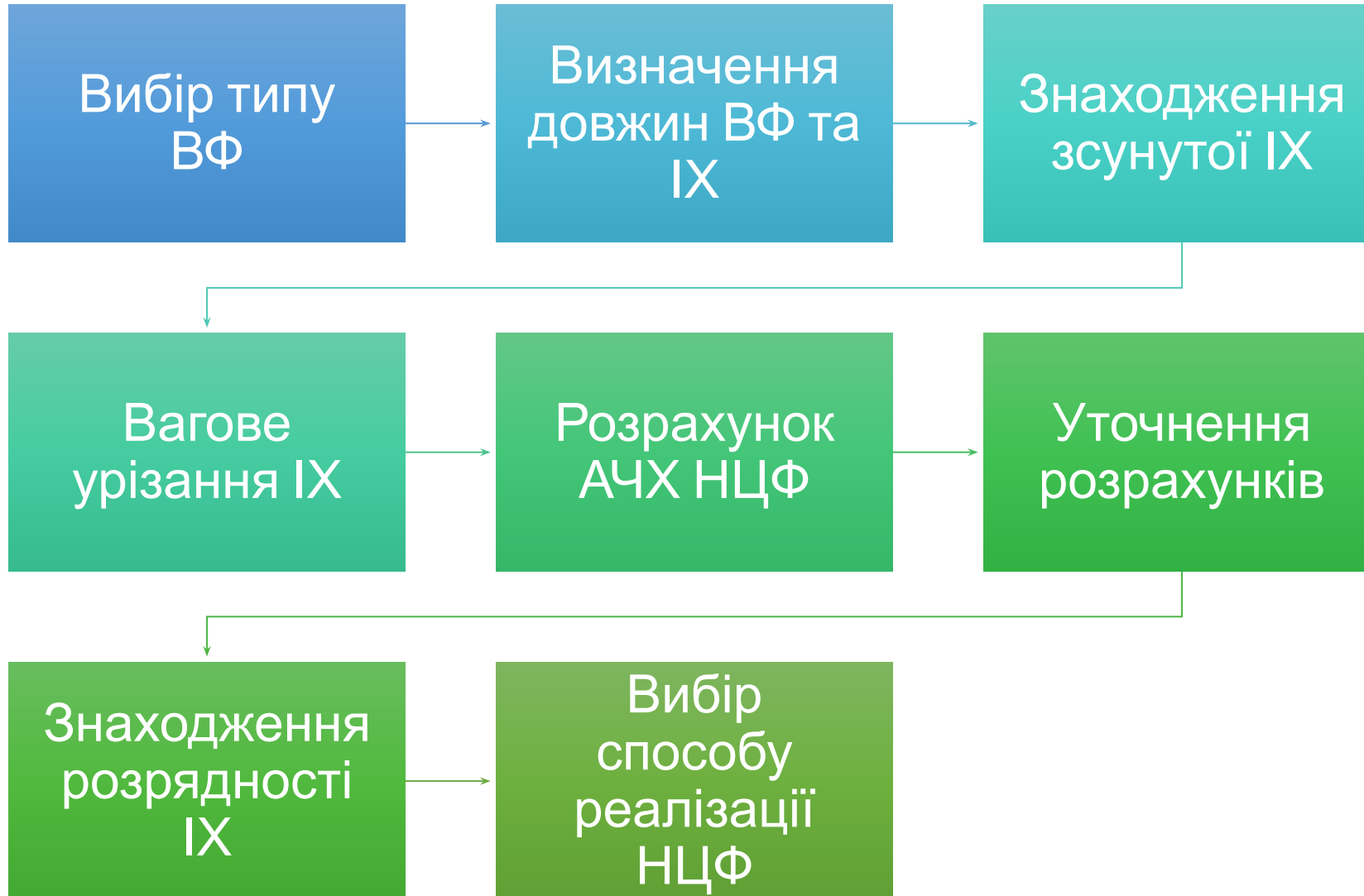
- Кайзером шляхом чисельного інтегрування згортки складена таблиця та отримані емпіричні формули, які дозволяють безпосередньо за заданим затуханням $a_3 = |\delta_{2\max}|$ (дБ) частотної характеристики $H(j\omega)$, що апроксимує ідеальний ФНЧ, обрати або розрахувати значення D -фактора та коефіцієнта β :

$$D \approx (a_3 - 7,95) / 14,36 \text{ при } a_3 > 21 \text{ дБ};$$

$$\beta = 0,1102(a_3 - 8,7) \text{ при } a_3 > 50 \text{ дБ};$$

$$\beta = 0,5842(a_3 - 21)^{0,4} + 0,07886 \text{ при } 21 < a_3 < 50 \text{ дБ}$$

2. Метод вагових функцій



2 Метод частотної вибірки

- Методом частотної вибірки *імпульсна характеристика* фільтра $h(n)_N$ знаходиться за допомогою зворотного дискретного перетворення Фур'є (ЗДПФ) частотної характеристики $H_d(j\omega k)$, отриманої шляхом дискретизації за частотою заданої частотної характеристики $H_d(j\omega)$.
- Дискретизація здійснюється в смузі частот $0 - \omega_{\text{д}}$ шляхом переходу від безперервних значень частоти ω до дискретних $\omega_k = \Delta\omega_k$ з кроком $\Delta\omega = \omega_{\text{д}}/N$, де $k = 0, 1, \dots, N-1$ – номер частотної вибірки; N – кількість точок дискретизації.
- Крок дискретизації за частотою $\Delta\omega$ обирається з умови $\Delta\omega \leq \Delta\omega_{\text{пер}}/(L+1)$, де $\Delta\omega_{\text{пер}}$ – перехідна смуга фільтра; L – кількість вибірок частотної характеристики фільтра, що розміщуються в перехідній смузі, $L = 0, 1, 2, \dots$
- В результаті отримується **дискретизована частотна характеристика** фільтра (ДЧХ) $H_d(j\omega_k) = H_d(j\omega)|_{\omega = \omega_k}$.

2 Метод частотної вибірки

- ДЧХ $H_d(j\omega_k)$ може бути поставлена у відповідність імпульсна характеристика $h_p(n)$, яка визначається за допомогою зворотного дискретного перетворення Фур'є:

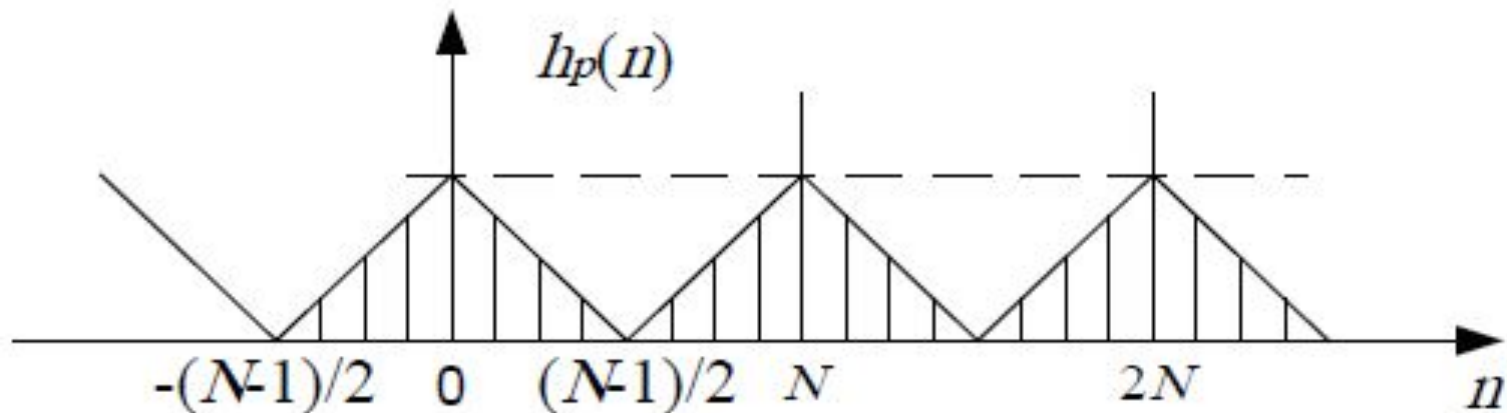
$$h_p(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H_d(j\omega_k) e^{j\omega_k n T_d} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H_d(j\omega_k) e^{j\omega_k (n+iN) T_d},$$

де $i = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$

- Вона є періодичною функцією з періодом $N_p = N$ тому, що *дискретизація в частотній області призводить до періодизації в часовій*.
- В якості імпульсної характеристики НФ обирається один період імпульсної характеристики $h_p(n)$, зсунутий вправо на $(N - 1)/2$ відліків (для забезпечення можливості фізичної реалізації) та урізаний прямокутною ваговою функцією (для отримання КІХ-фільтра)

$$h(n) = h_p \left(n - \frac{N - 1}{2} \right), \quad n = 0, 1, \dots, N - 1.$$

2 Метод частотної вибірки



- За імпульсною характеристикою $h(n)$ знаходиться частотна характеристика фільтра $H(j\omega)$, яка апроксимує задану:

$$\begin{aligned}
 H(j\omega) &= \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega nT_d} = \\
 &= e^{-j\omega \frac{N-1}{2}T_d} \cdot \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H_d(\omega_k) \frac{\sin \frac{\omega - \omega_k}{2} NT_d}{\sin \frac{\omega - \omega_k}{2} T_d}.
 \end{aligned}$$

- Множником $e^{-j\omega \frac{N-1}{2}T_d}$ визначається ФЧХ фільтра

$$\varphi(\omega) = -\omega \frac{N-1}{2} T_d,$$

- суворо лінійна внаслідок симетрії імпульсної характеристики.

2 Метод частотної вибірки

- АЧХ фільтра на частотах $\omega = \omega_k$ точно співпадає з частотними вибірками ДЧХ: $H(\omega_k) = H_d(\omega_k)$, а на частотах $\omega \neq \omega_k$ $H(\omega) \neq H_d(\omega)$ – відхиляється від заданої на величину похибки апроксимації.
- *Якість апроксимації* даним методом залежить від *кількості вибірок частотної характеристики в перехідній смузі L та їх значень $H_{i \text{ ОПТ}}$ ($i = 1, 2, \dots, L$), які роблять апроксимуючу функцію пологішою. Різним значенням L відповідають такі наближені значення максимального рівня бічних пелюсток:*
 - $L = 0: \delta_{2 \text{ макс}} \approx -20 \text{ дБ}; \quad L = 1: \delta_{2 \text{ макс}} \approx -40 \text{ дБ};$
 - $L = 2: \delta_{2 \text{ макс}} \approx -50-60 \text{ дБ}; \quad L = 3: \delta_{2 \text{ макс}} \approx -80-100 \text{ дБ}.$

3 Чисельні методи

- Чисельні (оптимальні) методи синтезу ЦФ реалізуються на комп'ютері за допомогою процедур безпосередньої апроксимації заданих частотних характеристик фільтра відповідно до визначених критеріїв мінімізації помилок апроксимації.
- Основними при апроксимації НІХ та КІХ-фільтрів є критерії мінімуму середнього квадрата помилки (СКП) та найкращого чебишевського рівнохвильового наближення (мінімаксний критерій).
- Цільова функція алгоритму мінімізації СКП визначається виразом

$$E = \sum_{i=1}^M [|H(j\omega_i)| - |H_d(j\omega_i)|]^2,$$

- де $H_d(j\omega_i)$, $H(j\omega_i)$ – задана та апроксимуюча частотні характеристики фільтра, обчислювані на дискретній множині частот ω_i .

3 Чисельні методи

- Мінімаксний критерій полягає в мінімізації на множині частот ω максимальних значень зваженого функціонала помилки:

$$E(\omega) = W(\omega) |H(j\omega) - H_d(j\omega)|,$$

- де $W(\omega)$ – позитивна вагова функція.
- Пошук оптимальних значень коефіцієнтів фільтра при чисельній апроксимації здійснюється методами найменших квадратів, лінійного програмування, нелінійної оптимізації (алгоритм Флетчера-Пауелла для НІХ-фільтрів) та багатократної заміни Ремеза (для фільтрів з чебишевською апроксимацією КІХ та НІХ-типу).

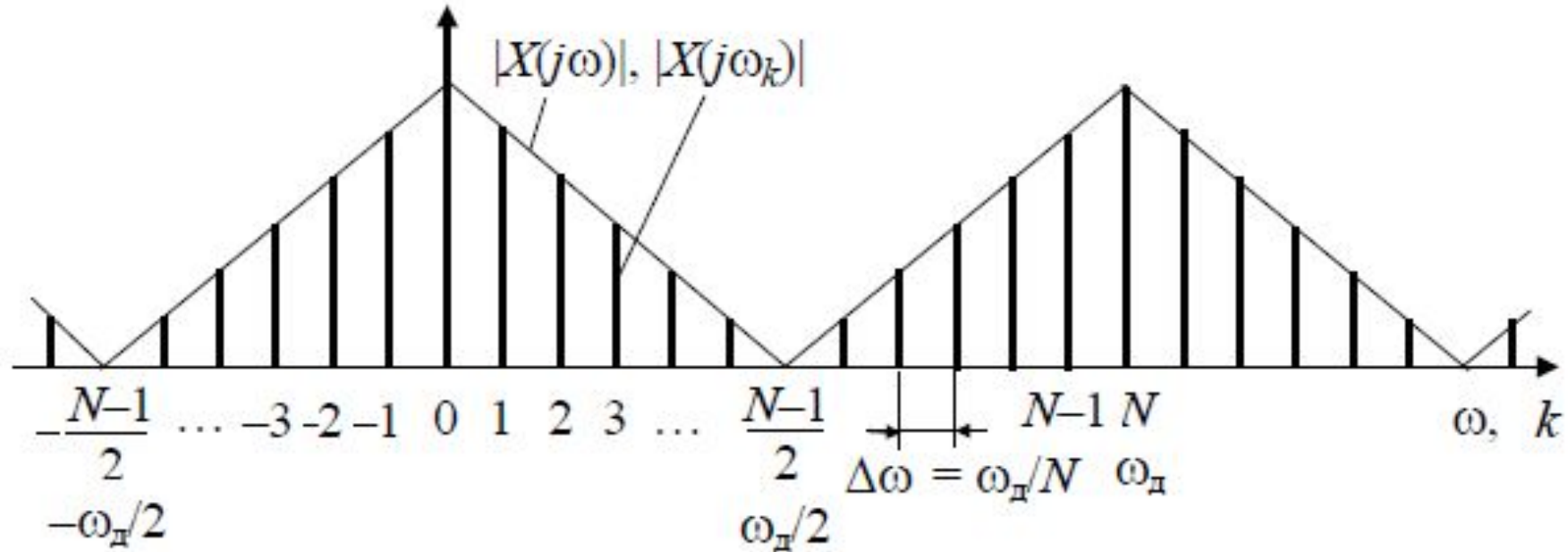
Системи цифрової обробки інформації

Лекція 10

Дискретне перетворення Фур'є та його властивості

1. Сутність дискретного перетворення Фур'є
2. Властивості дискретного перетворення Фур'є
3. Алгоритм цифрової фільтрації послідовностей кінцевої довжини на основі ДПФ

1. Сутність дискретного перетворення Фур'є



- ДПФ_N[x(n)] = $X(j\omega) \Big|_{\omega=\omega_k} = \sum_{n=0}^{N_1-1} x(n)e^{-j\omega_k n T_d}$,
- де $\Delta\omega = \omega_d/N$ – крок дискретизації по частоті;
- N – кількість обчислюваних частотних вибірок ДПФ в смузі частот $0 \div \omega_d$, в загальному випадку не рівне N_1 ;
- $k = 0, 1, \dots, N - 1$ – номер частотної вибірки.

1. Сутність дискретного перетворення Фур'є

- Відповідно до кількості обчислюваних частотних вибірок N ДПФ називають N -точковим та подають у вигляді функції номера частотної вибірки k

$$\text{ДПФ}_N[x(n)] = X(j\omega_k) = X(jk) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, k = 0, 1, \dots, N - 1.$$

- Зворотне ДПФ

$$x(n) = \frac{T_D}{2\pi} \int_0^{\omega_D} X(j\omega)e^{j\omega n T_D} d\omega$$

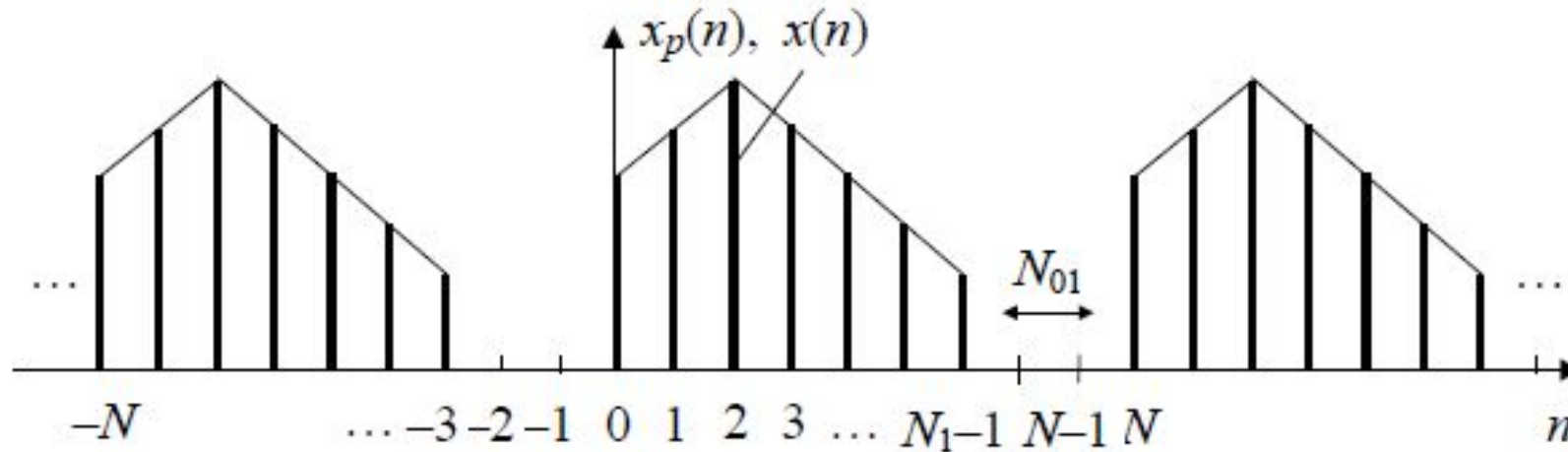
- Використовуючи заміни $d\omega \rightarrow \omega_D/N$; $f \rightarrow \Sigma$; $\omega \rightarrow \omega_k$, знаходимо

$$\text{ЗДПФ}_N[X(j\omega_k)] = x_p(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(j\omega_k)e^{j\omega_k n T_D},$$

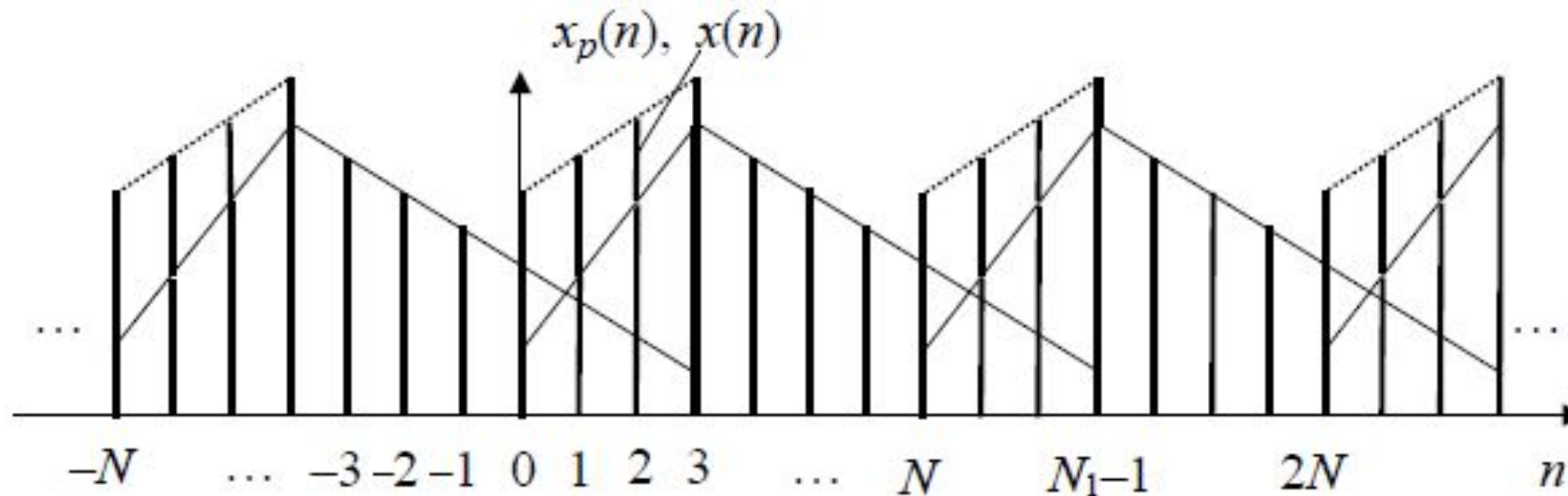
$$\text{ЗДПФ}_N[X(jk)] = x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(jk)e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1.$$

- Множник $1/N$ може бути присутнім у виразі або ЗДПФ, або ДПФ.

1. Сутність дискретного перетворення Фур'є



Сигнал, відповідний зворотному ДПФ при $N \geq N_1$



Сигнал, відповідний зворотному ДПФ при $N < N_1$

1. Сутність дискретного перетворення Фур'є

- Обчислення ЗДФ та ДПФ потребує при $N = N_1$ N^2 операцій множення та $N(N - 1)$ операцій додавання комплексних чисел. Обидва перетворення використовують єдиний обчислювальний алгоритм, заснований на їх досить простому взаємозв'язку:

$$\text{ЗДФ}_N[X(jk)] = \frac{1}{N} \{\text{ДПФ}_N[X^*(jk)]\}^*,$$

- де $*$ – операція комплексного спряження.

2. Властивості дискретного перетворення Фур'є

- ДПФ притаманні всі властивості безперервного (за частотою ω) перетворення Фур'є дискретних послідовностей, в тому числі його періодичність та симетрія. Воно також є окремим випадком більш загального Z -перетворення дискретних сигналів, з яким воно пов'язане співвідношенням

$$X(j\omega_k) = X(z) \Big|_{z=e^{-j\omega_k T_d}} = X(z) \Big|_{z=e^{-j\frac{2\pi}{N}k}} .$$

- Найбільш важливим для цифрової фільтрації є зв'язок ДПФ та згортки дискретних послідовностей.

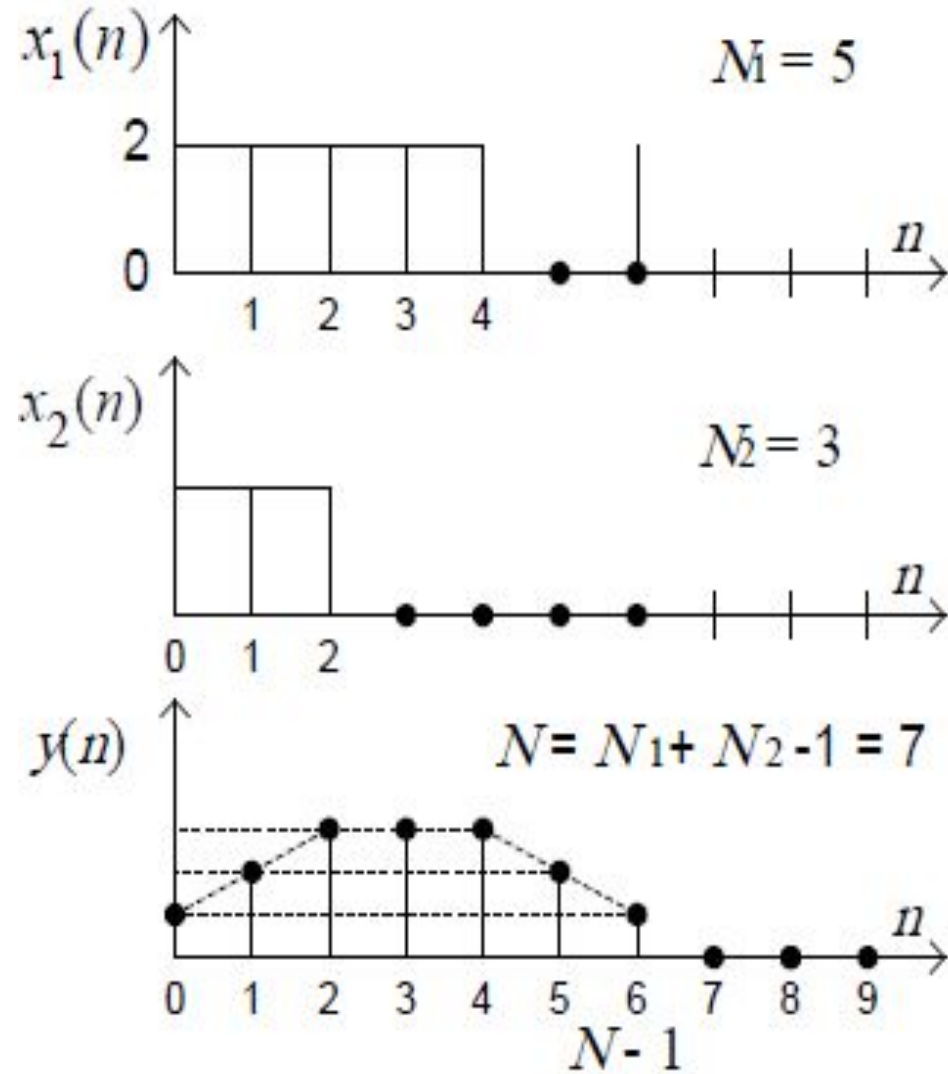
2. Властивості дискретного перетворення Фур'є

- Лінійна згортка визначається для кінцевих послідовностей $x_1(n)_{N_1}$ довжиною N_1 та $x_2(n)_{N_2}$ довжиною N_2 :

$$\begin{aligned} y(n)_N &= x_1(n)_{N_1} * x_2(n)_{N_2} = \sum_{m=0}^{N_1-1} x_1(m)x_2(n-m) = \\ &= \sum_{m=0}^{N_2-1} x_2(m)x_1(n-m). \end{aligned}$$

- Сигнал лінійної згортки $y(n)$ має довжину $N = N_1 + N_2 - 1$.

2. Властивості дискретного перетворення Фур'є



Ілюстрація ДЧЗ

2. Властивості дискретного перетворення Фур'є

- ДПФ послідовностей $x_1(n)$ та $x_2(n)$ необхідно обчислювати за однаковою кількістю точок N , яка відповідає довжині послідовності $y(n)$, з однаковим кроком дискретизації за частотою $\Delta\omega = \omega_d / N$, тобто

$$\text{ДПФ}_N[y(n)] = \text{ДПФ}_N[x_1(n)] \text{ДПФ}_N[x_2(n)]$$

- або

$$Y(j\omega_k) = X_1(j\omega_k)X_2(j\omega_k), \quad k = 0, 1, \dots, N - 1.$$

2. Властивості дискретного перетворення Фур'є

- Послідовності $x_1(n)$ та $x_2(n)$ доповнюються N_{01} , N_{02} нульовими відліками:

$$N_{01} = N - N_1, N_{02} = N - N_2,$$

- що забезпечує в частотній області інтерполяцію їх дискретизованого спектра.
- Сигнал $y(n)$ відповідно до даних властивостей також може бути визначений за допомогою ЗДПФ добутку N -точкових ДПФ згортуваних послідовностей $x_1(n)$, $x_2(n)$:

$$y(n) = \text{ЗДПФ}_N \{ \text{ДПФ}_N [x_1(n)] \text{ДПФ}_N [x_2(n)] \}$$

- або

$$y(n) = \text{ЗДПФ}_N [Y(j\omega_k)], n = 1, \dots, N.$$

3. Алгоритм цифрової фільтрації послідовностей кінцевої довжини на основі ДПФ

- Властивості ДПФ згортки кінцевих послідовностей використовують для реалізації КІХ-фільтрів з обробкою сигналу в частотній області. Сигнал на виході такого фільтра визначається дискретною часовою згорткою (ДЧЗ) вхідної послідовності $x(n)$ (в даному випадку кінцевої довжини N_1) з кінцевою імпульсною характеристикою $h(n)$ довжиною N_2 :

$$y(n)_N = \sum_{m=0}^{N_2-1} h(m)x(n-m),$$
$$n = 0, 1, \dots, N-1; \quad N = N_1 + N_2 - 1.$$

3. Алгоритм цифрової фільтрації послідовностей кінцевої довжини на основі ДПФ

- При обробці в частотній області ДЧЗ може бути обчислена відповідно до алгоритму:

$$y(n) = \text{ЗДПФ}_N \{ \text{ДПФ}_N [x_1(n)] \text{ДПФ}_N [x_2(n)] \},$$

- тобто

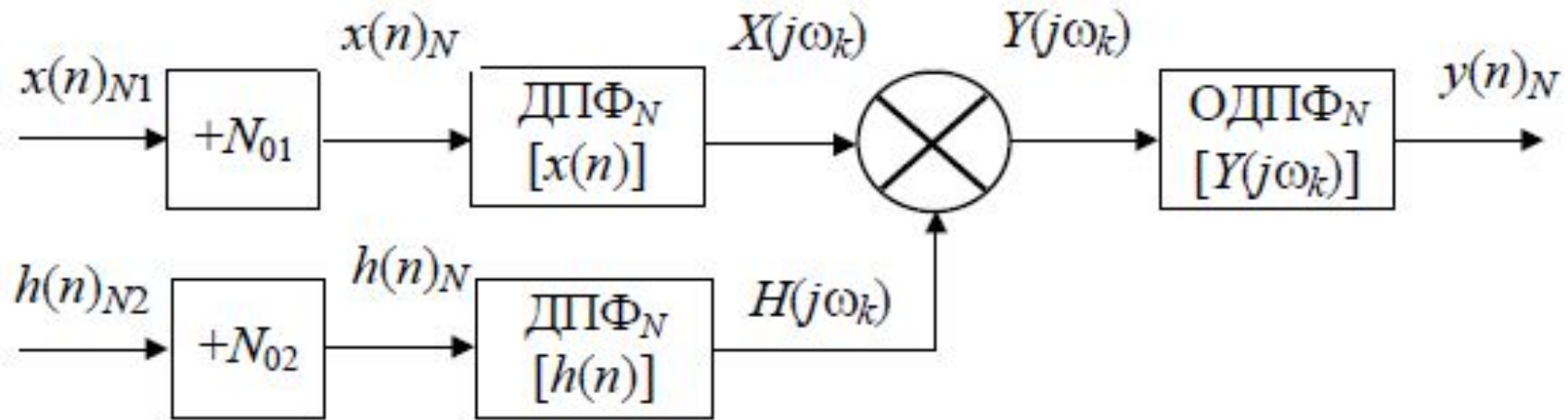
$$y(n) = \text{ЗДПФ}_N \{ \text{ДПФ}_N [h(n)] \text{ДПФ}_N [x(n)] \}, \\ n = 0, 1, \dots, N - 1.$$

- або

$$y(n) = \text{ЗДПФ}_N [H(j\omega_k)X(j\omega_k)].$$

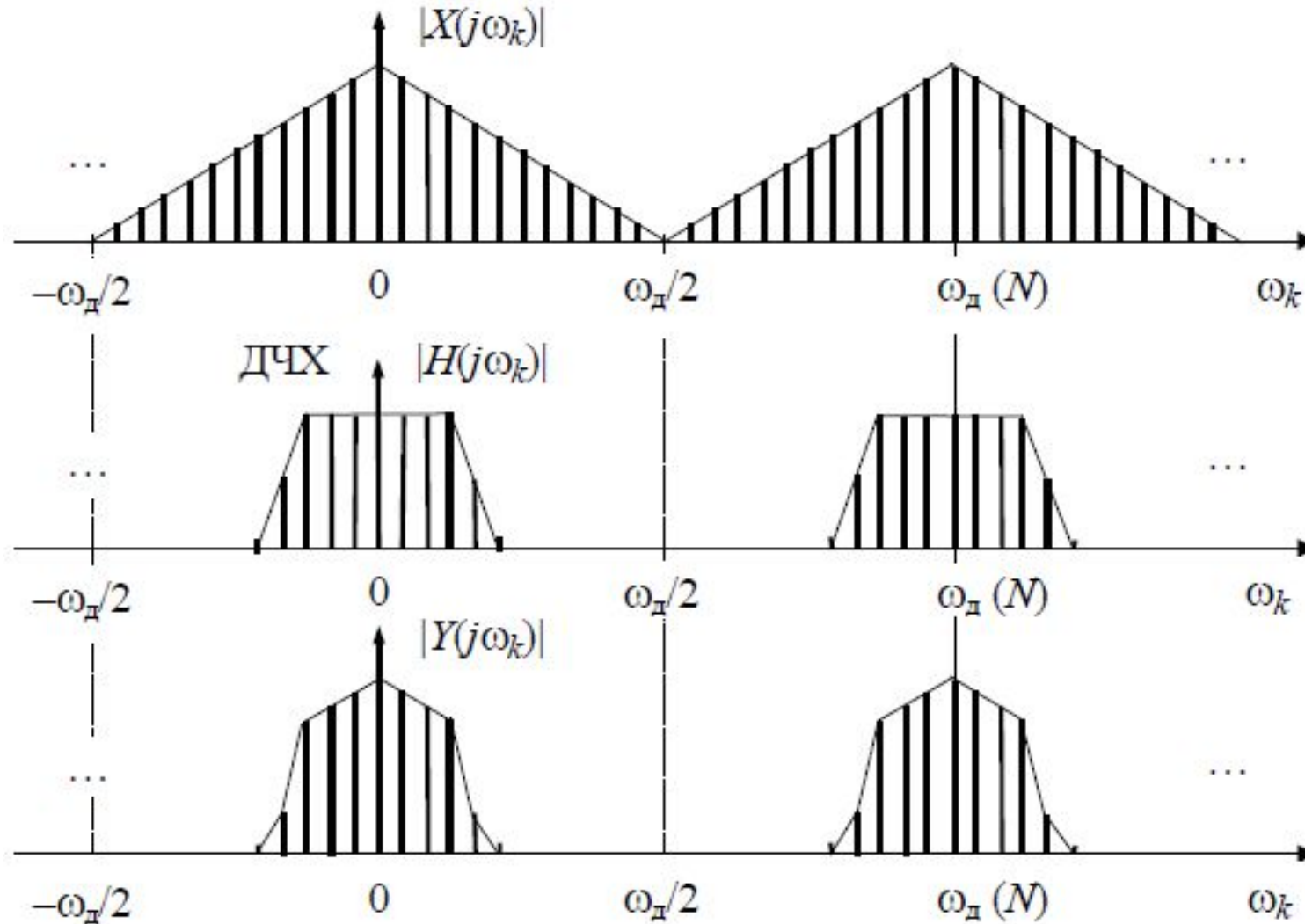
- Його називають *алгоритмом цифрової фільтрації послідовностей кінцевої довжини на основі ДПФ*.

3. Алгоритм цифрової фільтрації послідовностей кінцевої довжини на основі ДПФ



Структурна схема НЦФ на основі ДПФ

3. Алгоритм цифрової фільтрації послідовностей кінцевої довжини на основі ДПФ



Частотні діаграми сигналів в структурі НФ на основі ДПФ

3. Алгоритм цифрової фільтрації послідовностей кінцевої довжини на основі ДПФ

- ДПФ імпульсної характеристики $h(n)$

$$H(j\omega_k) = \sum_{m=0}^{N_2-1} h(m)e^{-j\omega_k m T_d} = Y(j\omega_k)/X(j\omega_k)$$

- відповідає дискретизованій з кроком $\Delta\omega = \omega_d/N$ частотній характеристиці фільтра $H(j\omega_k)$ (ДЧХ), а $X(j\omega_k)$, $Y(j\omega_k)$ – дискретизованим з тим самим кроком спектрам його вхідній та вихідній послідовностям

3. Алгоритм цифрової фільтрації послідовностей кінцевої довжини на основі ДПФ

запам'ятовування N_1 відліків вхідної послідовності $x(n)$

обчислення N -точкових ДПФ послідовностей $x(n)$ та $h(n)$

перемноження N частотних вибірок ДПФ вхідної послідовності та ДЧХ фільтра та утворення N -точкової послідовності $Y(j\omega_k) = H(j\omega_k) X(j\omega_k)$

обчислення N -точкового ЗДПФ послідовності $Y(j\omega_k)$, в результаті чого отримуються N відліків вихідної послідовності $y(n)$

3. Алгоритм цифрової фільтрації послідовностей кінцевої довжини на основі ДПФ

- Для реалізації нерекурсивного фільтра на основі ДПФ необхідна пам'ять для запису комплексних послідовностей $x(n)$, $X(j\omega_k)$, $Y(j\omega_k)$, $y(n)$ та коефіцієнтів $H(j\omega_k)$ довжиною N . Кількість виконуваних операцій множення відповідає $K_{\text{мн}} = 4(2N^2 + N)$, додавання – $K_{\text{дод}} = 4(N - 1)N$ (дійсних чисел), що в перерахунку на один відлік вихідного сигналу відповідає $K_{\text{мн}(1)} = 4(2N + 1)$ та $K_{\text{слож}(1)} = 4(N - 1)$.
- За обсягом обчислень фільтр на основі ДПФ поступається НФ на основі ДЧЗ, де на один відлік сигналу виконується N_2 операцій множення.
- Проте ефективність його суттєво зростає при використанні для обчислення ДПФ та ЗДПФ алгоритмів *швидкого перетворення Фур'є* (ШПФ). Так, алгоритми ШПФ по основі 2 потребують $2N \log_2 N$ операцій множення та стільки ж операцій додавання дійсних чисел.

3. Алгоритм цифрової фільтрації послідовностей кінцевої довжини на основі ДПФ

- Загальна та приведена до одного відліку кількість операцій для НФ на основі ШПФ при цьому складатиме

$$K_{\text{мн}} = 4N[(\log_2 N) + 1], \quad K_{\text{дод}} = 4N \log_2 N$$

- і

$$K_{\text{мн}(1)} = 4[(\log_2 N) + 1], \quad K_{\text{дод}(1)} = 4 \log_2 N.$$

- *Наприклад*, при $N = 1024$ $K_{\text{мн}(1)} = 44$, $K_{\text{дод}(1)} = 40$.
Для НФ на основі ДЧЗ кількість операцій залежить від довжини імпульсної характеристики N_2 та при $N_2 = N/2$ дорівнюватиме $K_{\text{мн}(1)} = K_{\text{дод}(1)} = 512$.

3. Алгоритм цифрової фільтрації послідовностей кінцевої довжини на основі ДПФ

- Алгоритм цифрової фільтрації в частотній області можна застосовувати і при обробці послідовностей, довжина яких набагато перевищує довжину імпульсної характеристики фільтра, тобто практично не обмежених по довжині.
- В цьому випадку вхідну послідовність $x(n)$ подають сумою $x(n) = \sum_i x_i(n)$ кінцевої або нескінченної кількості суміжних секцій $x_l(n)_{N_1}$ кінцевої довжини N_1 , що визначаються як

$$x_l(n)_{N_1} = \begin{cases} x(n + lN_1), & lN_1 \leq n \leq (l + 1)N_1 - 1 \\ 0 & \text{для інших } n \end{cases}$$

- де $l = 0, 1, 2 \dots$ – номер такої секції.

3. Алгоритм цифрової фільтрації послідовностей кінцевої довжини на основі ДПФ

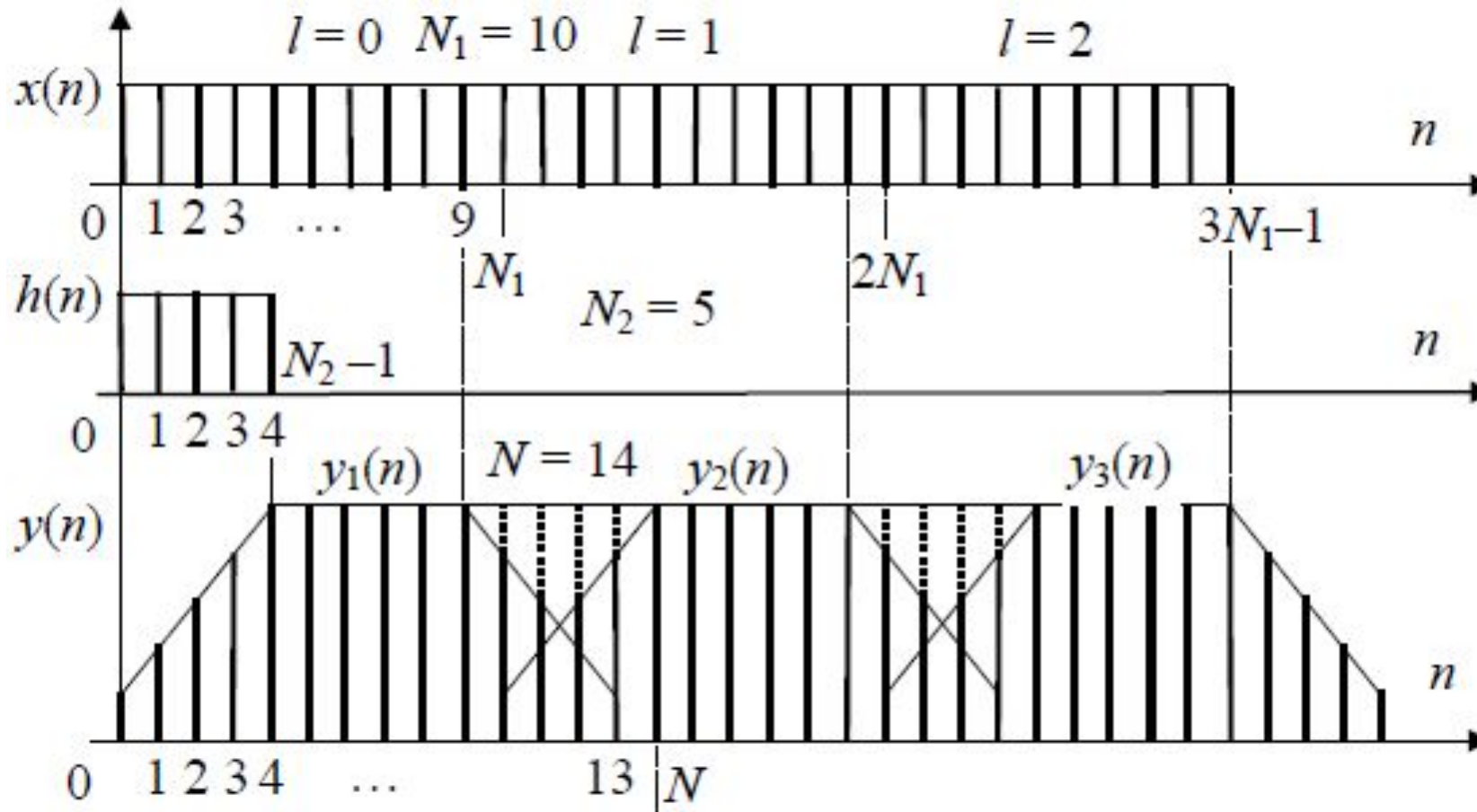
- Згортка вхідної послідовності $x(n)$ з імпульсною характеристикою фільтра $h(n)$ при цьому також може бути подана відповідно до принципу суперпозиції сумою часткових згорток $y_l(n)_N$ кінцевої довжини $N = N_1 + N_2 - 1$

$$y(n) = \sum_l y_l(n),$$

- де

$$y_l(n)_N = \sum_{m=0}^{N_2-1} h(m)x_l(n-m).$$

3. Алгоритм цифрової фільтрації послідовностей кінцевої довжини на основі ДПФ



Часові діаграми сигналів при цифровій фільтрації послідовностей великої довжини

3. Алгоритм цифрової фільтрації послідовностей кінцевої довжини на основі ДПФ

- Кожна з часткових згорток обчислюється на основі алгоритму ДПФ з використанням ШПФ:

$$y_l(n) = \text{ЗДПФ}_N [H(j\omega_k)X(j\omega_k)].$$

- Обробка попередньої секції сигналу при цьому суміщається з записом нової, тому затримка вихідного сигналу в часі не перевищує довжини однієї секції.

3. Алгоритм цифрової фільтрації послідовностей кінцевої довжини на основі ДПФ

- *Приклад.* Реалізації на основі ШПФ НФ з довжиною імпульсної характеристики $N_2 = 321$ за кількістю точок $N = 1024, 2048, 4096$ та 8192 відповідають значення довжини секції $N_1 = 703, 1727, 3775, 7871$ та кількість операцій множення на відлік сигналу $K_{\text{МН}(1)} = 4N(\log_2 N + 1)/N_1 = 64, 57, 56,4, 58,3$ відповідно.
- Значення $N = 2048$ є оптимальним для даного фільтра за обсягом обчислень та пам'яті.

Системи цифрової обробки інформації

Лекція 11 Швидке перетворення Фур'є

1. Алгоритми швидкого перетворення Фур'є
2. Алгоритм ШПФ по основі 2 з проріджуванням по часу
3. Алгоритм ШПФ по основі 2 з проріджуванням по частоті

1. Алгоритми швидкого перетворення Фур'є

- Алгоритми швидкого перетворення Фур'є (ШПФ) – це способи швидкого обчислення ДПФ

$$X(jk) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j(2\pi/N)kn}$$

- які усувають притаманну ДПФ обчислювальну надмірність.
- Вони базуються на *властивостях комплексної експоненти* $e^{-j(2\pi/N)kn}$, для зручності позначеної

$$W_N^{kn} \quad (W_N = e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)kn});$$

- її *симетрії*

$$W_N^{(N-k)n} = W_N^{(N-n)k} = (W_N^{kn})^*$$

- та *періодичності*

$$W_N^{(k+N)(n+N)} = W_N^{kn}$$

- з періодом, що дорівнює довжині оброблюваної реалізації сигналу N (кількості точок ШПФ).

1. Алгоритми швидкого перетворення Фур'є

- Загальний принцип ШПФ полягає у поділі ДПФ вхідної послідовності на ДПФ підпослідовностей меншої довжини, аж до мінімально можливої (яка дорівнює основі ШПФ), через які обчислюється ДПФ вхідної послідовності.
- Поділ означає *проріджування* послідовностей в часовій або в частотній області. В зв'язку з цим розрізняють ШПФ з *проріджуванням по часу* та ШПФ з *проріджуванням по частоті*.
- На відміну від ДПФ, ШПФ може обчислюватися лише по певній кількості точок N , яка відповідає цілій степіні його основи m :

$$N = mL,$$

- де L – це кількість *етапів проріджування*: $L = \log_m N$.
- Частіше за все застосовують ШПФ *по основі 2*.

2. Алгоритм ШПФ по основі 2 з проріджуванням по часу

- Нехай задана послідовність $x(n)_N$ кінцевої довжини N , $n = 0, \dots, N - 1$. Потрібно знайти її ДПФ:

$$X(jk) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}$$

для $k = 0, 1, \dots, N - 1$ (номери бінів ДПФ) з мінімальним обсягом обчислень.

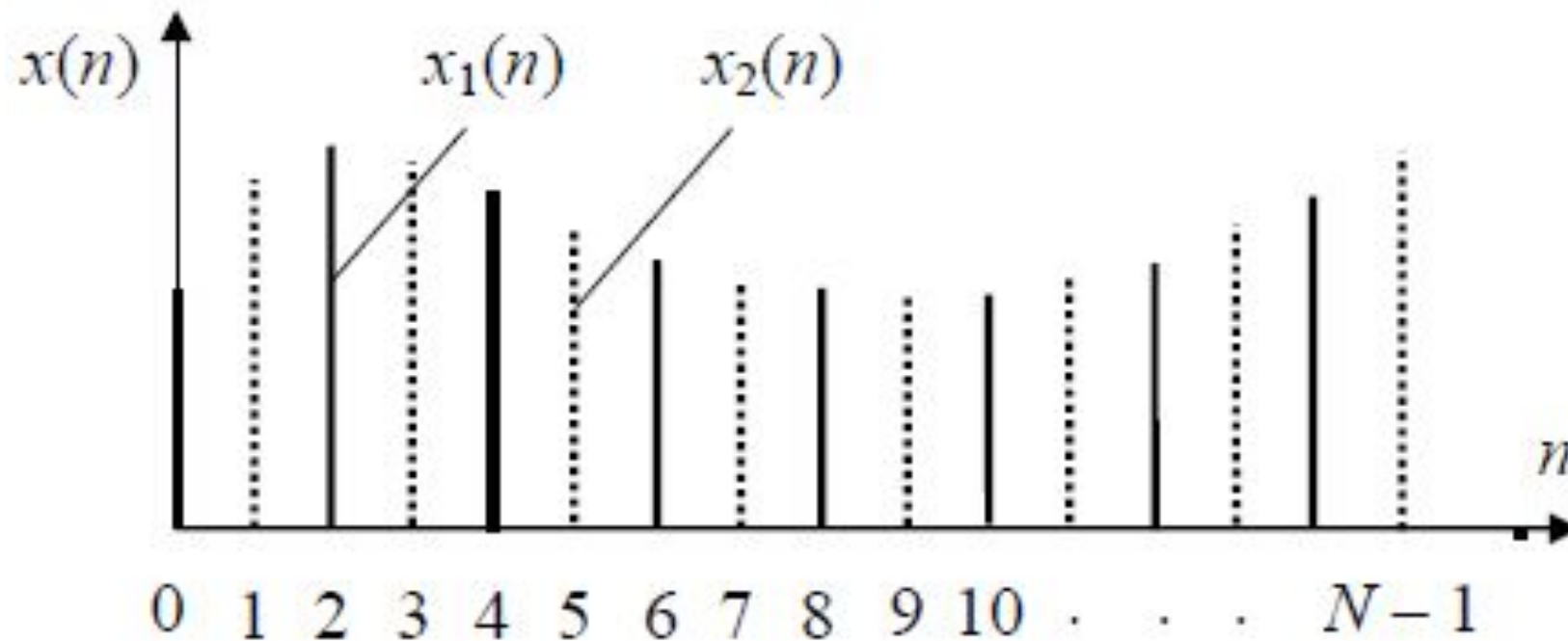
- Для цього вхідну послідовність $x(n)$ поділяють на 2 підпослідовності довжиною $N/2$ – парну, що включає відліки $x(n)$ з парними індексами n :

$$x_1(n) = x(2n),$$

- та непарну:

$$x_2(n) = x(2n + 1), n = 0, 1, \dots, (N/2) - 1.$$

2. Алгоритм ШПФ по основі 2 з проріджуванням по часу



Ілюстрація проріджування сигналу по часу

2. Алгоритм ШПФ по основі 2 з проріджуванням по часу

- Позначимо ці ДПФ як $X_1(jk)_{N/2}$ та $X_2(jk)_{N/2}$. Запишемо ДПФ вхідної послідовності $x(n)_N$ через ДПФ підпослідовностей $x_1(n)_{N/2}$, $x_2(n)_{N/2}$:

$$\begin{aligned} X(jk) &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_1(n) e^{-j\frac{2\pi}{N/2}kn} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_2(n) e^{-j\frac{2\pi}{N/2}kn} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}k} = \\ &= X_1(jk) + W_N^k X_2(jk), \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1. \quad (1) \end{aligned}$$

- Це перші $N/2$ частотних вибірок ДПФ.

2. Алгоритм ШПФ по основі 2 з проріджуванням по часу

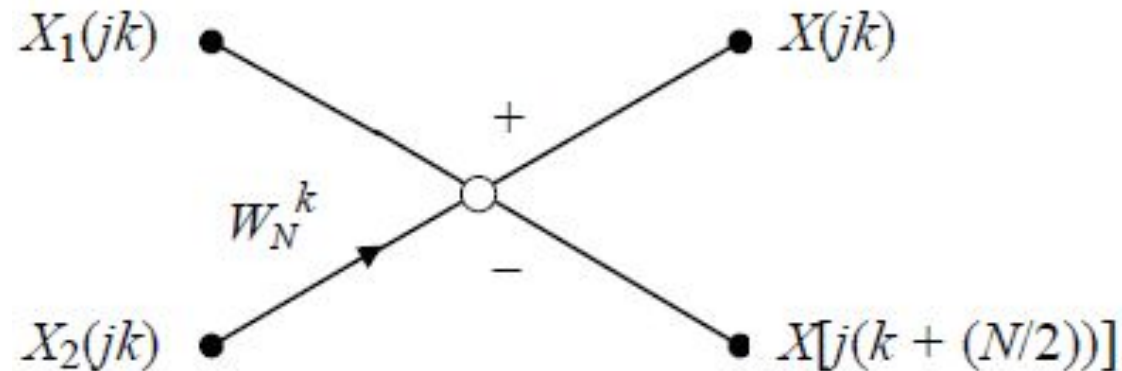
- Другу половину частотних вибірок $X(jk)$ для $k = (N/2), \dots, (N - 1)$ знайдемо з урахуванням властивості періодичності:

$$\begin{aligned} X \left[j \left(k + \frac{N}{2} \right) \right] &= X_1(jk) + W_N^{k+(N/2)} X_2(jk) = \\ &= X_1(jk) - W_N^k X_2(jk), k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1. \quad (2) \end{aligned}$$

- Вирази (1), (2) визначають базову операцію ШПФ (операцію об'єднання):

$$\begin{aligned} X(jk) &= X_1(jk) + W_N^k X_2(jk); \\ X \left[j \left(k + \frac{N}{2} \right) \right] &= X_1(jk) - W_N^k X_2(jk), k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1. \quad (3) \end{aligned}$$

2. Алгоритм ШПФ по основі 2 з проріджуванням по часу



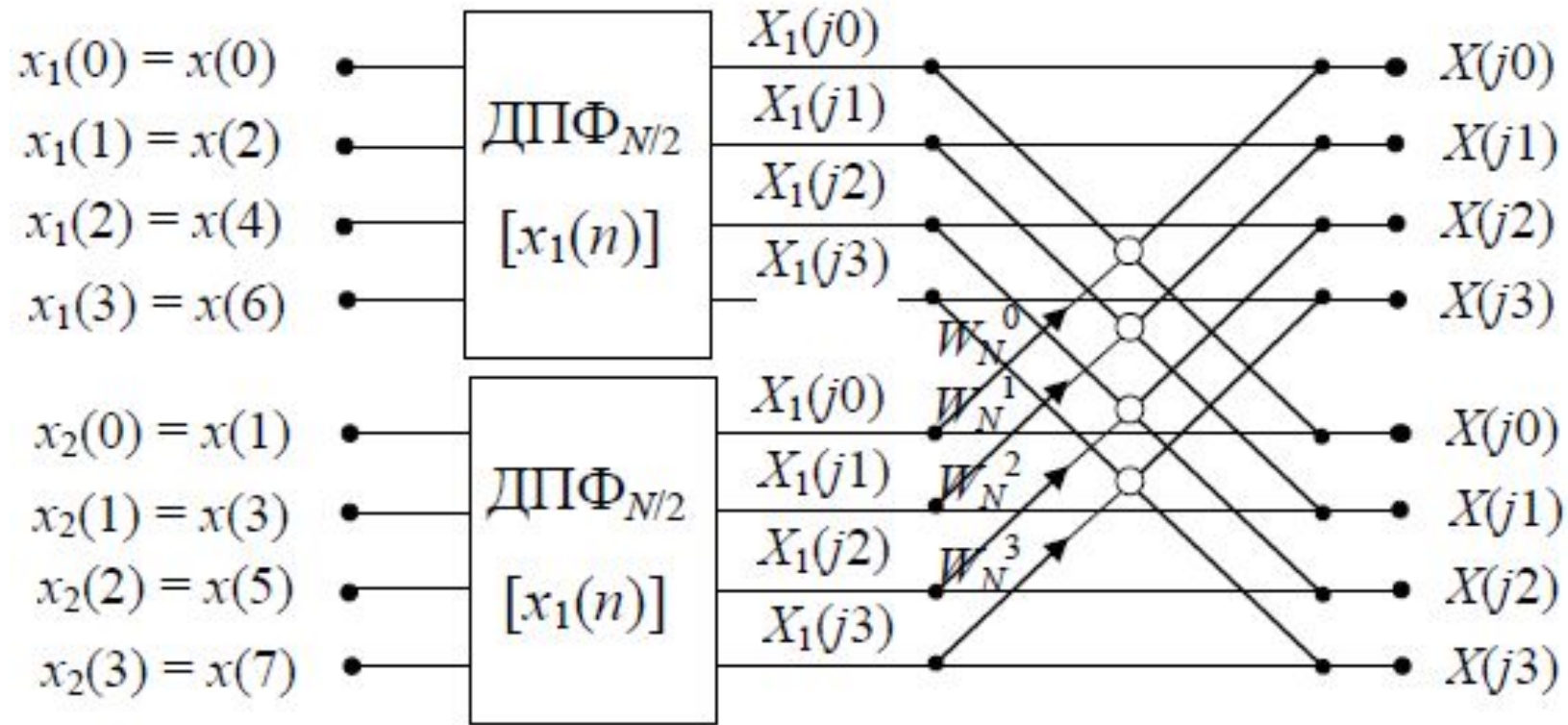
Сигнальний граф базової операції ШПФ

Символ \circ означає операцію додавання (верхній вихід) та віднімання (нижній вихід), а стрілка \rightarrow відповідає множенню на повертаючий множник W_N^k .

$$X_1(j0) = x_1(0) + W_2^0 x_1(1), \quad X_1(j1) = x_1(0) - W_2^0 x_1(1),$$

$$W_2^0 = e^{-j\left(\frac{2\pi}{2}\right)0} = 1$$

2. Алгоритм ШПФ по основі 2 з проріджуванням по часу



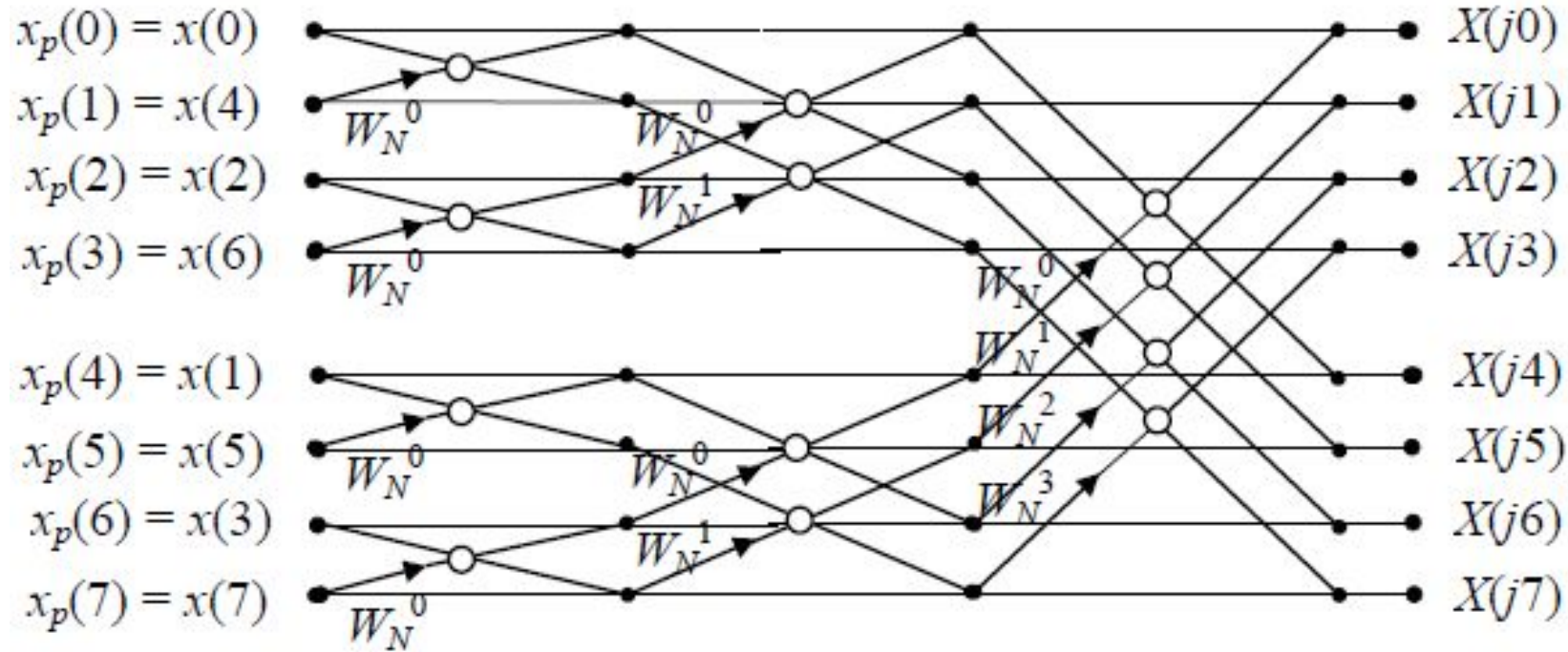
Сигнальний граф ШПФ для першого етапу проріджування

2. Алгоритм ШПФ по основі 2 з проріджуванням по часу

- Потрібний обсяг обчислень відповідно до даного графу за кількістю операцій множення:
- для ДПФ $K_{\text{мн.ДПФ}} = n^2$;
- для ШПФ $K_{\text{мн.ШПФ}} = 2(n/2)^2 + n/2 = n^2/2 + n/2$.
- В результаті *однократного проріджування* обсяг обчислень зменшився приблизно в 2 рази.

$$K_{\text{мн.БПФ}} = \frac{N}{2} L = \frac{N}{2} \log_2 N,$$
$$K_{\text{дод.БПФ}} = NL = N \log_2 N. (4)$$

2. Алгоритм ШПФ по основі 2 з проріджуванням по часу



Повний граф ШПФ для $N = 8$

2. Алгоритм ШПФ по основі 2 з проріджуванням по часу

- *Особливістю* алгоритму ШПФ з проріджуванням по часу є потрібний йому *неприродній порядок відліків вхідного сигналу*, обумовлений його багатократними поділами на парні та непарні підпослідовності ($n = 0, 4, 2, 6, 1, 5, 3, 7$ для $N = 8$).
- Такий порядок слідування називають *двійково-інверсним* або біт-реверсним. Це призводить до необхідності попередньої *перестановки відліків* вхідної послідовності до початку обчислень. Для цього порядкові номери відліків $n_{(10)}$ послідовності $x(n)$ подаються в L -розрядному двійковому коді $n_{(2)}$, ці коди зчитуються в зворотному порядку, тобто зправа наліво ($n_{(2-інв)}$) та перетворюються потім знову в десяткову форму, відповідну номеру відліку p переставленої послідовності $x(p)$

2. Алгоритм ШПФ по основі 2 з проріджуванням по часу

Таблиця

$n_{(10)}$	$n_{(2)}$	$n_{(2\text{-инв})}$	¹ p
0	000	000	0
1	001	100	4
2	010	010	2
3	011	110	6
4	100	001	1
5	101	101	5
6	110	011	3

3. Алгоритм ШПФ по основі 2 з проріджуванням по частоті

- Вхідну послідовність $x(n)$ подають у вигляді двох підпослідовностей:

$$x_1(n) = x(n) \text{ та } x_2(n) = x(n + (N/2)), \\ n = 0, 1, \dots, (N/2) - 1,$$

- тобто у вигляді її першої $x_1(n)$ та другої $x_2(n)$ половин, та виводять через них ДПФ вхідної послідовності:

$$X(jk) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_1(n) W_N^{kn} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_2(n) W_N^{k(n+\frac{N}{2})}, \\ k = 0, 1, \dots, N - 1.$$

3. Алгоритм ШПФ по основі 2 з проріджуванням по частоті

- Далі виконують проріджування ДПФ-послідовності $X(jk)$ шляхом її поділу на дві $(N/2)$ -точкові ДПФ-підпослідовності $X(j2k)$, $X[j(2k + 1)]$, відповідні частотним вибіркам з парними та непарними номерами k :

$$\begin{aligned} X(j2k) &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_1(n) W_{N/2}^{kn} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_2(n) W_{N/2}^{kn} \\ &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} [x_1(n) + x_2(n)] W_{N/2}^{kn} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} f_1(n) W_{N/2}^{kn} ; \end{aligned}$$

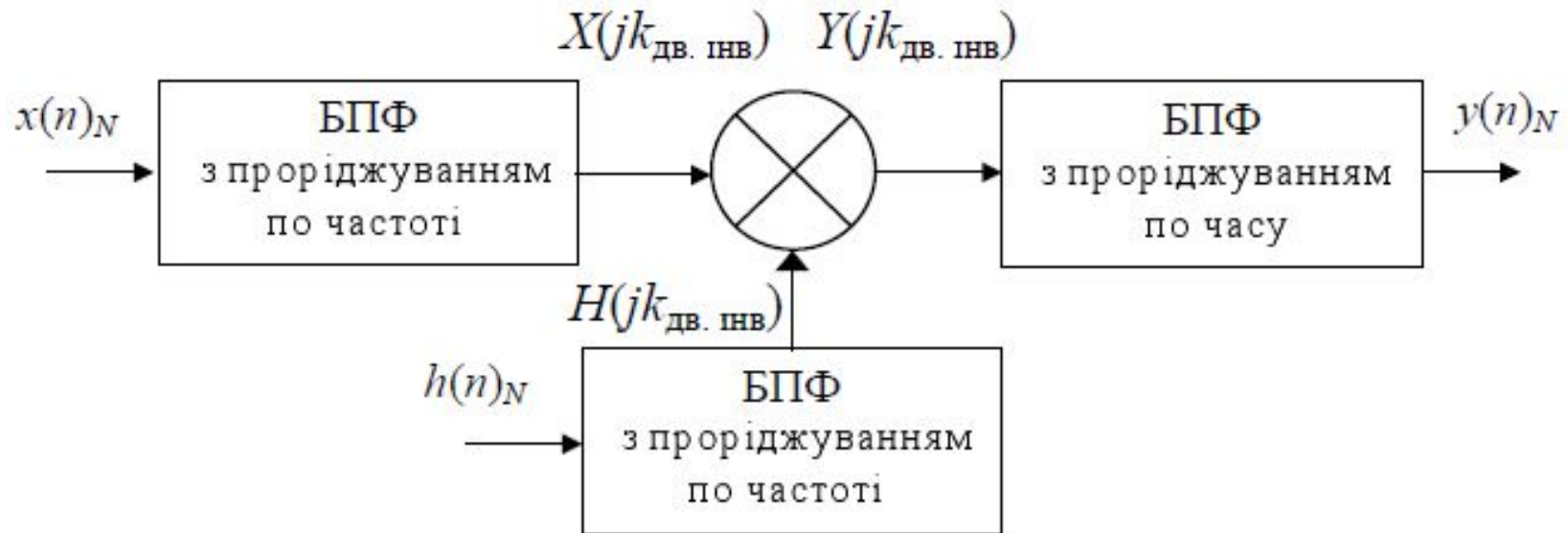
3. Алгоритм ШПФ по основі 2 з проріджуванням по частоті

- В результаті ДПФ вихідної послідовності виражається через ДПФ деяких $N/2$ -точкових послідовностей $f_1(n)$, $g_1(n)$, які визначаються як

$$\begin{aligned} f_1(n) &= x_1(n) + x_2(n), \\ g_1(n) &= [x_1(n) - x_2(n)] W_N^n, \\ n &= 0, 1, \dots, (N/2) - 1. \end{aligned} \quad (5)$$

- Вираз (5) відповідає базовій операції даного алгоритму, поданий графічно дзеркально відбитим сигнальним графом ШПФ з проріджуванням по часу
- Повний сигнальний граф ШПФ з проріджуванням по частоті є дзеркальним відбиттям сигнального графа ШПФ з проріджуванням по часу.

3. Алгоритм ШПФ по основі 2 з проріджуванням по частоті



Структура нерекурсивного фільтра на основі ШПФ з проріджуванням по часу та частоті

Системи цифрової обробки інформації

Лекція 12

Аналізатори спектру сигналів на основі дискретного перетворення Фур'є

1. Спектральний аналіз сигналів
2. Частотні характеристики аналізатора спектра
3. Визначення відгуків аналізатора спектра на гармонійні сигнали
4. Роль вагових функцій при спектральному аналізі та їх основні параметри

1. Спектральний аналіз сигналів

- За допомогою спектрального аналізу вирішуються *задачі* виявлення, розпізнавання та оцінювання параметрів сигналів, стиснення даних, ідентифікації об'єктів, розпізнавання образів – мови, зображень тощо.
- Спектральний аналіз випадкових сигналів націлений на виявлення прихованої періодичності та статистичних (кореляційних) зв'язків.
- Аналіз амплітудних та фазових спектрів періодичних (регулярних) сигналів та сигналів кінцевої тривалості називають також *гармонійним аналізом*.

1. Спектральний аналіз сигналів



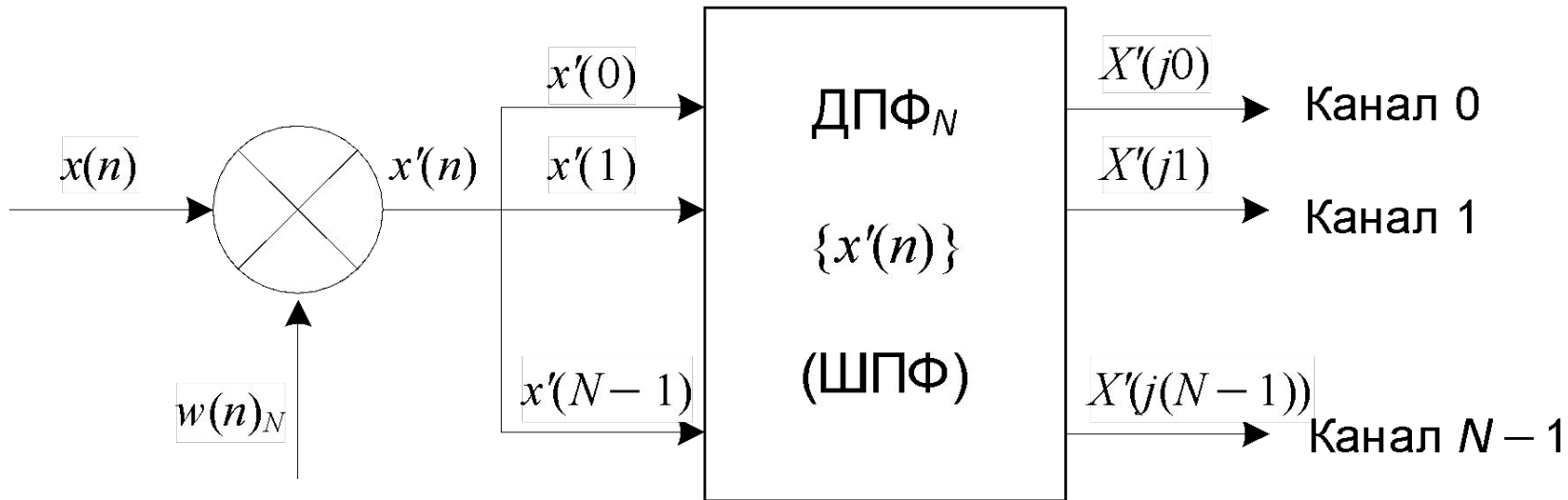
1. Спектральний аналіз сигналів

До параметрів цифрових аналізаторів спектра відносяться:

- кількість каналів аналізу K ;
- час аналізу (спостереження) $T_a = (N - 1)T_d$ або *ширина вікна* аналізу N , відповідна кількості аналізованих відліків сигналу, взятих з періодом дискретизації T_d ;
- максимальна смуга аналізу $\Delta f_a = \pm f_d / 2$, що не перевищує за модулем половини частоти дискретизації $f_d = 1/T_d$ сигналу;
- крок аналізу за частотою Δf , що визначає частоти, на яких виконується спектральний аналіз;
- роздільна здатність за частотою $\Delta f_r \sim 1/T_a$, обернено пропорційна часу аналізу та відповідна різниці частот двох сусідніх окремо або однозначно вирішуваних частотних складових сигналу.

1. Спектральний аналіз сигналів

В основі аналізаторів спектру, що використовують ДПФ, лежить базова структура, яка реалізує базові операції аналізатора спектра – зважування та обчислення ДПФ.



1. Спектральний аналіз сигналів

- Виходом є N -точковий вектор ДПФ $X'(j\omega_k)$ послідовності $x'(n)$ кінцевої довжини N , яка отримується шляхом урізання за часом та зважування вхідної – в загальному випадку не обмеженої за довжиною – послідовності $x(n)$ ваговою функцією $w(n)$ кінцевої довжини N :

$$X'(j\omega_k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)w(n)e^{-j\omega_k n T_d} = \sum_{n=0}^{N-1} x'(n)e^{-j(2\pi/N)kn} = \text{ДПФ}_N[x'(n)]$$

- тут $k = 0, 1, \dots, N - 1$ – номер частотної вибірки ДПФ $X'(j\omega_k) = X'(jk)$;
- $x'(n) = x(n)w(n)$, $n = 0, 1, \dots, N - 1$ – перетворювана вхідна послідовність ДПФ;
- $\omega_k = k\omega_d/N$ або $f_k = kf_d/N$ – частоти аналізу; вони називаються також бінами ДПФ: 1 бін дорівнює кроку дискретизації або аналізу сигналу в частотній області $\Delta f = f_d/N$.

1. Спектральний аналіз сигналів

- Аналізатор має N рознесених по частоті на $f_{\text{д}}/N$ (на 1 бін) каналів аналізу з центральними частотами f_k , при цьому значення k відповідають номеру каналу аналізу або номеру біна ДПФ.
- Вагова функція являє собою вікно, через яке спостерігається вхідний сигнал, її довжиною визначається час аналізу (спостереження) сигналу $T_a = (N - 1)T_{\text{д}}$. Найпростішою ваговою функцією є прямокутна.

1. Спектральний аналіз сигналів

- Множенню в часовій області, або *зважуванню*, відповідає *згортка* в частотній. Тому обчислене ДПФ фактично є згорткою істинного спектра

$$X(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega nT_d}$$

- дискретного сигналу $x(n)$ (його дискретно-часового перетворення Фур'є) з частотною характеристикою (спектром) вагової функції $W(j\omega)$:

$$X'(j\omega_k) = X(j\omega) * W(j\omega) \Big|_{\omega=\omega_k},$$

- де $*$ – символ згортки, тобто містить методичну *похибку* аналізу.

1. Спектральний аналіз сигналів

- Для періодичних сигналів з періодом $T = NT_{\text{д}}$ оцінюють амплітуди $A(f_i)$ та фази $\phi(f_i)$ гармонік з частотою $f_i = if_{\text{д}}/N$ або їх середні за період потужності

$P_i = [A(f_i)]^2/2$, де i – номер гармоніки. При довжині прямокутної вагової функції, рівної N (періоду сигналу), вказані параметри у випадку дійсного сигналу знаходяться за ДПФ $X(jf_k)$, обчисленим на частотах $f_k = f_i$ як

$$A(f_i) = (2/N)|X(jf_i)|,$$

$$\phi(f_i) = \text{arctg}[X_{\text{Im}}(jf_i)/X_{\text{Re}}(jf_i), P_i = 2|(1/N)X(jf_i)|^2$$

- (для $i = k = 0$ $A(0) = (1/N)X(0)$, $P_0 = [(1/N)X(0)]^2$).

1. Спектральний аналіз сигналів

Для сигналів кінцевої тривалості $T_c = (N_1 - 1)T_d$ за ДПФ $[X(jf_k)]$, обчисленим за кількістю точок $N \geq N_1$, оцінюють:

- **спектральну щільність сигналу (СЩС)** $S(j\omega) = T_d X(j\omega_k)$ розмірністю $[B/Гц]$, що визначається значеннями її модуля $|S(j\omega)| = A(\omega)$ та аргументу $\arg S(j\omega) = \phi(\omega)$, тобто амплітудного та фазового спектрів або дійсної $S_{Re}(j\omega)$ та уявної $S_{Im}(j\omega)$ частин на частотах аналізу $\omega = \omega_k$ (бінах ДПФ);
- **енергетичний спектр або спектральну щільність енергії (СЩЕ)** сигналу $E(\omega) = |S(j\omega)|^2$ розмірністю $[B^2c/Гц]$, яка обчислена на дискретних частотах ω_k та показує розподіл його енергії по частоті;
- **спектральну щільність потужності (СЩП)** $P(\omega) = |S(j\omega)|^2/T_c$ розмірністю $[B^2/Гц]$ для значень $\omega = \omega_k$, а також за необхідності **повну енергію сигналу** $E = \frac{1}{NT_d} \sum_{k=0}^{N-1} E(k)$ та його **середню потужність** $P = \frac{1}{NT_d} \sum_{k=0}^{N-1} P(k)$.

2. Частотні характеристики аналізатора спектра

- Зв'язок між ДПФ та цифровою фільтрацією дозволяє визначити частотну характеристику каналу аналізатора спектра на основі ДПФ, що позначається $H(j\omega, \omega_k)$, у вигляді відношення відгука каналу на комплексний гармонійний сигнал $x(n) = e^{j\omega n T_d}$ до значення цього сигналу при $n = N - 1$:

$$\begin{aligned} H(j\omega, \omega_k) &= \text{ДПФ}_N \{ e^{j\omega n T_d} \} / e^{j\omega(N-1)T_d} = \\ &= e^{-j\omega(N-1)T_d} W^* [j(\omega - \omega_k)]. \end{aligned}$$

- У випадку симетричної вагової функції $w(n) = w(N - 1 - n)$

$$\begin{aligned} H(j\omega, \omega_k) &= W [j(\omega - \omega_k)] = \\ &= e^{-j(\omega - \omega_k)(N-1)T_d/2} W^*(\omega - \omega_k) \end{aligned}$$

2. Частотні характеристики аналізатора спектра

- Частотна характеристика каналу співпадає з частотною характеристикою вагової функції $W(j\omega)$, зсунутої вправо до центральної частоти каналу $\omega_k > 0$ або вліво до частоти $\omega_k < 0$.
- Максимум частотної характеристики каналу має місце на частоті $\omega = \omega_k$, при цьому на частоти $\omega > 0$, що співпадають з бінами ДПФ, відгукуються канали аналізатора спектра з номерами $k > 0$ у смузі частот $(0 \div \omega_d/2)$, а на частоти $\omega < 0$ (інакше на сигнал $x(n) = e^{-j\omega n T_d}$), що співпадають з бінами ДПФ, відгукуються канали з номерами $k < 0$ у смузі частот $(-\omega_d/2 \div 0)$.
- Таким чином, аналізатор спектра на основі ДПФ забезпечує розпізнавання комплексних гармонійних сигналів *не лише за частотою, але й за знаком частоти*.
- При обчисленні ДПФ в діапазоні частот $(0 - f_d)$, тобто для $k = 0, \dots, N - 1$, від'ємним значенням $k_- = -1, -2, \dots, -N/2$ відповідають значення $k = k_- + N$.

2. Частотні характеристики аналізатора спектра

- В якості прикладу знайдемо частотну характеристику аналізатора спектра з прямокутною ваговою функцією $w_R(n)$ довжиною N . Її перетворення Фур'є має вигляд

$$W_R(j\omega) = e^{-j\omega(N-1)T_d/2} \frac{\sin[\omega NT_d/2]}{\sin[\omega T_d/2]}$$

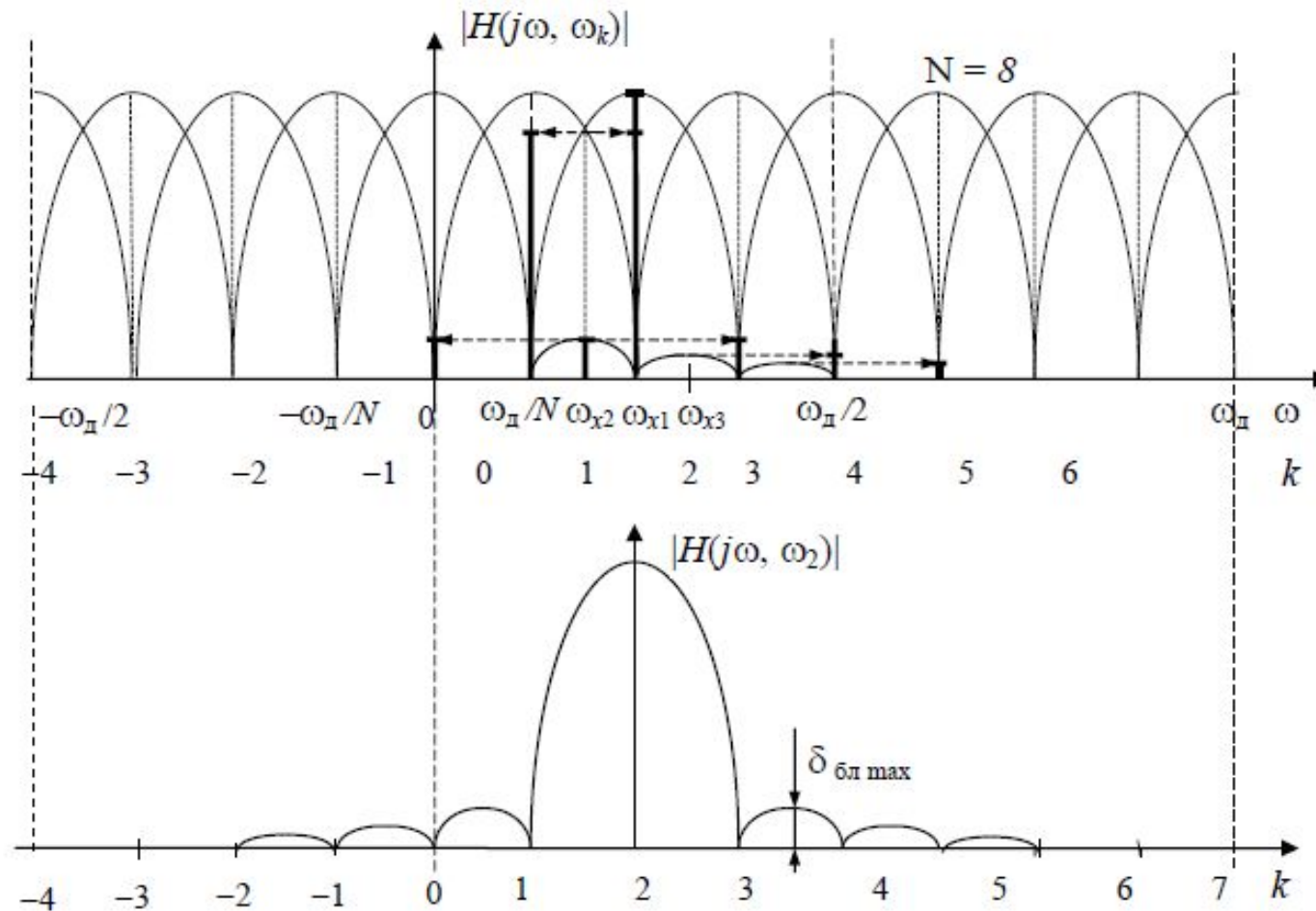
- Канали $k = 0, 1, \dots, (N-1)/2$, що відгукнулися на сигнал $x(n) = e^{j\omega n T_d}$, описуються частотною характеристикою:

$$H_R(j\omega, \omega_k) = e^{-j(\omega - \omega_k)(N-1)T_d/2} \frac{\sin[(\omega - \omega_k)NT_d/2]}{\sin[(\omega - \omega_k)T_d/2]}.$$

- На сигнал $x(n) = e^{-j\omega n T_d}$ відгукуються канали $k_- = -1, -2, \dots, -(N-1)/2$ відповідно до їх частотної характеристики:

$$H_R(j\omega, \omega_k) = e^{j(\omega + \omega_k)(N-1)T_d/2} \frac{\sin[(\omega + \omega_k)NT_d/2]}{\sin[(\omega + \omega_k)T_d/2]}$$

2. Частотні характеристики аналізатора спектра



Частотна характеристика N -канального аналізатора спектра з прямокутною ваговою функцією та частотна характеристика одного каналу

3. Визначення відгуків аналізатора спектра на гармонійні сигнали

- На сигнали з частотою $\omega_x \neq \omega_k$ (частота ω_{x_2} на рис. 2) відгукуються два сусідні канали на рівні головних пелюсток їх частотних характеристик, а на рівні бічних пелюсток відгукуються всі канали ДПФ, або кажуть, що сигнал в цьому випадку проектується на всі біни ДПФ, тобто присутній на виходах всіх каналів. Це явище називають розмиванням спектра, подрібненням або просочуванням спектра між каналами. При цьому ускладнюється однозначне виявлення сигналу та оцінювання його параметрів (амплітуди, частоти та фази).
- Якщо одночасно з гармонійним сигналом з частотою ω_{x_2} діє гармонійний сигнал однакової амплітуди з частотою ω_{x_3} (рис. 2) (зсунутий по частоті на 1 бін), то сумарний відгук аналізатора на ці сигнали в каналі, який відповідає частоті ω_{x_1} , перевищує за амплітудою окремі відгуки на них в сусідніх каналах, що свідчить про неможливість частотного розпізнавання сигналів. Розпізнавання можливе при такому рознесенні частот сигналів, при якому їх індивідуальні відгуки перевищують за амплітудою сумарний відгук.

3. Визначення відгуків аналізатора спектра на гармонійні сигнали

- Важливою для практики є задача виявлення та оцінювання параметрів дійсних гармонійних сигналів $x(n) = \cos(\omega n T_d)$. Такий сигнал можна подати у вигляді суми двох комплексних гармонійних сигналів з частотою $\omega > 0$ та $\omega < 0$:

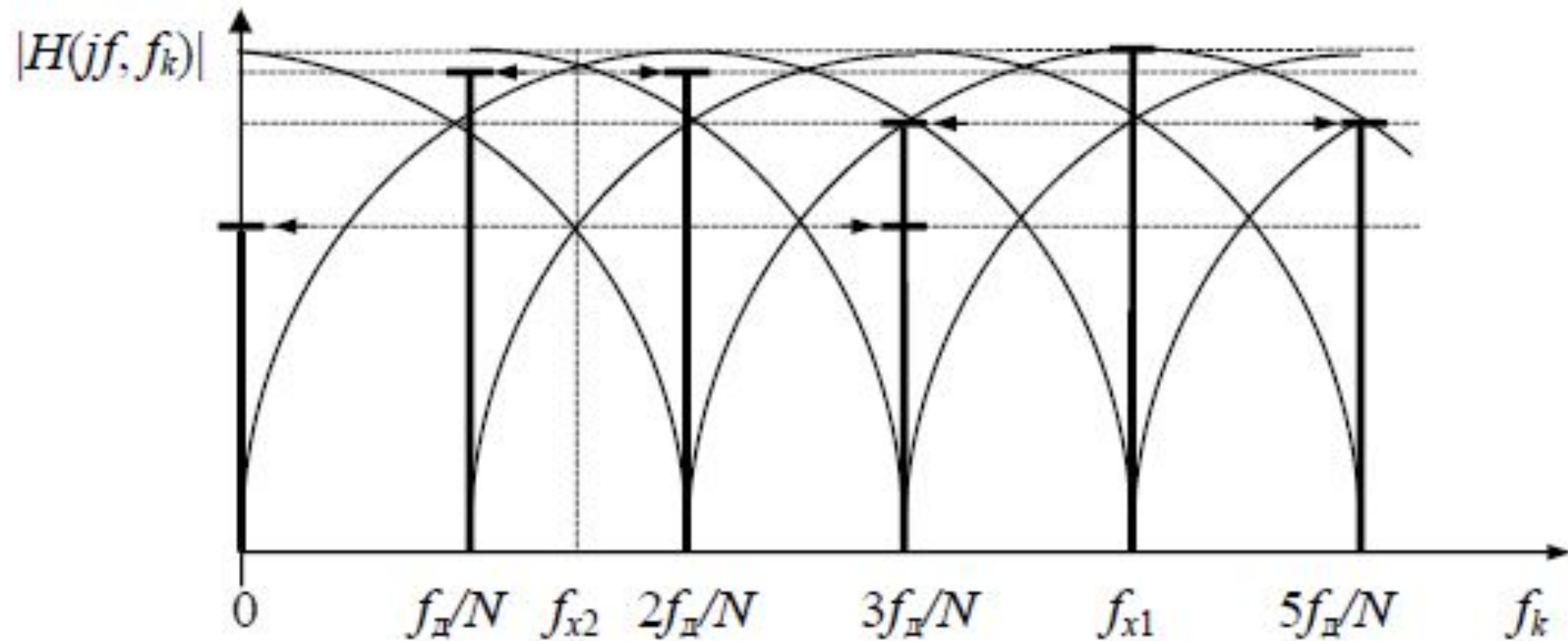
$$x(n) = \frac{1}{2} (e^{j\omega n T_d} + e^{-j\omega n T_d}) = \frac{1}{2} (x_1(n) + x_2(n)).$$

- Згідно принципу суперпозиції, відгук аналізатора спектра на сигнал $x(n)$ також можна знайти як суму відгуків на комплексно-спряжені складові $x_1(n)$, $x_2(n)$ відповідно до частотної характеристики аналізатора спектра.
- У випадку $\omega_x = \omega_k$ на нього відгукується один k -й канал аналізу в смузі аналізу $(0 \div \omega_d/2)$ та один $(-k)$ -й канал в смузі аналізу $(-\omega_d/2 \div 0)$. Це відповідає однозначному розв'язанню дійсного сигналу в смузі фізичних частот $(0 \div \omega_d/2)$. При $\omega_x \neq \omega_k$ відгукуються всі канали, при цьому відгуки від комплексної складової

$$x_2(n) = e^{-j\omega_k n T_d}$$

накладаються в смузі $(0 \div \omega_d/2)$ на відгуки від комплексної складової $x_1(n) = e^{-j\omega_x n T_d}$ (з урахуванням їх фазового зсуву).

4. Роль вагових функцій при спектральному аналізі та їх основні параметри



Частотні характеристики каналів аналізатора спектра з ваговою функцією Хеммінга

4. Роль вагових функцій при спектральному аналізі та їх основні параметри

Параметри вагових функцій, застосовуваних при аналізі

Тип ВФ		спектра	$K_{\text{ког}}$	$\delta_{\text{бп'}}$ дБ	$A_{\text{п}}$, дБ
Прямокутна	1	0,89 / 1,21	1	-13,6	-3,92
Трикутна	1,33	1,28 / 1,78	0,5	-27	-1,82
Хеммінга	1,36	1,30 / 1,81	0,54	-41	-1,78
Блекмана	1,73	1,68 / 2,36	0,42	-57	-1,1
Кайзера, $\beta = 3$	1,8	1.71/2,39	0,4	-69	-1,02

4. Роль вагових функцій при спектральному аналізі та їх основні параметри

- Еквівалентна шумова смуга вагової функції

$$P_{\text{ш.вф}} = \frac{Q_0}{2\pi} \int_{-\frac{\omega_D}{2}}^{\frac{\omega_D}{2}} |W(j\omega)|^2 d\omega = \frac{Q_0}{T_D} \sum_{n=0}^{N-1} w^2(n).$$

- де $Q_0 = \sigma_{\text{ш0}}^2 / f_D$ – спектральна щільність потужності білого шуму на вході фільтра (або каналу).
- Максимальне підсилення вагової функції на частоті $\omega = 0$ визначається як

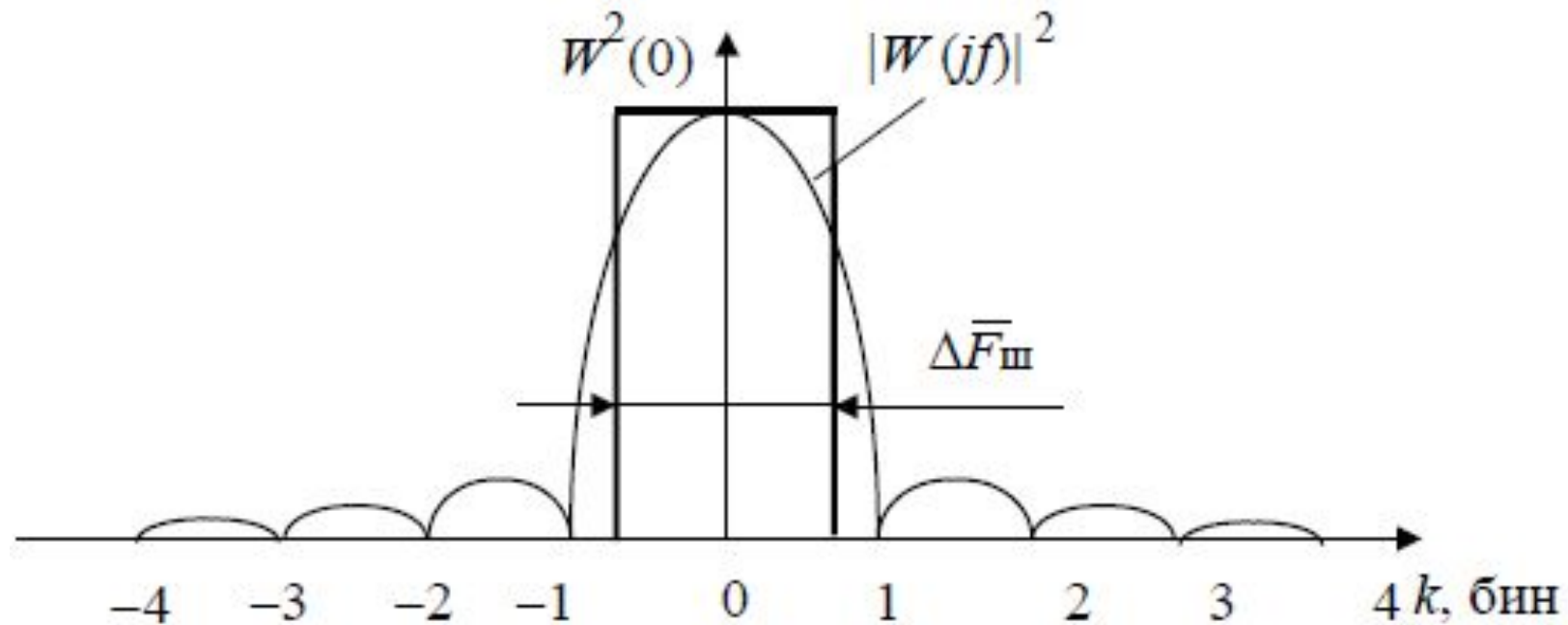
$$W(j0) = \sum_{n=0}^{N-1} w(n) \text{ – за рівнем) та}$$

$$|W(j0)|^2 = \left[\sum_{n=0}^{N-1} w(n) \right]^2 \text{ – за потужністю.}$$

- Потужність шуму на виході ідеального фільтра

$$P_{\text{ш.і}} = Q_0 |W(j0)|^2 \Delta F_{\text{ш}} = Q_0 |W(j0)|^2 \Delta \bar{F}_{\text{ш}} (f_{\text{ш}} / N).$$

4. Роль вагових функцій при спектральному аналізі та їх основні параметри



Визначення еквівалентної шумової смуги вагової функції

4. Роль вагових функцій при спектральному аналізі та їх основні параметри

- Прирівнюючи потужності $P_{ш.вф} = P_{ш.і}$, знаходимо вираз для еквівалентної шумової смуги вагової функції w , відповідно, еквівалентної шумової смуги каналу аналізатора спектра:

$$\Delta \bar{F}_{ш} = N \sum_{n=0}^{N-1} w^2(n) / \left(\sum_{n=0}^{N-1} w(n) \right)^2, \quad \text{бін.}$$

4. Роль вагових функцій при спектральному аналізі та їх основні параметри

- *Шириною* головної пелюстки частотної характеристики вагової функції $|W(j\omega)|\Delta\bar{F}_{\text{гл}(6)}$, визначеної на рівні 6 дБ та вираженої в бінах, визначається роздільна здатність аналізатора спектра за частотою:

$$\Delta f_p = \Delta\bar{F}_{\text{гол}(6)} f_d / N.$$

- За значенням Δf_p знаходиться необхідна ширина вікна аналізу N , що визначає час аналізу $T_A = (N - 1)T_d$:

$$N = \Delta\bar{F}_{\text{гол}(6)} f_d / \Delta f_p.$$

- Когерентне підсилення вагової функції

$$K_{\text{ког}} = W(0)/N = (1/N) \sum_{n=0}^{N-1} w(n)$$

4. Роль вагових функцій при спектральному аналізі та їх основні параметри

Максимальний рівень бічних пелюсток $\delta_{\text{бп max}}$, дБ був розглянутий при синтезі НФ методом вагових функцій. Важливе значення має швидкість спадання рівня бічних пелюсток при їх віддаленні від головної пелюстки, яка складає -12 дБ/октаву для трикутної та -6 дБ/октаву для решти вагових функцій.

Паразитна амплітудна модуляція спектра визначається відношенням значення частотної характеристики вагової функції на частоті $f = f_d/(2N)$ до максимального значення частотної характеристики на частоті $f = 0$:

$$A_{\text{п,дБ}} = 20 \lg \left[|W(j\omega)|_{(\omega=\omega_d/2N)} / W(j0) \right].$$

Значення $A_{\text{п}}$ характеризує викривлення або втрати оцінок ДПФ у випадку найнесприятливіших для аналізу частот сигналу $f = f_k \pm f_d/(2N)$.

Системи цифрової обробки інформації

Лекція 13

Реалізація цифрової обробки сигналів засобами мікропроцесорних систем

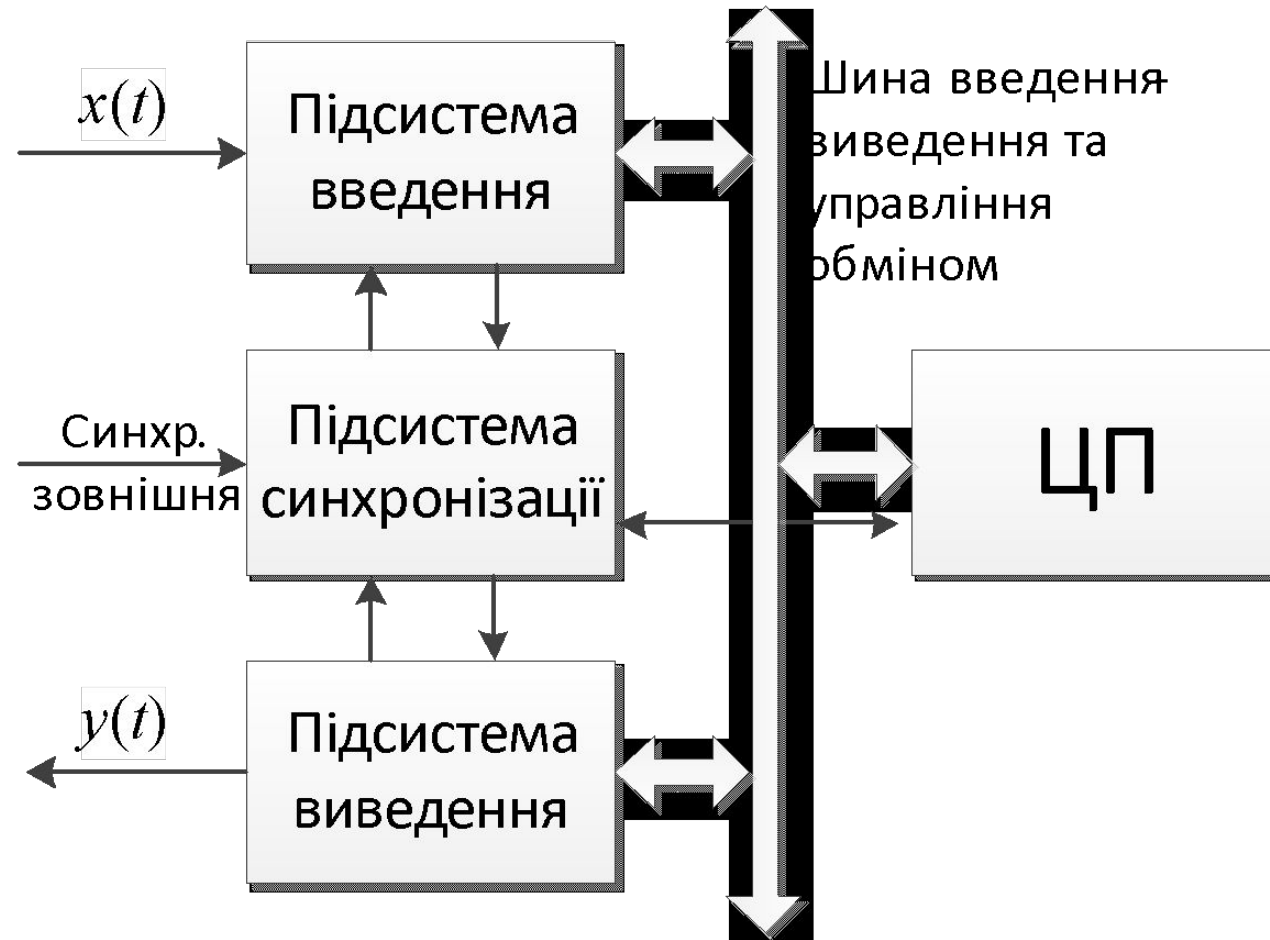
1. Загальні питання реалізації систем цифрової обробки сигналів
2. Узагальнена структура процесора ЦОС
3. Формати чисел, застосовувані в процесорах з фіксованою точкою
4. Програмування цифрових фільтрів на основі мікропроцесорних засобів

1. Загальні питання реалізації систем цифрової обробки сигналів

- Загальним завданням реалізації ЦОС є забезпечення потрібної швидкості та точності обробки при мінімальних масогабаритних характеристиках, енергоспоживанні та вартості.
- До *реалізаційних показників* відноситься також рівень програмованості та відкритості системи, що визначає можливість її функціонального розвитку та модифікації.



1. Загальні питання реалізації систем цифрової обробки сигналів



Загальна структура апаратного забезпечення системи ЦОС

1. Загальні питання реалізації систем цифрової обробки сигналів

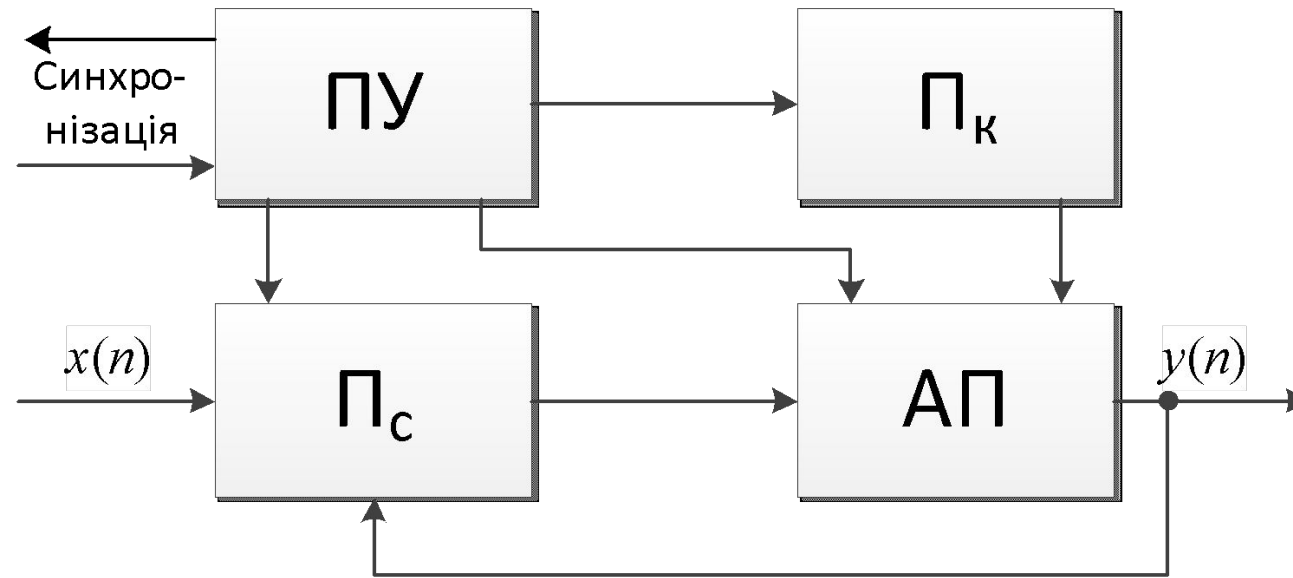
- *Засобами реалізації підсистем введення-виведення та синхронізації є АЦП, ЦАП, аналогові пристрої (фільтри, підсилювачі, УВХ), цифрові та запам'ятовуючі пристрої, мікроконтролери (для управління введенням-виведенням) та ін.*
- *Засобами реалізації процесора ЦОС визначається спосіб реалізації системи в цілому – апаратний або апаратно-програмний. Для апаратної реалізації ЦОС це жорстка логіка та програмовані логічні інтегральні мікросхеми (ПЛІС), для апаратно-програмної – різні мікропроцесорні засоби.*

1. Загальні питання реалізації систем цифрової обробки сигналів

- Провідними в галузі ПЛІС є фірми XILINX, (сімейства ПЛІС Virtex4, Spartan3, CollRuner2), ALTERA (сімейства ПЛІС MAX 10) та ін.



2. Узагальнена структура процесора ЦОС

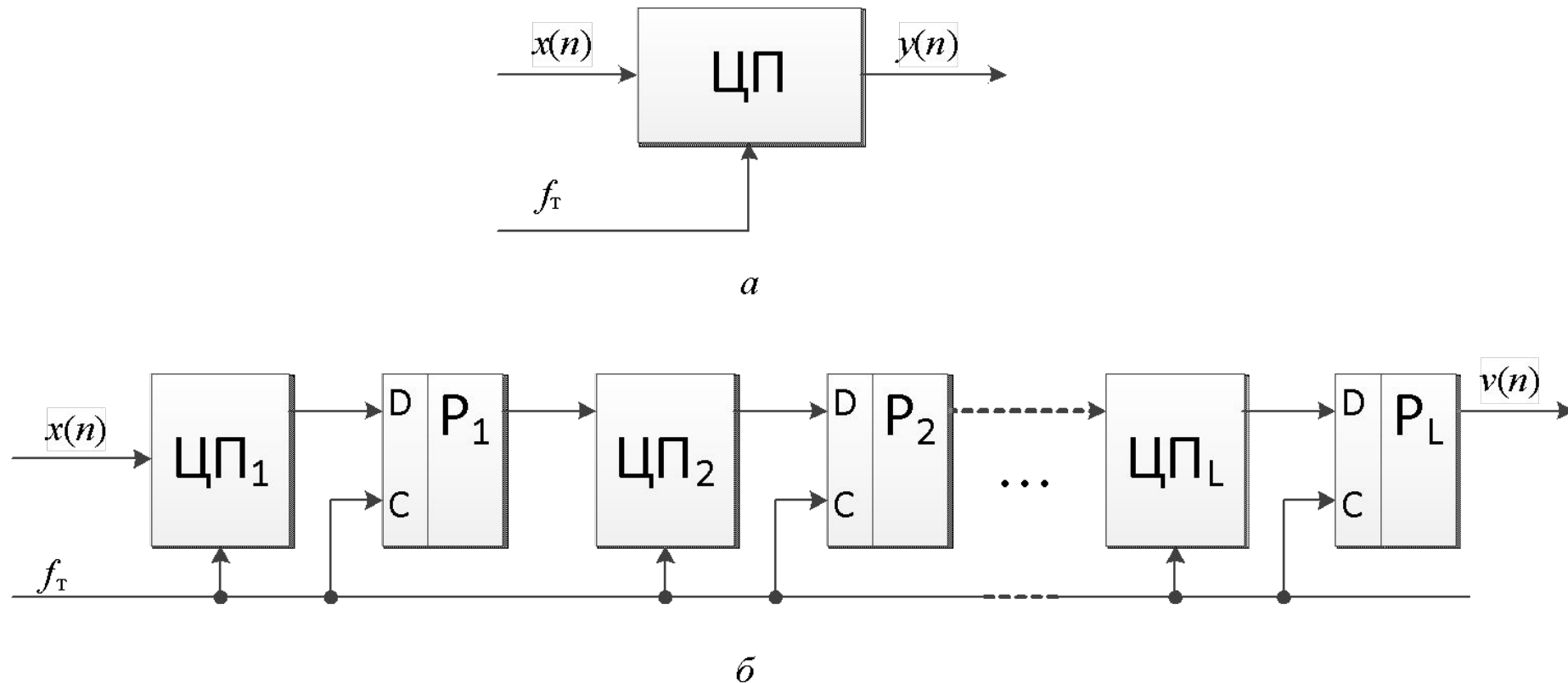


Узагальнена структура процесора ЦОС

АП - арифметичний пристрій; ПУ - пристрій управління;

П_к - пам'ять коефіцієнтів; П_с - сигнальна пам'ять (пам'ять відліків сигналу).

2. Узагальнена структура процесора ЦОС



Структура цифрового пристрою без конвейерної обробки
(а)

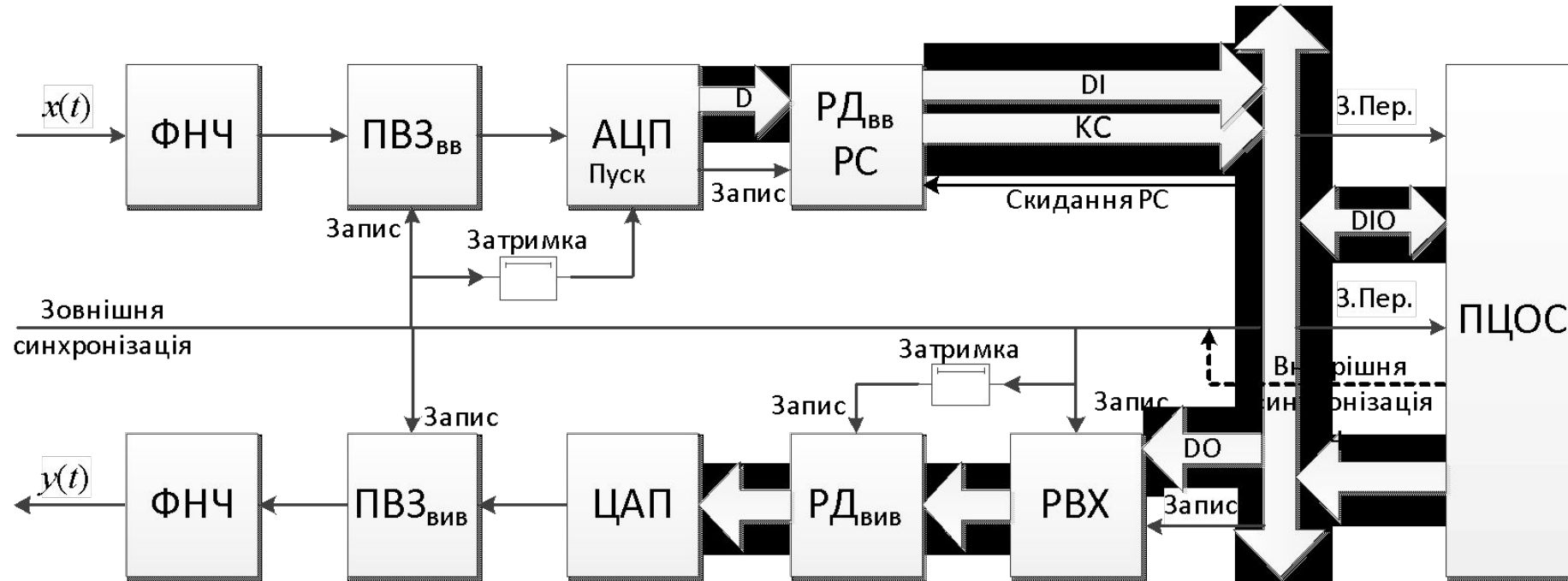
та з конвейерною обробкою (б)

2. Узагальнена структура процесора ЦОС

- Системи ЦОС реального часу виконують *циклічну* послідовність операцій введення, обробки та виведення даних.
- *Завдання їх синхронізації* полягає в забезпеченні жорсткої прив'язки циклів введення, обробки та виведення до заданого періоду (частоти) дискретизації сигналу, що визначає тривалість часового циклу системи:

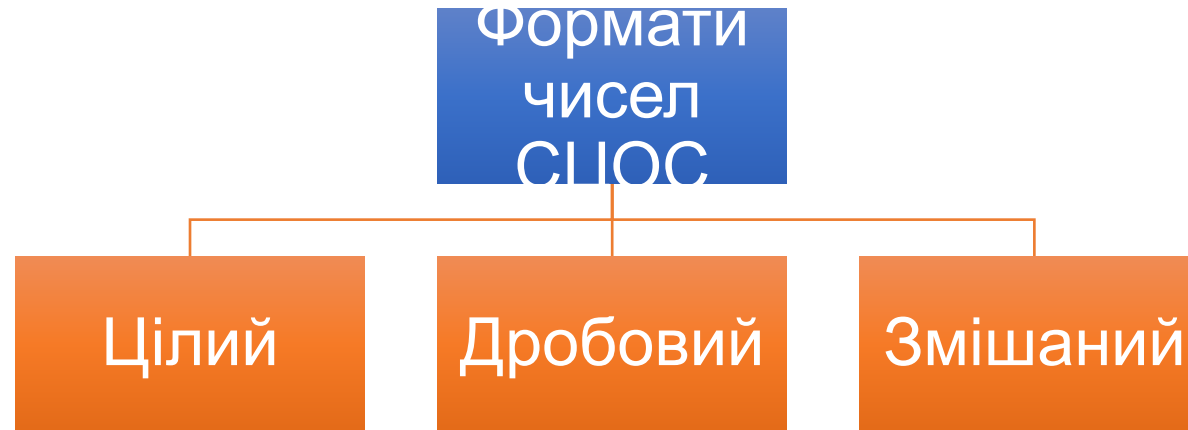
$$T_{\text{ц}} = T_{\text{вв}} + T_{\text{обр}} + T_{\text{вив}} + T_{\text{оч}} = T_{\text{д}} = \text{const.}$$

2. Узагальнена структура процесора ЦОС



Приклад структурної схеми синхронізованої системи ЦОС

3. Формати чисел, застосовувані в процесорах з фіксованою точкою



- Формат може бути узагальнено поданий як

$$q_z \cdot q_{ц} \cdot q_{др}$$

- де q_z – кількість знакових двійкових розрядів;
- $q_{ц}$ – кількість двійкових розрядів цілої частини;
- $q_{др}$ – кількість двійкових розрядів дробової частини.
- Наприклад, формат 1.1.14 означає 1 розряд знаку, 1 розряд цілої частини та 14 розрядів дробової частини

4. Програмування цифрових фільтрів на основі мікропроцесорних засобів

- В пам'яті процесора розміщуються коефіцієнти різницевого рівняння ланок другого порядку $m_j, b_{1j}, b_{2j}, a_{1j}, a_{2j}$ (програмні змінні $M(J), B1(J), B2(J), A1(J), A2(J)$) та відліки внутрішніх сигналів, відповідних, наприклад, канонічній формі реалізації ланок $w_j(n-1), w_j(n-2)$ (програмні змінні $W1(J), W2(J)$), де $J = 1, 2, \dots, L$ – номери послідовно або паралельно включених ланок,
 L – кількість ланок. Вони утворюють масиви даних K та W

4. Програмування цифрових фільтрів на основі мікропроцесорних засобів

Масив K	АДРЕСА
m_1	$ADRK + 1$
$-a_{21}$	$ADRK + 2$
$-a_{11}$	$ADRK + 3$
b_{21}	$ADRK + 4$
b_{12}	$ADRK + 5$
...	...
m_J	$ADRK + U$
$-a_{2J}$...
$-a_{1J}$...
b_{2J}	...
b_{1J}	...
...	...
m_L	...
$-a_{2L}$...
$-a_{1L}$...
b_{2L}	...
b_{1L}	$ADRK + (5L)$

a)

Масив W	АДРЕСА
$w_1(n-2)$	$ADRW + 1$
$w_1(n-1)$	$ADRW + 2$
$w_2(n-2)$	$ADRW + 1$
$w_2(n-1)$	$ADRW + 2$
...	...
...	$ADRW + I$
$w_J(n-2)$...
$w_J(n-1)$...
...	...
...	...
...	...
$w_L(n-2)$	$ADRW + (2L)$
$w_L(n-1)$	

б)

Розподіл пам'яті коефіцієнтів та сигнальної пам'яті рекурсивного фільтра

4. Програмування цифрових фільтрів на основі мікропроцесорних засобів

Масив H	АДРЕСА
$h(0)$	$ADRH + 0$
$h(1)$	$ADRH + 1$
$h(2)$	$ADRH + 2$
	$ADRH + U$
$h(N-3)$	$ADRH + (N-3)$
$h(N-2)$	$ADRH + (N-2)$
$h(N-1)$	$ADRH + (N-1)$

a)

Черга X	АДРЕСА
	$ADRX + 0$
	$ADRX + 1$
	$ADRX + 2$
$x(n-N+2)$	
$x(n-N+1)$	
$x(n)$	$ADRX + I$
$x(n-1)$	$ADRX + I0$
$x(n-2)$	
	$ADRX + (N-3)$
	$ADRX + (N-2)$
	$ADRX + (N-1)$

б)

Розміщення операндів в пам'яті нерекурсивного фільтра