Динамика материальной точки и поступательного движения твердого тела

Лекция №3

План лекции

- 1. Инерциальные системы отсчета. Сила, масса и импульс тела. Первый закон Ньютона.
- 2. Второй закон Ньютона.
- 3. Третий закон Ньютона.
- 4. Силы в механике.
- 5. Центр масс. Закон сохранения импульса.
- 6. Реактивное движение. Уравнение Мещерского. Формула Циолковского.

1. Инерциальные системы отсчета. Сила, масса и импульс тела. Первый закон Ньютона

Динамика *изучает механическое взаимодействие тел с учетом вызвавших его причин.*

Динамику интересуют силы, действующие на тела.

Сила $\vec{F}$ – ВФВ, характеризующая механическое взаимодействие тел и полей.

$$[F] = 1\,\frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2} = 1\ \text{Н (ньютон)}$$

О действии сил можно судить по двум признакам:

1)Появление ускорения (динамическое действие)

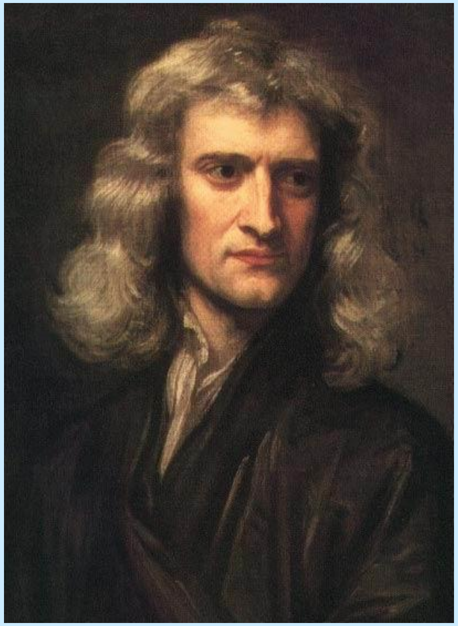
2)Деформация тел (статическое действие)

<u>Принцип суперпозиции для сил:</u>

Если на тело действуют несколько сил, то силы действуют независимо друг от друга, и результат их действия складывается по правилам действия над векторами.

$$\boxed{\vec{F}_\Sigma = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n}$$

Инерциальная система отсчета (ИСО) – это система отсчета, связанная со свободным невращающимся телом.
Свободным называется тело, не взаимодействующее с другими телами.



В основе классической механики лежат три закона, сформулированные И. Ньютоном в книге «Математических началах натуральной философии» (1687 г.).

Классическая механика – это механика Ньютона.

Сэр Исаак (Айзек) Ньютон
1642-1727

Первый закон Ньютона

(закон инерции)

Первый закон Ньютона говорит о движении свободной м.т. относительно ИСО.

Формулировки :

- Ньютон:

  «Всякое тело продолжает удерживаться в состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока и поскольку оно не понуждается приложенными силами изменить это состояние»

- А.К. Кикоин, И.К. Кикоин, Физика-10:

  «Существуют такие системы отсчета, относительно которых поступательно движущееся тело сохраняет свою скорость постоянной, если на него не действуют другие тела (или действия других тел компенсируются)»

- Мы:

В ИСО свободная м.т. либо покоится либо движется равномерно и прямолинейно.

Инерция – явление сохранения скорости тела по модулю и направлению до тех пор, пока на него не подействуют другие тела.

Инертность – свойство тел, проявляющееся в том, что скорость тела изменяется не мгновенно, а с течением времени.

Масса тела m – СФВ, являющаяся мерой инертных свойств тела при его поступательном движении и мерой гравитационных свойств тела.

[m] = 1 кг

Импульс $\vec{p}$ (количество движения) м.т. – ВФВ, являющаяся мерой ее механического движения и равная произведению массы м.т. на вектор ее скорости:

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{\upsilon}}$$

2. Второй закон Ньютона (основной закон динамики)

Второй закон Ньютона отвечает на вопрос, как изменяется механическое движение материальной точки (тела) под действием приложенных к ней сил.

- **Ускорение, приобретаемое м.т. в ИСО, прямо пропорционально силе, действующей на нее, и обратно пропорционально ее массе:**

$$\boxed{\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}} \qquad (1)$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{\vec{F}}{m} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\left(m\vec{\upsilon}\right)}{dt} = \vec{F}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}} \qquad (2)$$

- **Скорость изменения импульса тела равна равнодействующей всех сил, приложенных к телу** (более общая формулировка 2-го закона Ньютона)**.**

Выражение (1) не выполняется в тех случаях, когда масса тела изменяется.

Выражение (2) является универсальным.

• Второй закон Ньютона **справедлив** <u>только</u> в ***инерциальных системах отсчета***.

• В случае равенства нулю равнодействующих сил ускорение также равно нулю, т.е. этот вывод совпадает с утверждением Первого закона Ньютона.

• **Первый закон Ньютона** рассматривается как самостоятельный закон (а не как следствие второго закона), так как именно 1-ый закон утверждает существование инерциальных системах отсчета, в которых **выполняется *2-ой закон Ньютона***.

• В механике выполняется **принцип независимости действия сил**:

если на м.т. действуют одновременно несколько сил, то каждая из этих сил сообщает м.т. ускорение согласно* 2-му закону Ньютона*, как будто других сил не было. Согласно этому принципу, **силы** и **ускорение** можно разлагать на составляющие, использование которых приводит к существенному упрощению решения задач.

3. Третий закон Ньютона

Силы, с которыми взаимодействуют две материальные точки, равны по модулю и противоположны по направлению:

$$\boxed{\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}}$$

Примечание: эти силы должны быть **<u>одинаковой</u>** природы и приложены к разным телам. Эти силы **<u>всегда</u>** действуют парами.

Механическая система – это совокупность материальных точек (тел), рассматриваемых в данной механической задаче

В механических системах различают внутренние и внешние силы.

Сумма всех внутренних сил в механической системе всегда равно нулю:

$$\sum_{i,j=1}^{n} \vec{F}_{i,j} = 0$$

ЗАКОНЫ НЬЮТОНА ВЫПОЛНЯЮТСЯ ТОЛЬКО В ИСО!

4. Силы в механике

- А. Упругие силы;
- Б. Силы трения;
- В. Гравитационные силы;
- Г. Вес тела. Сила реакции опоры.

- В **современной физике** различают **четыре *вида взаимодействий***:

- 1) гравитационное (взаимодействие обусловленное всемирным тяготением);
- 2) электромагнитное (осуществляемое через электрические и магнитные поля);
- 3) Сильное или ядерное (обеспечивающее связь частиц в атомном ядре);
- 4) слабое (ответственное за многие процессы распада элементарных частиц).

В рамках **классической механики** имеют дело с ***гравитационными*** и ***электромагнитными*** силами, а также с силами **упругости** и **трения**, **вес тела**, **силой реакцией опоры**.

- ***Гравитационные*** и ***электромагнитные силы*** являются **фундаментальными** – их нельзя свести к другим, более простым, силам.
- Законы фундаментальных сил просты и выражаются точными формулами. Пример:

$$\boxed{F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}} \qquad \gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$$ - гравитационная постоянная

- Силы **упругости**, сила **трения**, **вес тела**, **сила реакции опоры** являются по своей природе электромагнитными и, следовательно, не могут считаться фундаментальными. Для этих сил можно получить лишь приближенные эмпирические (опытные) формулы. Примеры:

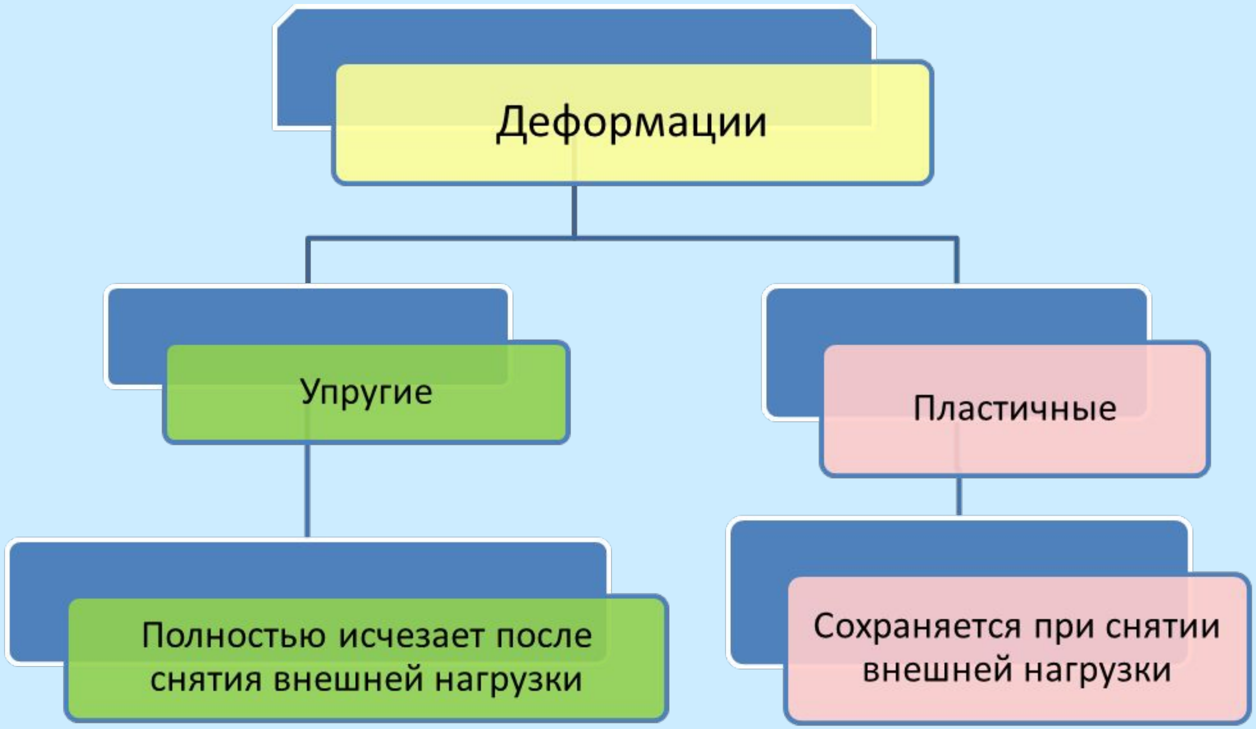
$$\boxed{F_{\text{тр}} = \mu N} \qquad \left| F_{\text{упр}} \right| = k \Delta x$$

А. Упругие силы

Упругая сила – это сила, возникающая в теле при его упругой деформации.

Силы упругости по своей природе относятся к **электромагнитному** виду взаимодействия.

Деформация тела – это изменение его формы и размеров под действием внешних сил.



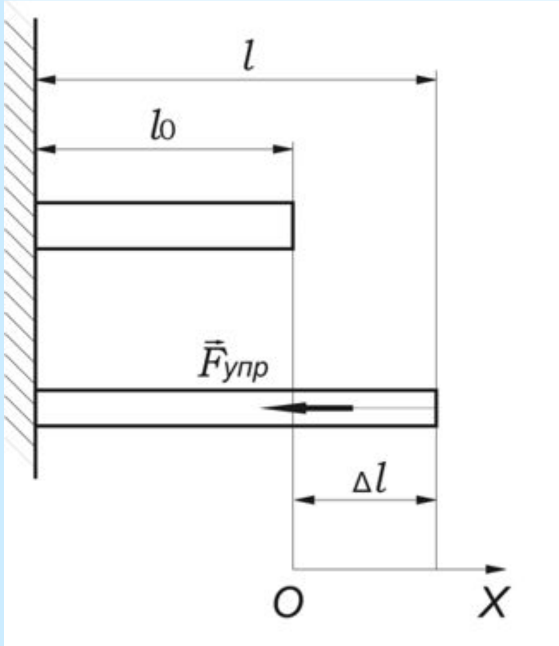
Закон Гука:

Сила $\vec{F}_у$ упругости, возникающая в теле, пропорциональна удлинению Δl тела.

$$\boxed{\begin{aligned} F_у &= k\Delta l = kx \\ F_{у\,x} &= -k\Delta l = -kx \end{aligned}}$$

$x = \Delta l = l - l_0$ - абсолютное удлинение тела

k - коэффициент упругости (жесткость) тела

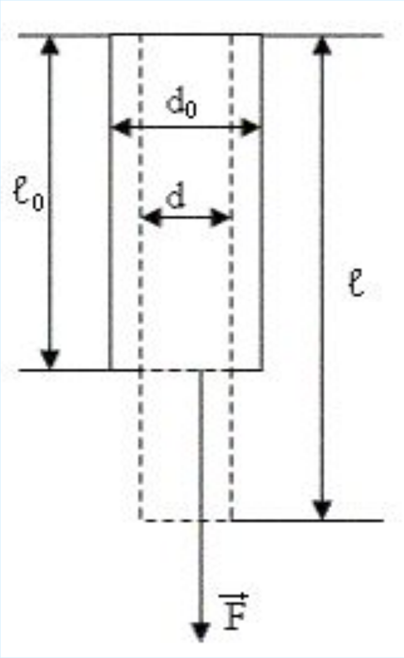


Роберт Гук
(1635-1703)

Виды деформаций

- Растяжение и сжатие
- Кручение
- Сдвиг
- Изгиб

Деформация растяжения (сжатия)



- $\Delta l = l - l_0$ – абсолютное продольное удлинение,
- $\Delta d = d - d_0$ – абсолютное поперечное сжатие,
- $\varepsilon_l = \dfrac{\Delta l}{l_0}$ - относительное продольное удлинение
- $\varepsilon_d = \dfrac{\Delta d}{d_0}$ - относительное поперечное сжатие
- $\mu = \dfrac{\varepsilon_d}{\varepsilon_l}$ – коэффициент Пуассона

$\mu \leq 0{,}5$

Механическое напряжение σ – СФВ, характеризующая распределение упругой силы по сечению образца и равная:

$$\boxed{\sigma = \frac{F_{\text{у.п}}}{S}}$$

$$p = \frac{F_{\text{внеш.}n}}{S}$$ - механическое усилие

$[\sigma] = [p] = 1$ Н/м^2 $= 1$ Па (паскаль)

В случае упругих деформаций однородных тел:
$\sigma = p$, т.к. $F_у = F_{внеш}$

Закон Гука: Механическое напряжение, возникающее в теле, прямо пропорционально его относительному удлинению (сжатию):

$$\boxed{\sigma = E \cdot |\varepsilon|}$$

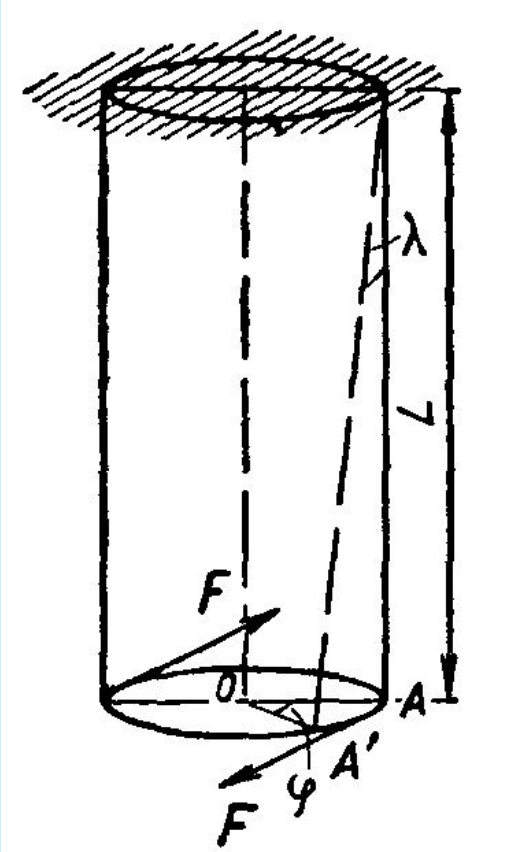
E - модуль Юнга $[E] = 1$ Н/м^2 $= 1$ Па

Физический смысл модуля Юнга:

$E = \sigma$, если $\varepsilon = 1 = \dfrac{\Delta l}{l_0} = \dfrac{l - l_0}{l_0}$ $l - l_0 = l_0$
$l = 2l_0$

Модуль Юнга равен такому нормальному механическому напряжению, возникающему в теле, при котором относительное удлинение было бы равно единице, следовательно, приращение длины было бы равно первоначальной длине стержня, т.е. оно изменило свои размеры в два раза.

Деформация кручения



ϕ - угол закручивания диаметра нижнего основания цилиндра

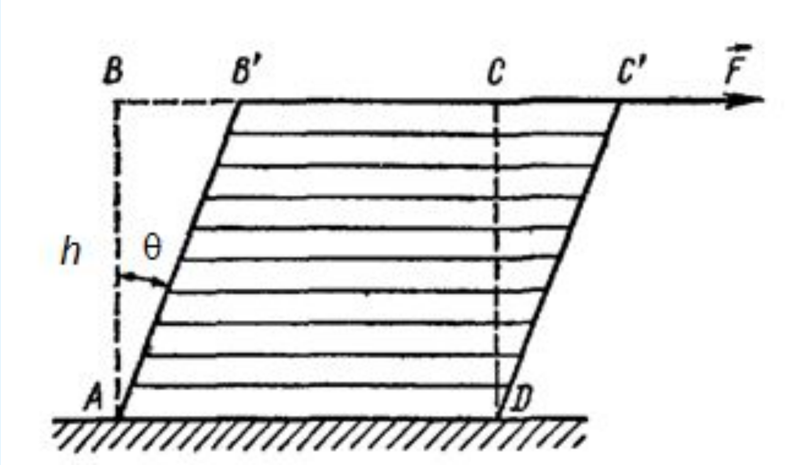
L – высота цилиндра

$$\varepsilon_{\varphi} = \frac{\varphi}{L}$$ - относительная деформация кручения

M = Cϕ - момент силы кручения

C = const - постоянная кручения

Деформация сдвига



$\Delta x = CC'$ - абсолютный сдвиг

γ - относительный сдвиг

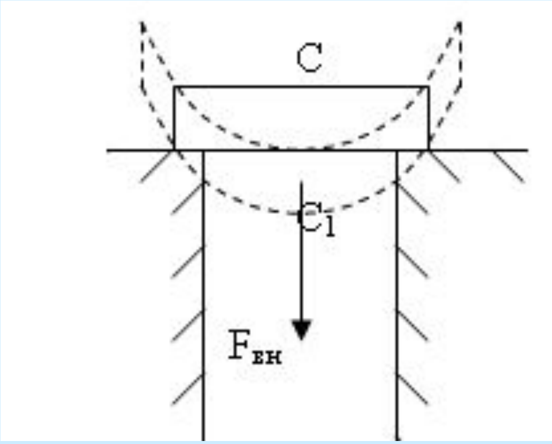
$[\gamma] = 1$ рад

$$\gamma = \frac{\Delta x}{h} = tg\theta$$

Для малых деформаций ($\theta \to 0$):

$$\mathrm{tg}\theta \approx \theta \quad \Rightarrow \quad \gamma = \theta = \frac{\Delta x}{h}$$

Деформация изгиба



$\Delta h = CC_1$ - стрела прогиба

Деформация растяжения

- Нормальное механическое напряжение: $\boxed{\sigma = \dfrac{F_{у.п}}{S}}$
- относительное продольное удлинение: $\varepsilon_l = \dfrac{\Delta l}{l_0}$
- Закон Гука: $\boxed{\sigma = E \cdot |\varepsilon|}$
- E - модуль Юнга
- $[E]$ = 1 Н/м^2 = 1 Па

Деформация сдвига

- Тангенциальное механическое напряжение: $\tau = \dfrac{F_{у\,\tau}}{s}$
- относительный сдвиг: $\gamma = \dfrac{\Delta x}{h} = tg\theta$
- Закон Гука: $\tau = G\gamma = G\theta$
- G - модуль сдвига
- $[G]$ = 1 Н/м^2 = 1 Па

Модуль сдвига равен такому тангенциальному напряжению, при котором угол сдвига оказался бы равен 45°, т.е. $tg\theta = 1$

Б. Силы трения

- **Силы трения** возникают (проявляются) при перемещении соприкасающихся тел или их частей друг относительно друга.

- Трение – взаимодействие между соприкасающимися телами, препятствующее их относительному движению.

- Сила трения относится к электромагнитному виду взаимодействия.

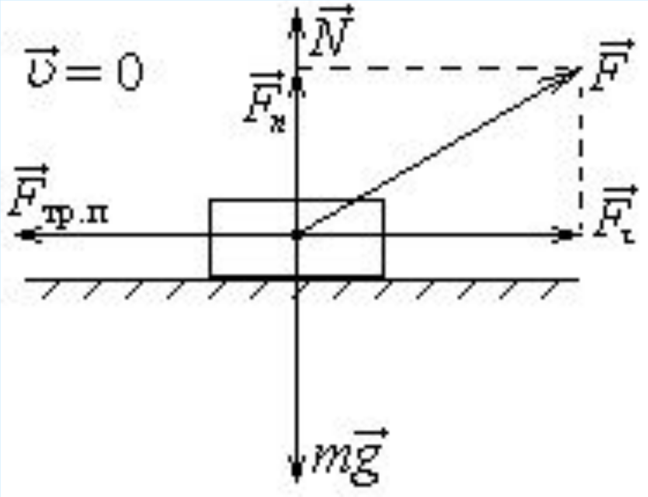
- **Трение** возникающее при относительном перемещении двух соприкасающихся тел, называют ***внешним трением***, а трение между частями одного и того же сплошного тела (например жидкости или газа) называют ***внутренним трением***.

- **Внешнее** (сухое) трение – трение между поверхностями твердых тел.
- **Внутренне** (вязкое) трение – трение между движущимися слоями жидкости или газа.

Внешнее трение:

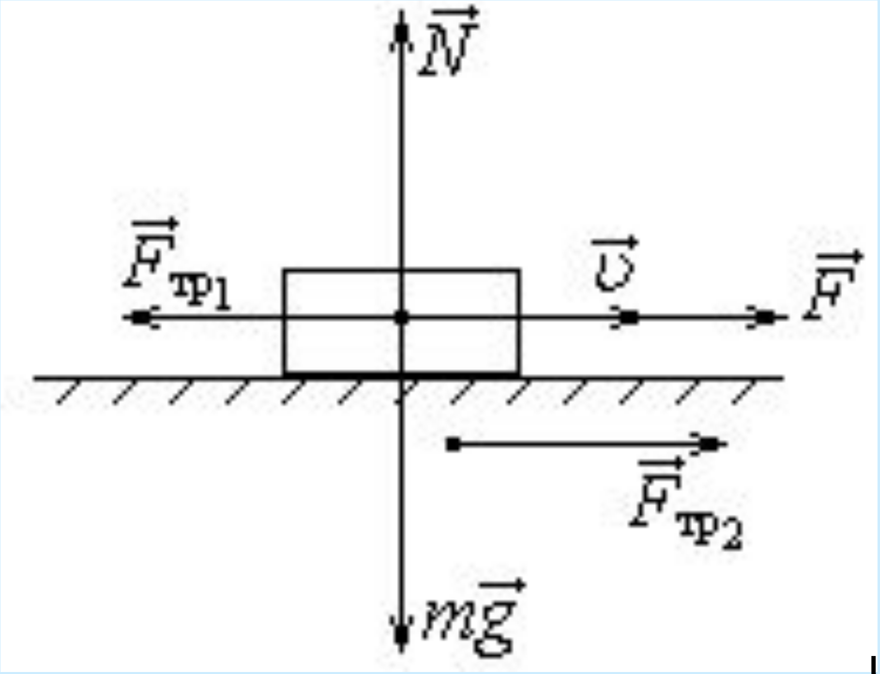
1. ***Трение покоя;***
2. ***Трение скольжения;***
3. ***Трение качения.***

$$\vec{F}_{\text{тр. п}} = -\vec{F}_{\tau}$$



$\vec{F}_{\text{тр. п}}$ - сила трения покоя.

$[\mu_{\text{п}}] = 1$
$F_{\text{тр.п.max}} = \mu_{\text{п}} N$
$\mu_{\text{п}}$ - коэффициент трения покоя



$$\vec{F}_{тр1} = -\vec{F}_{тр2}$$

Силы трения всегда возникают попарно.

$$\boxed{F_{тр} = \mu N}$$

- закон Амонтона-Кулона

μ- коэффициент трения скольжения

$[\mu] = 1$

Коэффициент трения зависит от материала соприкасающихся поверхностей, качества их обработки и физического состояния, но не зависит от их площади.

В. Гравитационные силы

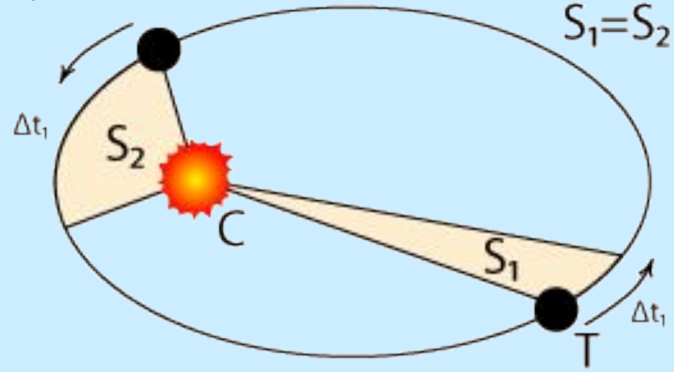
Законы Кеплера

- ***Первый закон Кеплера:***

Все планеты Солнечной системы обращаются по эллипсам, в одном из фокусов которых находится Солнце.

- ***Второй закон Кеплера:***

Все планеты Солнечной системы движутся с постоянными секторными скоростями, т.е. радиус-вектор планеты за равные промежутки времени описывает одинаковые площади.



- ***Третий закон Кеплера:***

Квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца относятся, как кубы больших полуосей их орбит.

$$\boxed{\frac{T^2}{a^3} = \mathrm{const}}$$

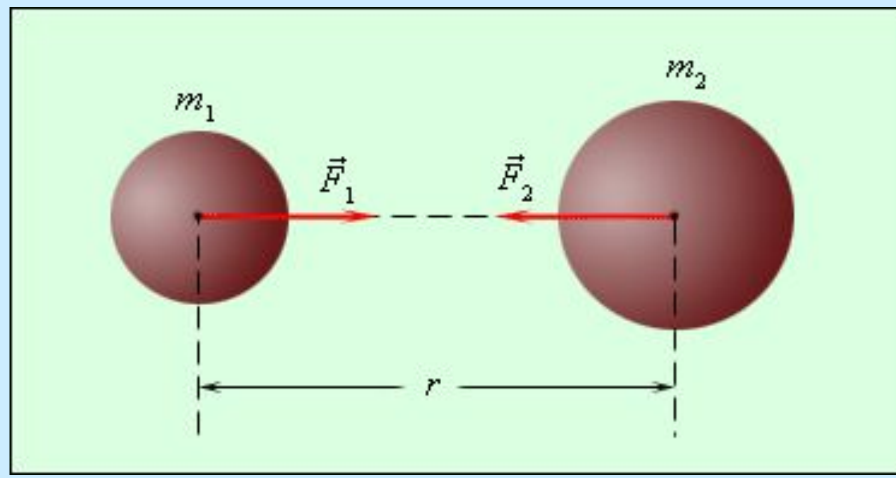
Закон всемирного тяготения (1687 г.):

Сила гравитационного притяжения двух материальных точек прямо пропорциональна произведению их масс и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними:

$$\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$$ - гравитационная постоянная

$$\boxed{F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}}$$

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

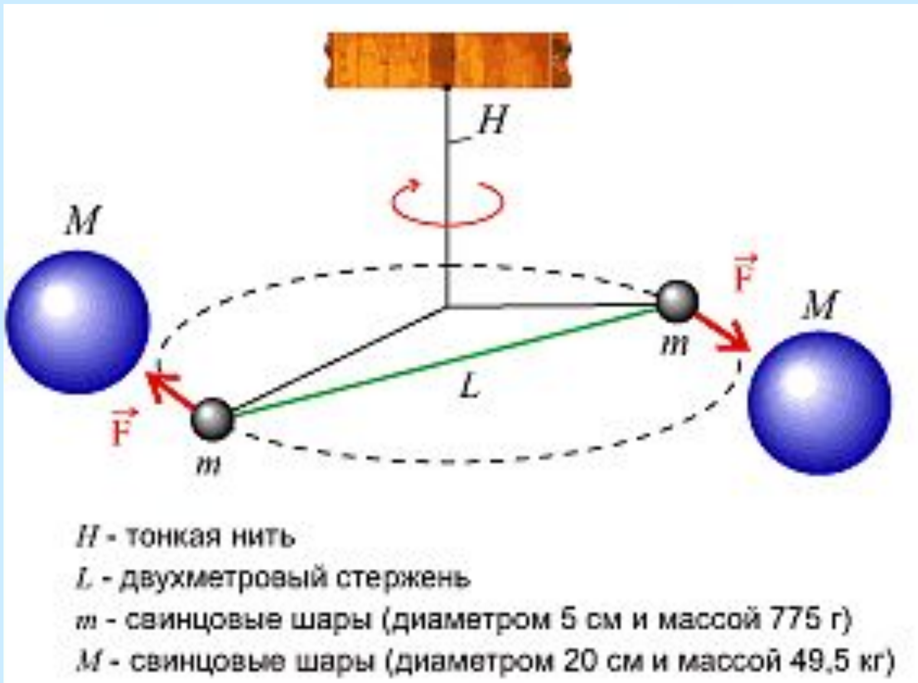


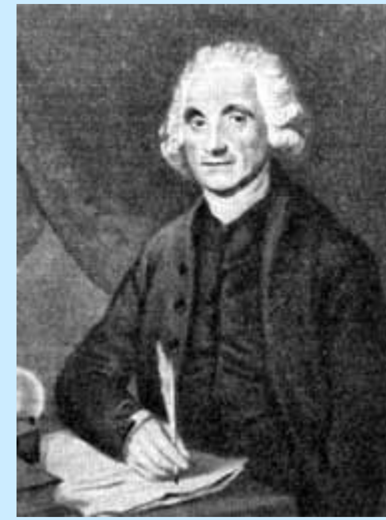
Границы применимости:

- для точечных масс.
- для удаленных тел
- для сферических тел с равномерным распределением плотности по слоям.

Опыт Г. Кавендиша

- В опыте с крутильными весами (1798 г.) впервые была определена гравитационная постоянная





Генри Кавендиш (1731-1810)

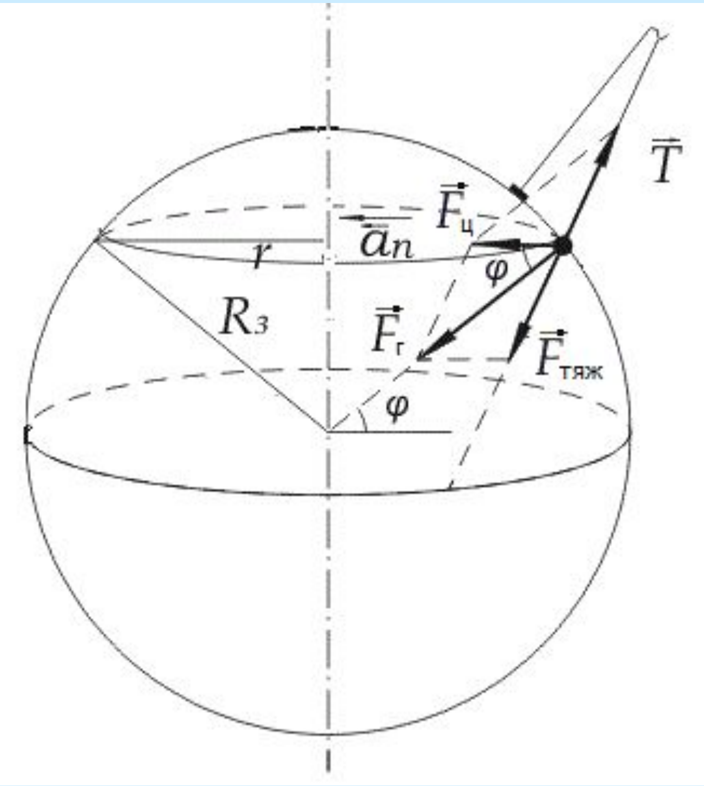
Кавендиш определил гравитиционную постоянную:

$$\gamma = \frac{F \cdot r^2}{M \cdot m} = 6{,}65 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{кг}}$$

Сила тяжести

Сила тяжести $\vec{F}_{тяж}$ **тела** – это отвесная составляющая силы земного тяготения, действующей на тело.

$$\boxed{\vec{F}_{тяж} = m\vec{g}}$$



$\vec{F}_г$ - сила гравитационного притяжения

$\vec{T}$ - сила натяжения нити

ϕ - географическая широта местности

По теореме косинусов

$$F_{тяж} = \sqrt{F_г^2 + F_ц^2 - 2F_г F_ц \cos\varphi}$$

где $F_ц = ma_n = m\dfrac{\upsilon^2}{r}$ - центростремительная сила

1) полюс (ϕ=90°) $F_{тяж} = F_г$
2) экватор (ϕ=0°)

$$F_{тяж} = F_г - \frac{4\pi^2 m}{T_0^2} R_з$$

Максимальное различие между $F_{тяж}$ и $F_г$ не превышает 0,3% ⇒ <u>Будем считать $F_{тяж} \approx F_г$</u>

Ускорение свободного падения

Пусть тело находится на поверхности Земли ($r = R_З$):

$$F = \gamma \frac{mM_З}{R_З^2}$$

F = ma

$$ma = \gamma \frac{mM_З}{R_З^2}$$

$$\boxed{g_0 = \gamma \frac{M_З}{R_З^2} = 9{,}81 \ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}}$$

- ускорение свободного падения на поверхности Земли

$$\boxed{g_h = \gamma \frac{M_З}{(R_З + h)^2}}$$

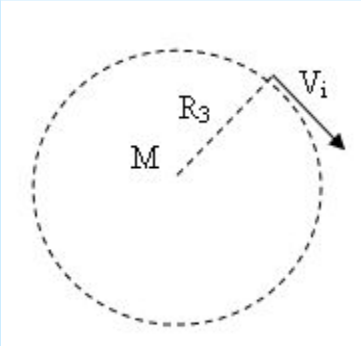
- ускорение свободного падения на высоте h над поверхностью Земли

g зависит от:

1) высоты
2) географической широты
3) залегания горных пород

Космические скорости

- Первая космическая (эллиптическая) скорость – это скорость, которую необходимо сообщить телу, чтобы оно стало искусственным спутником Земли.



$$F = \gamma \frac{mM}{R_З^2}$$

$$F = ma_n = m\frac{\upsilon_1^2}{R_З}$$

$$\boxed{\upsilon_1 = \sqrt{\gamma \frac{M}{R_З}} = \sqrt{gR_З}}$$ - первая космическая скорость

$\upsilon_1 \approx 7{,}9$ км/с

- Вторая космическая (параболическая) скорость – это скорость, которую необходимо сообщить телу, чтобы оно покинуло пределы Земли и стало спутником Солнца.

$W_{k1} + W_{p1} = W_{k2} + W_{p2}$ - ЗСЭ

$$\frac{m\upsilon_2^2}{2} - \gamma \frac{mM_З}{R_З} = 0$$

$$\upsilon_2 = \sqrt{\frac{2\gamma M_З}{R_З}} = \sqrt{\frac{2\gamma M_З R_З}{R_З^2}} = \left| g = \frac{\gamma M_З}{R_З^2} \right| = \sqrt{2gR_З} = \sqrt{2}\upsilon_1$$

$\upsilon_2 = 11{,}2$ км/с

- Третья космическая скорость – это скорость, которую необходимо сообщить телу для того, чтобы оно покинуло пределы Солнечной системы.

υ_3 = 16,7 км/с, если тело запускать по ходу орбитального движения Земли

Гравитационное поле

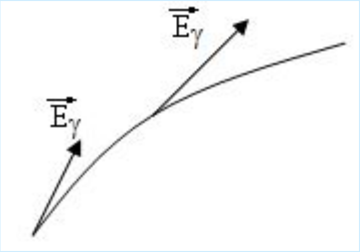
- По современным представлениям любое силовое взаимодействие передается с помощью поля.
- Гравитационное взаимодействие осуществляется гравитационным полем.

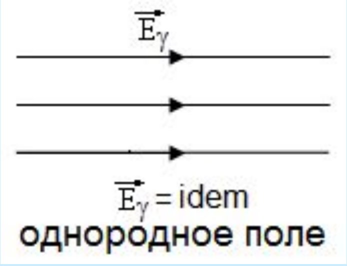
$$\boxed{\vec{E}_\gamma = \frac{\vec{F}}{m} = -\gamma\frac{M}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}}$$ - напряженность гравитационного поля

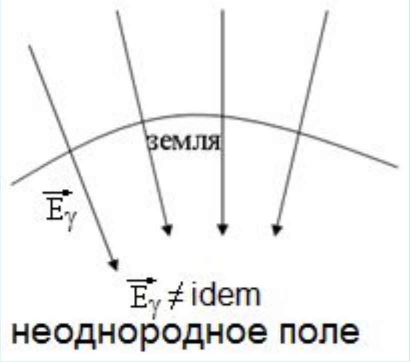
$$\vec{E}_\gamma \approx \vec{g}$$

$$\boxed{\varphi_\gamma = \frac{W_p}{m} = -\gamma\frac{M}{r}}$$ - потенциал гравитационного поля

Силовая линия поля – это линия, в каждой точке которой вектор напряженности направлен по касательной к ней.





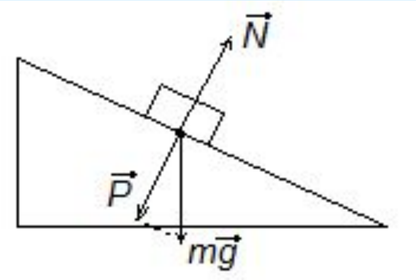


Что такое ГРАВИТОН?

Г. Вес тела. Сила реакции опоры

- **Вес** $\vec{P}$ **тела** – сила, с которой тело давит на опору или натягивает подвес вследствие гравитационного притяжения к Земле.
- **Нормальная реакция** $\vec{N}$ **опоры** – сила, с которой опора действует на тело в направлении, перпендикулярном к поверхности соприкосновения тела и опоры.

Вес тела и сила реакции опоры равны по третьему закону Ньютона: $\vec{P} = -\vec{N}$



В современной науке ***вес*** *и* ***масса*** *— совершенно разные понятия: масса является неотъемлемым свойством тела, а вес — результат действия силы тяжести на опору.*

Во многих повседневных ситуациях слово «вес» продолжает использоваться, когда фактически речь идет о «массе».

$[m] = 1$ кг

$[P] = 1$ Н

5. Центр масс.
Закон сохранения импульса

Центр масс механической системы – это точка масса которой равна массе системы, а радиус вектор задается уравнением:

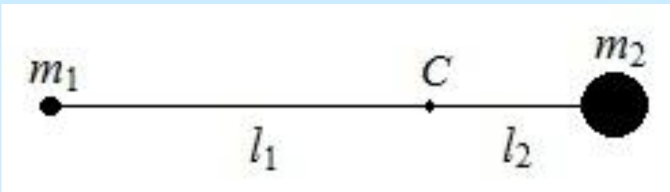
$$\boxed{\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}}$$

или в скалярной форме системой трех уравнений

$$\begin{cases} x_C = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \\ y_C = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \\ z_C = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \end{cases}$$

Центром масс или **центром системы материальных точек** называется точка *C* радиус-вектор которой равен отношению суммы произведений масс всех материальных точек системы на их радиусы векторы к массе всей системы.

Вокруг центра масс уплотнилась бы механическая система, если бы силы гравитационного притяжения возросли до бесконечности.



$m_2 > m_1$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{l_2}{l_1}$$

Замкнутая механическая система – система, на которую не действуют внешние силы.

$$\vec{F}_i = 0$$

Квазизамкнутая механическая система – система, на которую действуют скомпенсированные внешние силы.

$$\vec{F}_i \neq 0 \qquad \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0$$

Незамкнутая механическая система – система, на которую действуют не скомпенсированные внешние силы.

$$\vec{F}_i \neq 0 \qquad \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \neq 0$$

Продифференцируем радиус-вектор центра масс и найдем скорость ее движения:

$$\dot{\vec{r}}_C = \vec{\upsilon}_C = \frac{\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i\right)}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\upsilon}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i}{M}$$

$$M\vec{\upsilon}_C = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i$$

$\boxed{\vec{p}_C = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i}$ - **теорема о движении центра масс**

Центр масс механической системы движется как точка, масса которой равна массе всей системы. Импульс системы равен импульсу центра ее масс.

Закон сохранения импульса (ЗСИ)

$$m\vec{\upsilon}_C = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{\upsilon}_i \qquad d\left(m\vec{\upsilon}_C\right) = d\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{\upsilon}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} d\left(m_i\vec{\upsilon}_i\right)$$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}_C}{dt} = \frac{d\left(m\vec{\upsilon}_C\right)}{dt}$$ **- Закон движения центра масс**

$$d\left(m\vec{\upsilon}_C\right) = \vec{F}dt$$

Fdt - **импульс силы**

Если система замкнута, то $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0$, тогда:

$$d\left(m\vec{\upsilon}_C\right) = 0$$

$$m\vec{\upsilon}_C = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{\upsilon}_i = \text{const}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} \equiv 0$$

Закон сохранения импульса:
импульс замкнутой системы не изменяется с течением времени:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \text{const}}$$ - **закон сохранения импульса**

Геометрическая сумма импульсов тел замкнутой механической системы не изменяется.

СИЛА И ИМПУЛЬС

- Запишем второй закон Ньютона
- F = ma

$$\vec{a} = \frac{\vec{\upsilon} - \vec{\upsilon}_0}{t} \Rightarrow \vec{F} = \frac{m\vec{\upsilon} - m\vec{\upsilon}_0}{t}$$

$$\boxed{\vec{F}t = m\vec{\upsilon} - m\vec{\upsilon}_0}$$

$p = mv$ *–импульс тела после взаимодействия*

$p_0 = mv_0$ – *импульс тела до взаимодействия*

$I = Ft$ – *импульс силы*

$$\boxed{\vec{F} \cdot t = \vec{p} - \vec{p}_0}$$

- Хотя ЗСИ получен с помощью законов динамики, он не является их следствием.
- Все законы сохранения являются универсальными, т.е. выполняются и в макромире и в микромире.
- Согласно **теореме Эмми Нётер** **(1918 г.)** каждому свойству симметрии физической системы соответствует некоторый закон сохранения.
- **Закон сохранения импульса** – следствие **однородности пространства**.

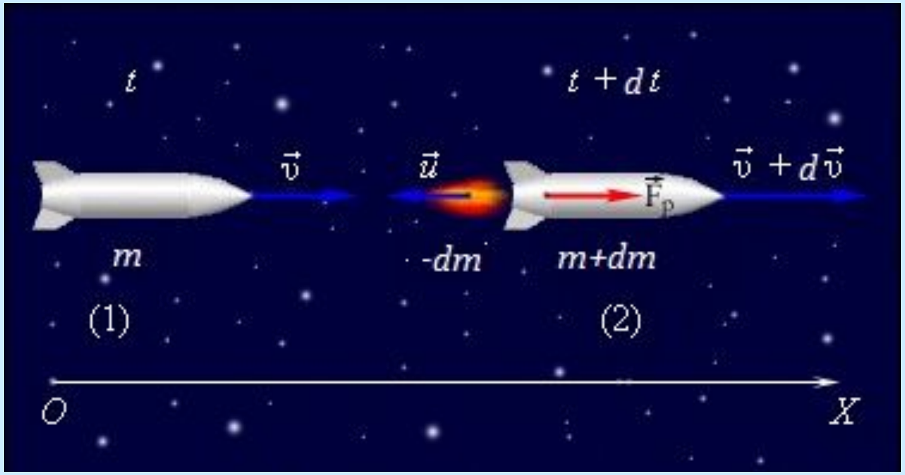
Амалия Эмми Нётер
(1882-1935)

6. Реактивное движение. Уравнение Мещерского. Формула Циолковского

Уравнение Мещерского

- **Реактивное движение** - движение тела, при котором от него отделяется (присоединяется) некоторая его часть.

Рассмотрим движение ракеты:



В момент времени t:
m – масса ракеты,
υ - скорость ракеты,
В момент времени $t + dt$:
$m + dm$ – масса ракеты,
$\upsilon + d\upsilon$ - скорость ракеты,
- dm – масса выброшенных газов ($dm < 0$),
u – скорость истечения газов относительно ИСО

Используем второй закон Ньютона:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad d\vec{p} = \vec{F}dt \qquad \vec{p} - \vec{p}_0 = \vec{F}dt$$

где

$\vec{p}_0$ - импульс системы в начальный момент времени t,

$\vec{p}$ - импульс системы в момент времени $t + dt$.

$$(m + dm)(\vec{\upsilon} + d\vec{\upsilon}) + (-dm\vec{u}) - m\vec{\upsilon} = \vec{F}dt$$

$$m\vec{\upsilon} + md\vec{\upsilon} + dm \cdot \vec{\upsilon} + dm \cdot d\vec{\upsilon} - dm \cdot \vec{u} - m\vec{\upsilon} = \vec{F}dt \quad \Big| \cdot \frac{d}{dt}$$

$$dm \cdot d\vec{\upsilon} \to 0 \qquad \frac{dm}{dt}(\vec{\upsilon} - \vec{u}) + m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{F}$$

$$m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{F} + \frac{dm}{dt}(\vec{u} - \vec{\upsilon})$$

$\vec{V} = \vec{u} - \vec{\upsilon}$ - скорость истечения газов относительно ракеты.

$$\boxed{m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{F} + \frac{dm}{dt}\vec{V}}$$ - **уравнение Мещерского**

$$\vec{F}_{\text{реакт}} = \frac{dm}{dt}\vec{V}$$ - **реактивная сила**

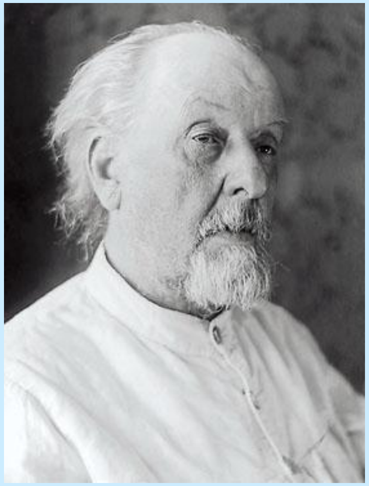
$$m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{F} + \vec{F}_{\text{реакт}}$$

Иван
Всеволодович
Мещерский
(1859-1935)

Формула Циолковского

Пусть система замкнута $\vec{F} = 0$

$$m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{V}$$



Константин Эдуардович Циолковский (1857-1935)

В проекциях на направление движения:

$$m\frac{d\upsilon}{dt} = -V\frac{dm}{dt} \qquad (dm < 0)$$

Разделим переменные: $d\upsilon = -V\dfrac{dm}{m}$

$$\int_0^{\upsilon} d\upsilon = -V\int_{m_0}^{m}\frac{dm}{m}$$

$$\boxed{\upsilon = V\ln\frac{m_0}{m}}$$ - **формула Циолковского**

где m_0 – стартовая масса ракеты (вместе с топливом);

$m = m_0 - m_{топ}$ – полезная масса (масса ракеты без топлива).

Пусть V ≈ 1 км/с, $\upsilon = \upsilon_I$ = 7,9 км/с $\Rightarrow \dfrac{m_0}{m}$ = 2697