



Название читаемого курса:

ФИЗИКА. МАТЕМАТИКА

Специальность **060103 Педиатрия**

6 модулей:

Высшая
математика;
статистика

Биомеханика

Биоэлектродинамика

Оптика

Квантовая
биофизика

Ионизирующее
излучение

Лекция 1

**Введение;
ОСНОВЫ
теории
вероятностей**

Ростов-на-Дону
2012

Содержание лекции №1

- **Введение**
- **Основы теории вероятностей**
- **Случайные события**
- **Случайные величины**
- **Нормальный и экспоненциальный законы распределения**

Введение

Прогресс в медицине тесно связан с применением математики

Математика – База для связи физики и медицины

Генетика



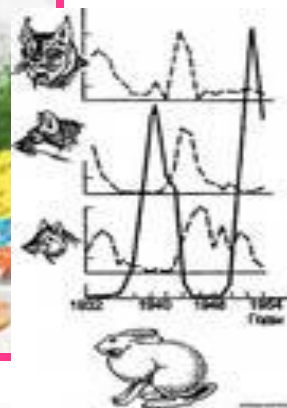
Молекулярная биология:

- компьютерные методы и
- создание математических моделей

Математика – это наука, которая помогает **систематизировать мышление**



Динамика популяций
"хищник-жертва"



Антропология



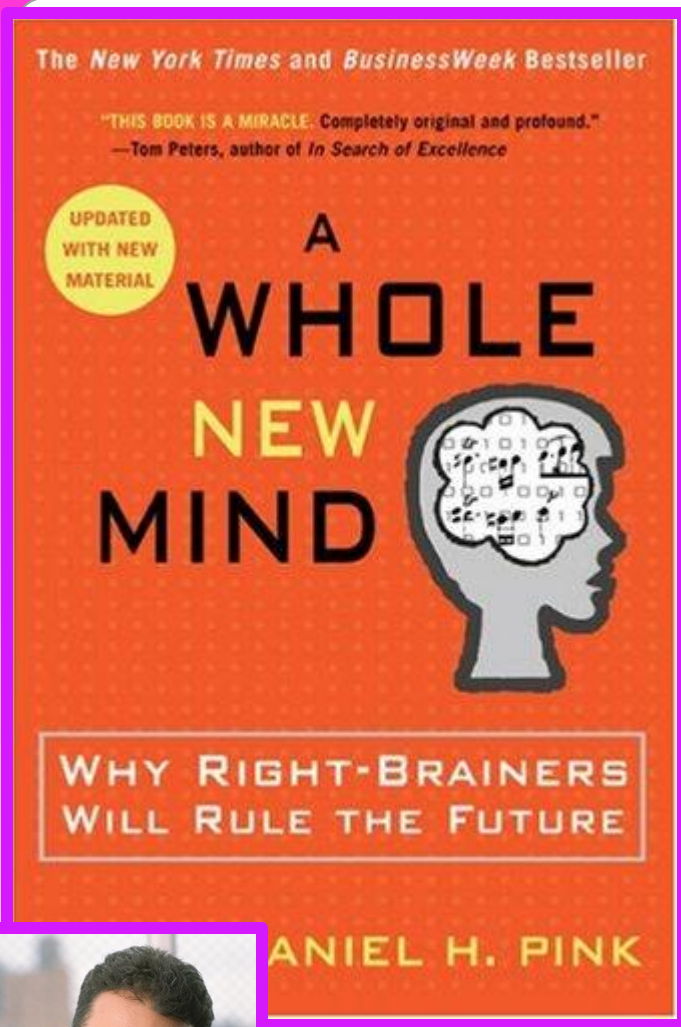


Леонардо да Винчи
1452-1519 гг.

“Никакое человеческое исследование не может почитаться **истинной наукой**, если оно не изложено математическими способами выражения”

“Книга о живописи”





**Если тебе хорошо
дается математика и
естественные науки –
становись врачом**

Главный **спичрайтер**
вицепрезидента США
Дениэл Пинк



Основы теории вероятностей

Теория вероятностей (ТВ) –
это математическая наука, изучающая
закономерности **случайных** явлений.
(То есть явлений с неопределенным исходом)

ТВ

```
graph TD; TV((ТВ)) --> SE[Случайные события]; TV --> RV[Случайные величины];
```

Случайные
события

A, B, C

Случайные величины

X, Y, Z

Случайное событие

Событие – это факт, который в результате испытания может произойти или не произойти.



Это испытание



Это событие

Виды событий

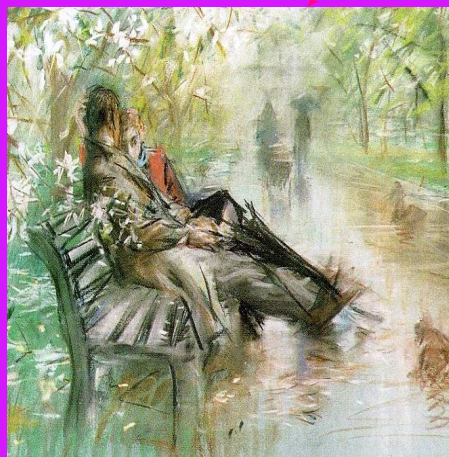
Достоверное

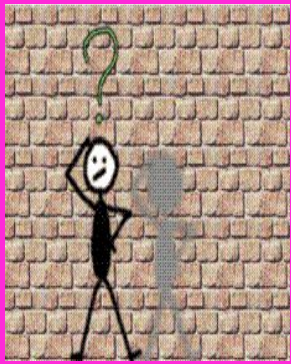
Случайное Невозможное

Всегда

Может
быть

Никогда





Какие события относятся к случайным?

А. Появление орла при подбрасывании монеты



Б. Равномерное движение материальной точки



В. Восход солнца



Г. Рождение мальчика



Ответ: А, Г.

Определение вероятности (классическое и статистическое)

Вероятность случайного события $P(A)$

это численная мера объективной возможности наступления события.

Классическое
определение

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

m число случаев,
благоприятствующих
событию A ,
 n **общее** число
испытаний

До
опыта

Статистическое
определение

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n}$$

После
опыта

Относительная
частота
события

$$\omega = P^*(A) = \frac{m}{n}$$

Английский математик **Карл Пирсон** бросал монету **24000** раз.



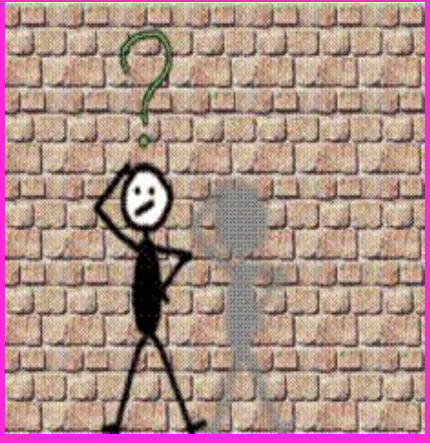
Герб выпал **12012** раз.



Какова **частота** выпадения герба?

Свойства вероятности

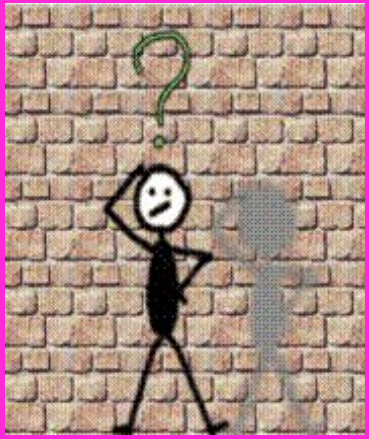
1. $P_{\text{дост.}}(A) = 1$
2. $P_{\text{невозм.}}(A) = 0$
3. $0 \leq P(A) \leq 1$



Набирая номер телефона абонент забыл одну цифру и набрал ее наугад. Какова вероятность, что он набрал цифру правильно?



Ответ: $\frac{1}{10}$.



Одна секретарша напечатала 5 различных писем и подписала 5 конвертов с адресами. Предположим, что она вкладывает письма в конверты **случайным** образом.

Какова вероятность, что ровно 4 письма будут вложены в конверты с адресами тех лиц, кому они предназначены?



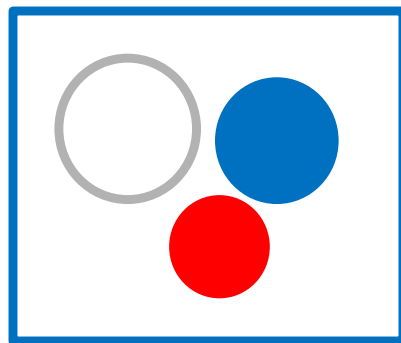
Ответ: $P = 0$.

Понятие о несовместных и совместных событиях

События **А** и **В** несовместны, если появление одного события исключает появления другого события.

События **А** и **В** совместны, если появление одного из них не исключает появления другого в одном и том же испытании.

ПРИМЕРЫ



ПРИМЕРЫ



Понятие о независимых и зависимых событиях

ПРИМЕРЫ

Два события называются **независимыми**, если вероятность одного из них **не зависит** от появления или не появления другого



Два события называются **зависимыми**, если вероятность одного из них **зависит** от появления другого.

Условия нормировки

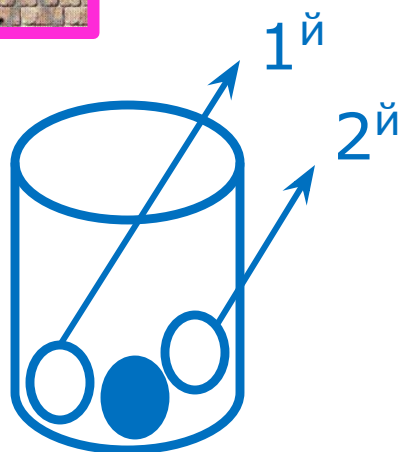
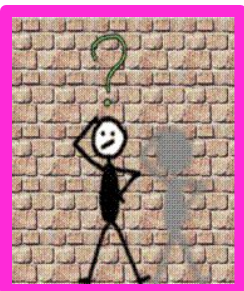
$$\sum_{i=1}^n P(A_i) = 1, \quad P(A) + P(\bar{A}) = 1.$$

Полная сумма вероятностей дискретных событий системы **равна 1**.

Условная вероятность

$$P(B/A).$$

Это вероятность осуществления события ***B*** при условии, что событие ***A*** ***уже произошло***.



Какова вероятность вытащить
подряд 2 белых шара?

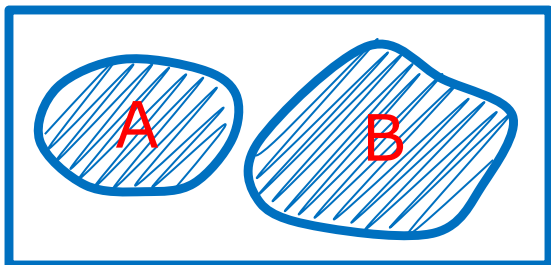
$$P(B/B) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

А может ли быть ответ 4/9?

Теорема сложения вероятностей

Сумма событий

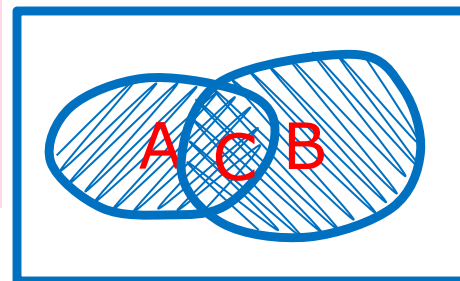
Несовместные



-это такое событие,
при котором
происходит **хотя бы
одно** из этих событий

или

Совместные



или

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Вероятность суммы
двух **несовместных**
событий равна сумме
вероятностей этих
событий.

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

вероятность **совместности**
этих событий



В корзине 30 цветных рубашек:
10 красных, 5 синих, 15 белых.
Какова вероятность вытащить
цветную рубашку?



ИЛИ



Ответ: $P(A + B) = \frac{5}{30} + \frac{10}{30} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$.



Два стрелка. Вероятность попадания в цель 1^{го} стрелка – 0,8, а 2^{го} – 0,7. Какова вероятность, что при одновременном выстреле цель будет поражена. Цель считается пораженной при попадании в нее хотя бы одной из 2^х пуль.



Решение: $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB),$
 $P(A + B) = 0,8 + 0,7 - 0,8 \cdot 0,7 = 0,94.$

Теорема умножения вероятностей

Произведение событий-это событие, состоящее в **совместном** появлении этих событий

А чему равно произведение вероятностей несовместных событий?



Совместные
события

Независимые

И

Зависимые

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B).$$

Вероятность произведения двух **независимых** событий равна произведению вероятности этих событий

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A).$$

Вероятность произведения двух **зависимых** событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого.



Брошены 2 монеты.
Какова вероятность, что
"появился герб" и появилась «решка»?



Ответ: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Брошены монеты и игральная кость.
Найти вероятность совмещения событий
"появился герб", "появилось 6 очков".



Ответ: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$.



Известно, что в 3^x случаях из 250 на свет появляются близнецы. Причем лишь в одном из 3^x – это истинные близнецы (монозиготные).

Какова априорная вероятность того, что у определенной беременной женщины родятся близнецы мальчик и девочка, т.е. дизиготные?



Решение:

$$\frac{3}{250} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{250}.$$



**“Медицина – это наука
неопределенности и
искусство вероятности”.**

Сэр Вильям Ослер

Человеческий организм – это вероятностная система.

Нет детерминированных показателей: что хорошо для одного, то для другого – смерть.



Ему хорошо

Воздействие



Смерть

“Диагноз является вопросом вероятности, и это слишком хорошо знают те врачи, кто проследил судьбу своих пациентов вплоть до морга”.

Пиккеринг – выдающийся английский врач

Как можно использовать вероятность для постановки диагноза?

Понятие о доказательной медицине

Доказательная медицина (англ. **Evidence-based medicine**) – это медицина, основанная на доказательствах. Термин предложен группой канадских ученых в **1990** г.

Это подход к медицинской практике, при котором решения о применении профилактических, диагностических и лечебных мероприятий принимаются исходя из имеющихся **доказательств их эффективности и безопасности.**

Такие доказательства подвергаются поиску, сравнению, обобщению и широкому распространению для использования в интересах больных.

Случайные величины

Случайная величина - это величина, которая в результате испытания примет одно и только одно возможное значение заранее неизвестное

Дискретные

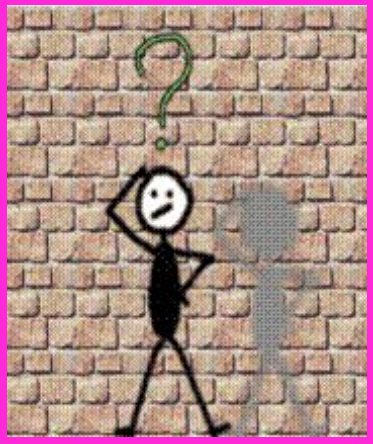
Счет



Непрерывные

Измерения



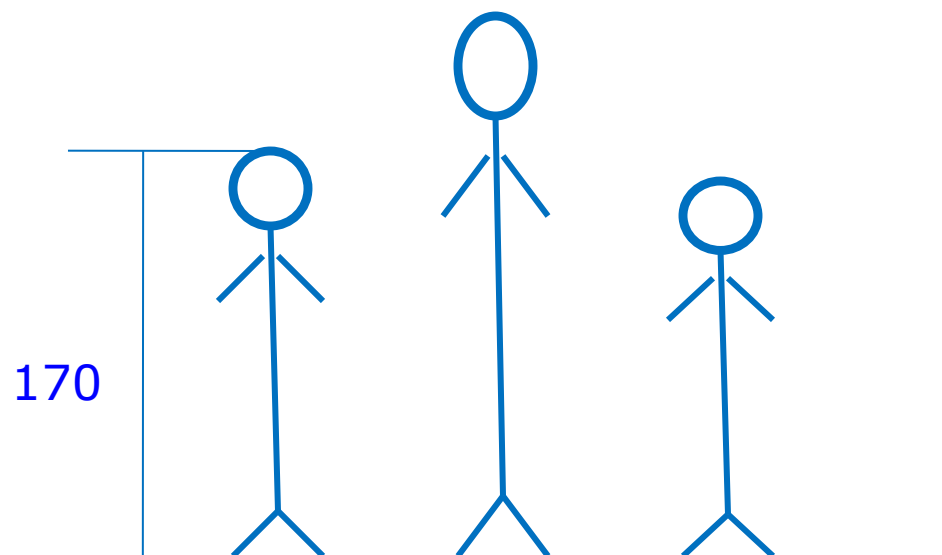


Что в этом тесте дискретного, а что непрерывного?

Иванов – 170 см

Петров – 182 см

Сидоров – 167 см



**Распределение дискретных и непрерывных случайных величин
и их характеристики:
математическое ожидание,
дисперсия, среднее
квадратическое отклонение**

Распределение = закон распределения – это **совокупность** значений случайной величины и вероятностей их появления.

Способы задания

Х
Р

Табличный

X_i	X_1	X_2	$\dots$	X_n
P_i	P_1	P_2	$\dots$	P_n

①

Функция распределения

Требование:

$$\sum_{i=1}^n P_i = 1.$$

②

**Плотность
распределения
вероятностей**

Для дискретных
случайных величин.

Аналитический Графический

Функция распределения

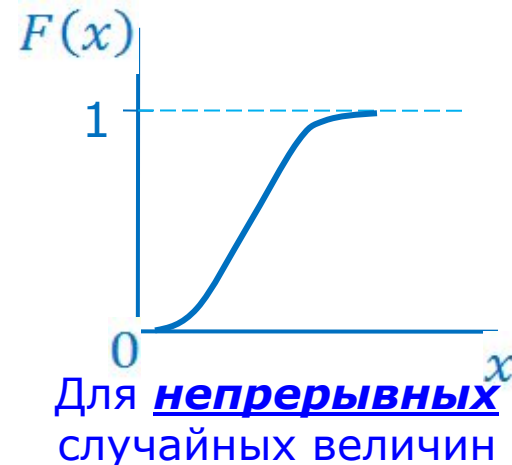
$$F(x) = P(X < x)$$

Для дискретной и непрерывной случайных величин.

Функция распределения = интегральная
функция распределения – это вероятность того, что случайная величина **X** примет значение меньше некоторого наперед заданного числа x - малое

Свойства:

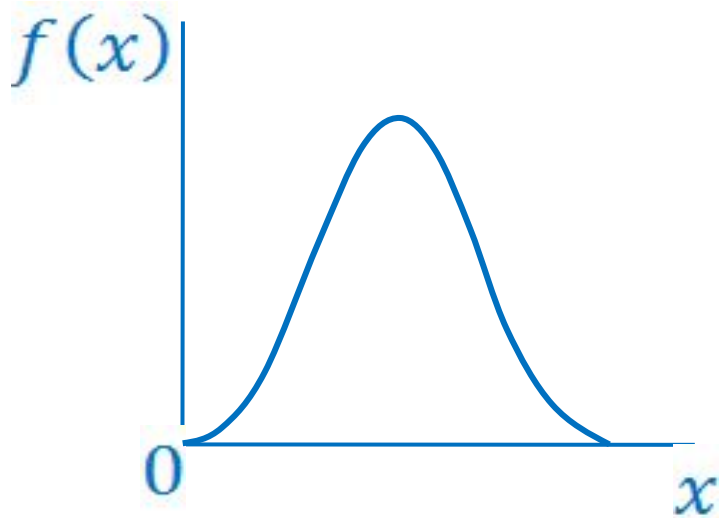
- ① $0 \leq F(x) \leq 1$
- ② неубывающая



Плотность распределения вероятностей
= дифференциальная функция
распределения.

$$f(x) = F'(x)$$

Только для
непрерывной
случайной величины.



Свойства:

1
2

$$f(x) \geq 0$$

$$\text{площадь} = 1$$

$$P(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

Характеристики случайных величин

① Математическое ожидание

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i.$$

Для дискретных
случайных величин

Математическое ожидание – это сумма произведений случайных величин на вероятность их появления.

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx.$$

Для непрерывных
случайных величин

② Дисперсия – рассеяние вокруг математического ожидания

$$\left. \begin{aligned} D(X) &= M(x - M(x))^2, \\ D(X) &= \sum_{i=1}^n (x_i - M(x))^2 \cdot p_i, \\ D(X) &= M(x^2) - (M(x))^2. \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{отклонение} \\ \text{Для } \underline{\text{дискретных}} \\ \text{случайных величин} \end{array}$$

Дисперсия – это математическое ожидание квадрата *отклонения* случайной величины от ее математического ожидания.

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(x))^2 \cdot f(x) dx. \quad \begin{array}{l} \text{Для } \underline{\text{непрерывных}} \\ \text{случайных величин} \end{array}$$

③

Среднее квадратичное отклонение

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \quad \text{Стандарт}$$

Среднее квадратичное отклонение – это корень квадратный из дисперсии.

Стандартное отклонение $\pm\sigma$ -

Пример.

X	1	2	5
P	0,3	0,5	0,2

$$\sum P_i = 0,3 + 0,5 + 0,2 = 1.$$

$$M(X) = 1 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,5 + 5 \cdot 0,2 = 2,3, \text{ - постоянное число}$$

$$D(x) = (1 - 2,3)^2 \cdot 0,3 + (2 - 2,3)^2 \cdot 0,5 + \\ + (5 - 2,3)^2 \cdot 0,2 = 2,01,$$

$$\sigma(X) = \sqrt{2,01} = 1,4.$$

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i.$$

$$D(X) = M(x - M(x))^2,$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Нормальный закон распределения (НЗР) = закон Гаусса



Карл Фридрих Гаусс
1777-1855 гг.

**Звездный час Гаусса
в 8 лет!**

НЗР – это распределение вероятностей **непрерывной!** случайной величины, которое описывается дифференциальной функцией

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

или

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

1

2

.

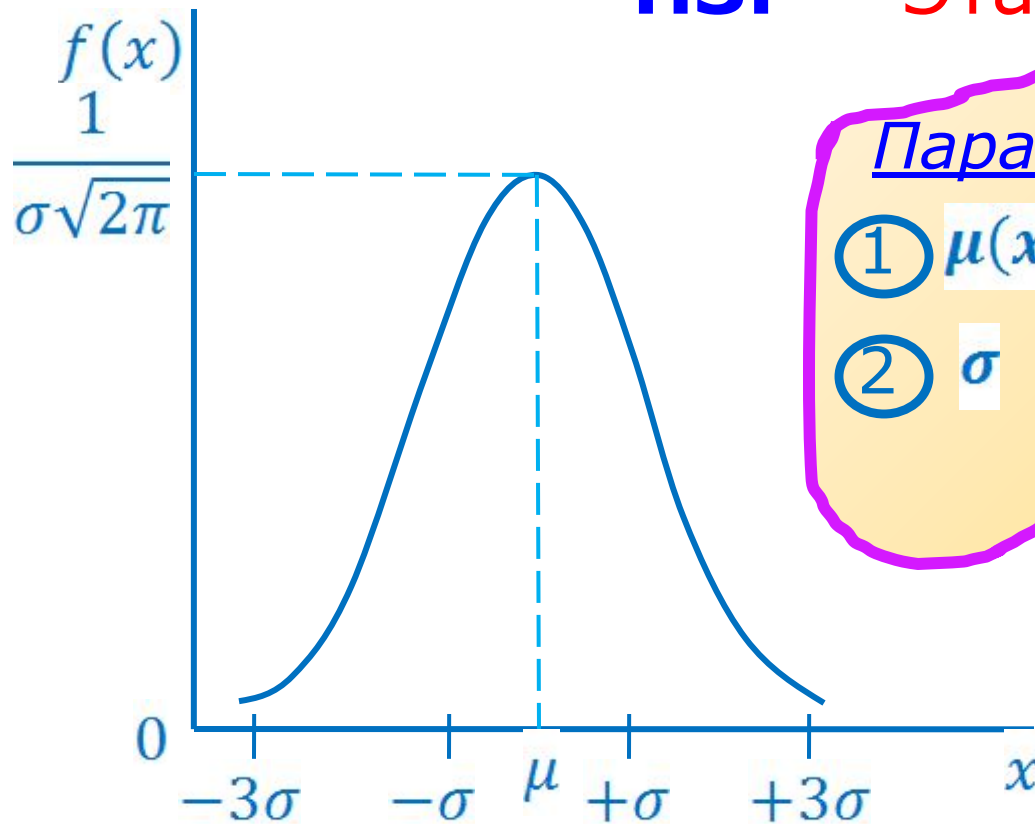
.

99

100

1,2,3,..,18,..,99,100

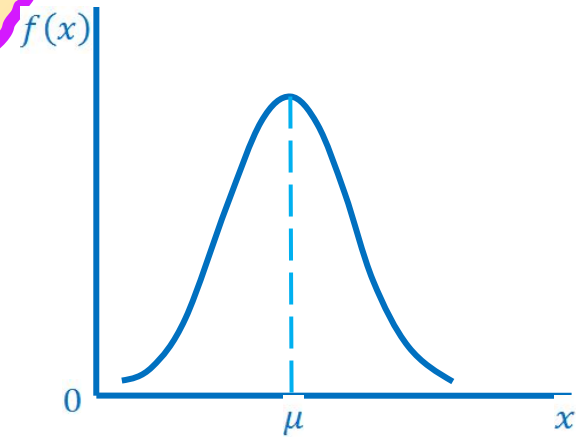
НЗР – Эталон, образец



Параметры НЗР

① $\mu(x)$

② σ



**Правило «трех
сигм»:**

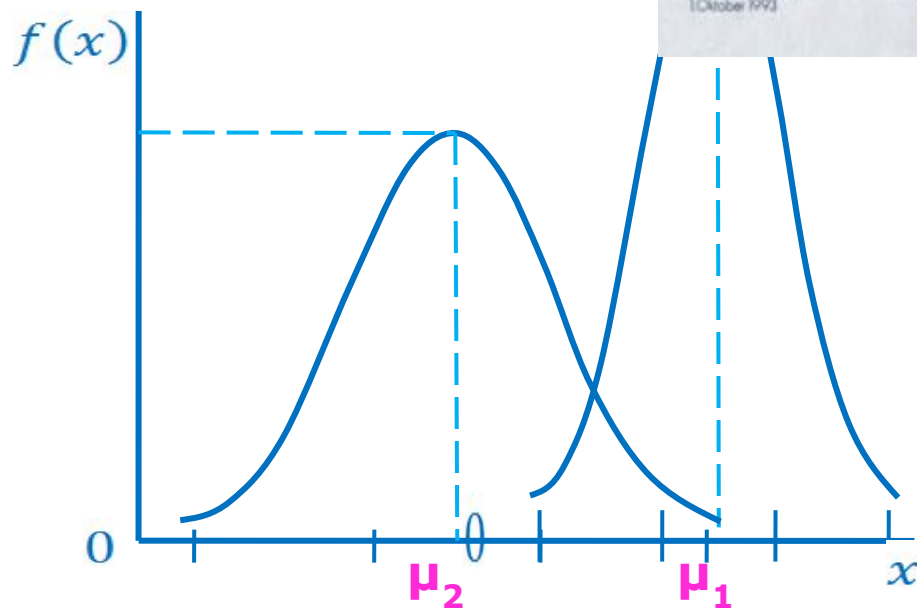
$\pm\sigma$ – 68% наблюдений

$\pm 2\sigma$ – 95%

$\pm 3\sigma$ – 99,7%

Влияние параметров НЗР на форму кривой

$$\mu_1 > \mu_2 \quad \sigma_1 < \sigma_2$$



Экспоненциальный закон распределения

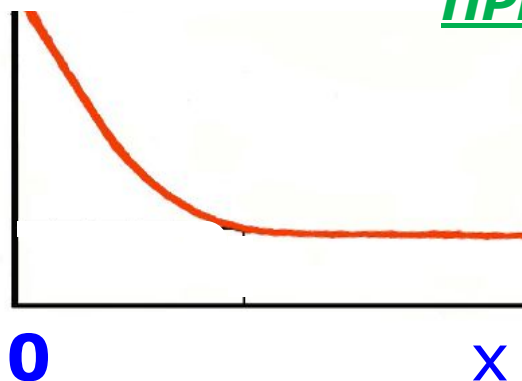
Экспоненциальное (показательное) распределение – это распределение вероятностей, которое описывается дифференциальной функцией

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x \geq 0 \end{cases}$$

Особенность:

Экспоненциальное распределение определяется одним параметром λ

$f(x)^1$



ПРИМЕРЫ:

Время между появлениями двух последовательных событий.

- заказ такси
- вызов скорой помощи

