



# *Теория матричных игр*

# Основные понятия теории матричных игр


**Теория игр** – математическая теория конфликтных ситуаций, целью которой является выработка рекомендаций по разумному поведению участников конфликта.

**Конфликтная ситуация** – это столкновение интересов двух или более сторон.

**Игра** – это математическая модель конфликтных ситуаций, а также система предварительно оговоренных правил и условий.

**Партией** называется частичная реализация правил и условий игры. Результатом игры всегда является число  $v$ , которое называется выигрышем, проигрышем или ничьей.

- если  $v > 0$  – выигрыш
- если  $v < 0$  – проигрыш
- если  $v = 0$  – ничья



Партии состоят из ходов. **Ходом** называется выбор игроком одного из предусмотренных правилами игры действий и его осуществление.

***Ходы бывают:***

***личными*** – когда игрок сознательно выбирает и осуществляет тот или другой вариант действия (пример — любой ход в шахматах);

***случайными*** – когда выбор осуществляется не волей игрока, а каким-то механизмом случайного выбора (бросание монеты, игральной кости).

***Игры бывают:***

***парные*** – игра между двумя игроками;

***множественные*** – в них участники могут образовывать коалиции (постоянные или временные);

***кооперативные*** – играют более двух человек, которые образуют кооперации до конца игры;

***коалиционные*** – объединение, но не до конца игры;

***не коалиционные*** – с начала и до конца каждый играет сам за себя.

**Стратегией** игрока называется совокупность правил, определяющих выбор варианта действий при каждом личном ходе в зависимости от сложившейся ситуации. В зависимости от стратегий игры делятся на **конечные** и **бесконечные**.

Игра называется **конечной**, если у каждого игрока имеется в распоряжении только конечное число стратегий (в противном случае игра называется **бесконечной**).

**Игра с нулевой суммой** – это игра, в которой сумма выигрышей игроков равна нулю (т.е. каждый игрок выигрывает только за счет других). Самый простой случай – парная игра с нулевой суммой – **антагонистическая игра**, здесь два игрока четко играют друг против друга.

Игры бывают с **полной информацией**, в этом случае игроки четко знают все правила игры и четко знают все шаги противника, и с **неполной информацией**.

Результат игры записывается в **платежную матрицу**.

### Игра «орел - решка»

	$B_1$ "орел"	$B_2$ "решка"
$A_1$ "орел"	1	-1
$A_2$ "решка"	-1	1

**Нижней чистой ценой игры** называется  $\alpha = \max_i \min_j a_{ij}$

**Верхней чистой ценой игры** называется  $\beta = \min_j \max_i a_{ij}$

Игра, для которой  $\alpha = \beta$ , называется **игрой с седловой точкой**,

где  $\alpha = \beta = v$  называется **ценой игры**.

Элемент, стоящий на пересечении  $\alpha$  и  $\beta$ , называется **седловым элементом** матрицы.

**Задача теории игр** – поиск оптимальных стратегий (решений).

**Решением игры** называется пара оптимальных стратегий для игроков  $A$  и  $B$ , значение цены игры.

Наличие седловой точки означает наличие равновесия в игре.

# Чистые и смешанные стратегии

**Чистой стратегией** называют ход, выбранный с вероятностью 1.

**Смешанной стратегией** игрока  $A$  называется вектор

$$\vec{p} = (p_1, \dots, p_m) \quad p_i \geq 0 \quad (i = \overline{1, m}), \quad \sum_{i=1}^m p_i = 1$$

**Смешанной стратегией** игрока  $B$  называется вектор

$$\vec{q} = (q_1, \dots, q_n) \quad q_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}), \quad \sum_{j=1}^n q_j = 1$$

$$f(\vec{p}, \vec{q}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} p_i q_j - \text{платежная функция.}$$

$\vec{P}_i (0, 0, 0, \dots, 1, 0, \dots)$  – **чистая стратегия**

Пара стратегий  $\vec{p}^*, \vec{q}^*$  называется **оптимальной**, если

$$f(\vec{p}, \vec{q}^*) \leq f(\vec{p}^*, \vec{q}^*) \leq f(\vec{p}^*, \vec{q}).$$

### Теорема 1 $\alpha \leq \beta$

Средний выигрыш или проигрыш лежит между  $\alpha$  и  $\beta$ .

Теорема 2 (основная теорема теории игр). В терминах смешанных стратегий любая конечная игра имеет решение.

Теорема 3 Для того, чтобы смешанные стратегии

$\vec{p}^* = (p_1, \dots, p_m)$   $\vec{q}^* = (q_1, \dots, q_n)$  были оптимальными в матричной игре

$(a_{ij})_{m \times n}$ , необходимо и достаточно :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^m a_{ij} p_i \geq v \quad (j=\overline{1, n}), \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} q_j \leq v \quad (i=\overline{1, m}). \end{array} \right.$$



$$\begin{matrix}
 & q_1 & q_2 & \boxtimes & q_n \\
 p_1 & \left( \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \boxtimes & a_{1n} \\
 p_2 & \begin{matrix} a_{21} & a_{22} & \boxtimes & a_{2n} \\
 \boxtimes & \begin{matrix} \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\
 p_m & \begin{matrix} a_{m1} & a_{m2} & \boxtimes & a_{mn} \end{matrix} \end{matrix} \right)
 \end{matrix}$$

$p_i$  – вероятность применения игроком  $i$  – ой стратегии

$$\left\{ \begin{array}{l}
 a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \boxtimes + a_{m1}p_m \geq v \\
 \boxtimes \quad \boxtimes \quad \boxtimes \quad \boxtimes \quad \boxtimes \quad \boxtimes \quad \boxtimes \quad \boxtimes \quad \boxtimes \quad \boxtimes \quad \boxtimes \quad \boxtimes \\
 a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \boxtimes + a_{1n}q_n \leq v
 \end{array} \right.$$

**Активной стратегией** называется стратегия, входящая в оптимальную смешанную стратегию с ненулевой вероятностью.

**Теорема 4** Если один из игроков придерживается своей оптимальной смешанной стратегии, то его выигрыш остается неизменным и равен цене игры, не зависимо от того, какую стратегию принимает второй игрок, если только тот не выходит за пределы своих активных стратегий.

Пример:

$$\begin{array}{cccc}
 \left( \begin{array}{cccc}
 4 & -3 & 5 & -6 \\
 2 & 7 & -9 & -10 \\
 2 & -5 & 3 & -7 \\
 -10 & 12 & -15 & 25
 \end{array} \right) & \begin{array}{l} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} & \text{невыгодна} \\
 \begin{array}{cccc}
 B_1 & B_2 & B_3 & B_4
 \end{array}
 \end{array}$$

**Стратегия**  $A_k$  игрока  $A$  называется **доминирующей** над стратегией  $A_l$ , если  $a_{k,j} > a_{l,j}$  ( $j = \overline{1, n}$ ), а **стратегия**  $A_l$  - **доминируемой**.

$B_k$  - доминирующая над  $B_l$ , если  $b_{i,k} \leq b_{i,l}$  ( $i = \overline{1, n}$ )

Доминируемые стратегии можно убирать из матрицы игры, от этого решение не изменится.

$$(a_{i,j})_{m \times n} \quad (1)$$

$$(ba_{i,j} + c)_{m \times n} \quad (2)$$

$$b, c \geq 0$$

**Теорема 5** Оптимальные смешанные стратегии  $p^*$  и  $q^*$  в матричной игре (1) с ценой игры  $v$  будут оптимальными и в матричной игре (2) с ценой  $v = bv + c$ .

## Решение матричной игры 2×2

$$\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \end{array} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{array}{l} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = v \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = v \\ p_2 = 1 - p_1 \end{array}$$

$q_1 \quad q_2$

$$a_{11}p_1 + a_{21}(1 - p_1) = v$$

$$a_{12}p_1 + a_{22}(1 - p_1) = v$$

$$p_1(a_{11} - a_{21}) + a_{21} = v$$

$$p_1(a_{12} - a_{22}) + a_{22} = v$$

$$p_1(a_{11} - a_{21}) + a_{21} = p_1(a_{12} - a_{22}) + a_{22}$$

$$p_1(a_{11} - a_{21}) + a_{21} = v$$

$$p_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} - a_{21} - a_{12} + a_{22}} \quad \text{— аналитический метод решения}$$

$$\text{Для } q_j: a_{11}q_1 + a_{12}(1 - q_1) = v$$