Фильтры, АЧХ которых равна единице на всех частотах, называются:

a) Фазовыми
b) Всепропускающими
c) Рекурсивными
d) Нерекурсивными
e) Адаптивными

Преобразования

Оконное преобразование Фурье.

Области применения и ограничения оконного преобразования Фурье.

Вейвлет-преобразования:

Масштабирующие функции. Ортогональное, непрерывное и дискретное вейвлет-преобразование.

Преобразования

- Пусть *f(t)* – сигнал непрерывного времени. Тогда его преобразование в общем виде можно представить:

$$f(t) \to \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\overline{g(u)}du = F(v),$$

где *g(u)* – анализирующая функция, а т.к. в общем случае она может быть комплекснозначной, то черта над ней – обозначение комплексного сопряжения.

Функция *F(v)* – преобразование сигнала *f(t)* (или преобразованный сигнал).

Преобразование Фурье

В случае если параметром анализирующей функции является циклическая частота сигнала ω, а анализирующая функция имеет вид *exp(-iωt)*, преобразование является преобразованием Фурье, и преобразованный сигнал зависит от ω:

$$F(\omega) = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} f(t)e^{-i\omega t}dt$$

Преобразование Лапласа

Преобразование Лапласа позволяет расширить приложение Фурье-преобразования, в частности, в область анализа и синтеза систем обработки данных, в том числе с использованием вейвлетов.

Любая функция представима в виде интеграла Фурье, если только она абсолютно интегрируема.

Абсолютно интегрируемая функция должна быть затухающей, т. е. $f(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Однако, для целого ряда важных в теории анализа и, особенно, теории систем, функций это условие не выполняется, в частности, для функций типа единичного скачка или незатухающих гармонических колебаний. Чтобы сделать в этих случаях преобразование Фурье возможным, умножают незатухающую функцию на экспоненту $\exp(-\sigma t)$, выбрав $\sigma > 0$ таким, чтобы уже функция $f_o(t) = f(t)\exp(-\sigma t) \to 0$ при $t \to \infty$. Тогда условие абсолютной сходимости выполняется для функции $f(t)\exp(-\sigma t)$:

при некоторых постоянных

$\sigma_{min} < \sigma < \sigma_{max}$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| f(t) e^{-\sigma t} \right| dt < \infty$$

В этом случае для функции *f(t)*, "взвешенной" экспонентой $e^{-\sigma t}$, справедливы прямое и обратное преобразования Фурье.

Если ввести новые обозначения, $s = \sigma + j\omega$, то после некоторых математических преобразований получим

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt$$

и $$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\omega}^{\sigma + j\omega} F(s) \cdot e^{st} ds$$

Т.е. прямое и обратное преобразование Лапласа.

Преобразование Лапласа – это Фурье-преобразование функции $f(t)e^{-\sigma t}$, где экспоненциальный вес функций $e^{-\sigma t}$ "улучшает“ функцию *f(t)* таким образом, чтобы преобразование Фурье стало возможным. При этом интеграл *F(s)* может сходиться не при всех значениях *s* .

Свойства преобразования Лапласа аналогичны свойствам преобразования Фурье.

Преобразование Лапласа позволяет значительно облегчить решение линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, которые описывают класс линейных систем.

Лапласов образ выхода линейной системы связан с Лапласовым образом входа F(s) соотношением:

$$Y(s) = H(s)F(s)$$

где

$$H(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{N} a_k \cdot s^k}$$

носит название передаточной функции системы.

Передаточная функция характеризует конструктивные особенности системы и поэтому, как правило, известна уже на этапе проектирования.

Z -преобразование – обобщение дискретного во времени преобразования Фурье.

Оно эффективно применяется для решения разностных уравнений и исследования дискретных систем, в частности, цифровых фильтров.

Ряд

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]e^{-j\omega n}$$

сходится только тогда, когда последовательность *f[n]* абсолютно суммируемая. Однако часто это не так, поэтому, чтобы расширить класс дискретных функций, представимых рядами, *f[n]* умножают на степенную функцию $r^{-n}\ (z > 0)$ такую, что

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]r^{-n} < \infty$$

где *r* – модуль некоторой новой комплексной переменной

$$z = r \cdot e^{-j\cdot\arg(z)}$$

Z-преобразование может быть представлено в виде:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] \cdot z^{-n}$$

Свойства z -преобразования аналогичны свойствам преобразования Фурье.

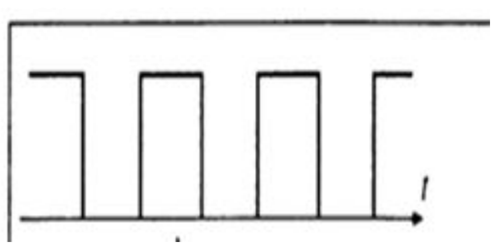
Применение z -преобразований значительно облегчает решение линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами, которыми описывается целый класс дискретных систем. Оно позволяет ввести понятие передаточной функции дискретной системы, анализ которой дает возможность судить о ее свойствах, вводить корректирующие элементы для изменения характеристик системы.

Преобразование Фурье обладает рядом замечательных свойств, например:

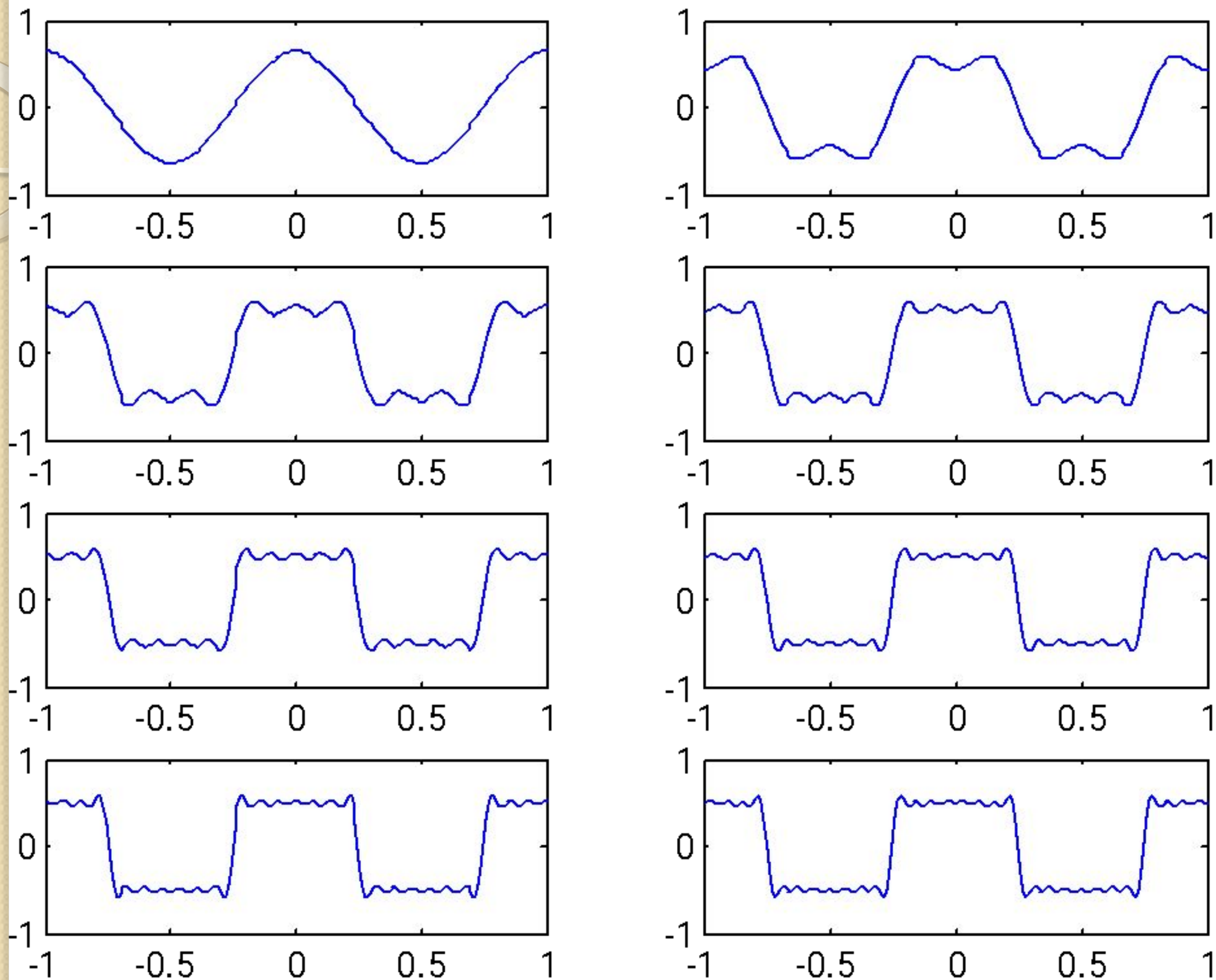
- Областью определения преобразования является пространство $L^2(R)$ интегрируемых с квадратом функций (в частности, гармонических), а многие физические процессы в природе можно считать функциями, принадлежащими этому пространству.
- Для применения преобразования разработаны эффективные вычислительные процедуры типа быстрого преобразования Фурье (БПФ). Эти процедуры входят в состав всех пакетов прикладных математических программ и реализованы аппаратно в процессорах обработки сигналов.

Основные недостатки преобразования Фурье:

- Ограниченная информативность анализа нестационарных сигналов и практически полное отсутствие возможностей анализа их особенностей (сингулярностей), т.к. в частотной области происходит «размазывание» особенностей сигналов (разрывов, ступенек, пиков и т.п.) по всему частотному диапазону спектра.
- Гармонические базисные функции разложения не способны отображать перепады сигналов с бесконечной крутизной типа прямоугольных импульсов, т.к. для этого требуется бесконечно большое число членов ряда.



Пример: Последовательность прямоугольных импульсов



- При ограничении же числа членов ряда Фурье в окрестностях скачков и разрывов при восстановлении сигнала возникают осцилляции (явление Гиббса).
- Преобразование Фурье отображает глобальные сведения о частотах исследуемого сигнала и не дает представления о локальных свойствах сигнала при быстрых временных изменениях его спектрального состава.

Преобразование Фурье не имеет возможности анализировать частотные характеристики сигнала в произвольные моменты времени.

В практике обработки информации чаще всего приходится иметь дело с *нестационарными процессами*, в которых информативным является сам факт *изменения* ***частотно-временных*** *характеристик сигнала*.

Например, спутниковые изображения Земли, рентгенограммы внутренних органов, речь, музыка, турбулентные поля различной природы и пр.

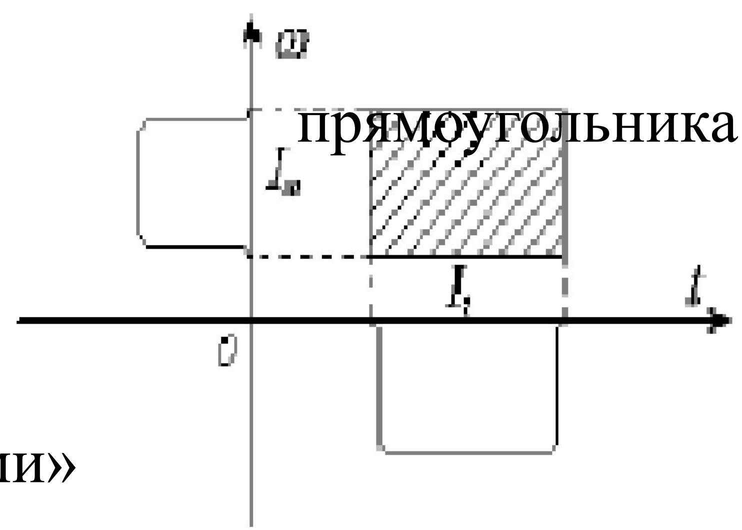
Для выполнения такого анализа требуются базисные функции, обладающие способностью выявлять в анализируемом сигнале как его частотные, так и временные характеристики, т.е. обладающие свойствами частотно - временной локализации.

Плоскость частота-время

Для анализа и сравнения частотно-временных локализационных свойств различных базисов используют плоскость «частота-время». Любая функция *ϕ(t)* может характеризоваться интервалом ***I****t* на временной оси и интервалом ***I****ω* в Фурье области, в которых содержится 90% ее энергии, сосредоточенной около центра тяжести функции. Тогда в этой

плоскости функцию *ϕ(t)*

можно изобразить в виде прямоугольника.



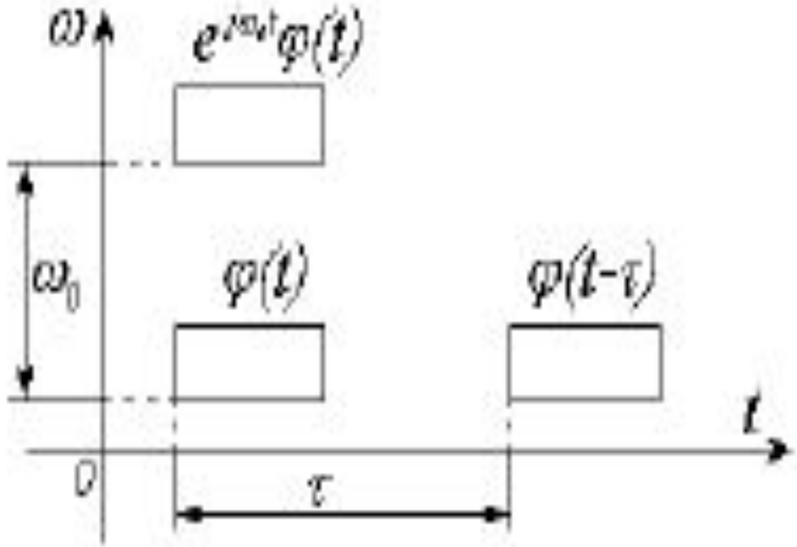
Локализованные по времени и

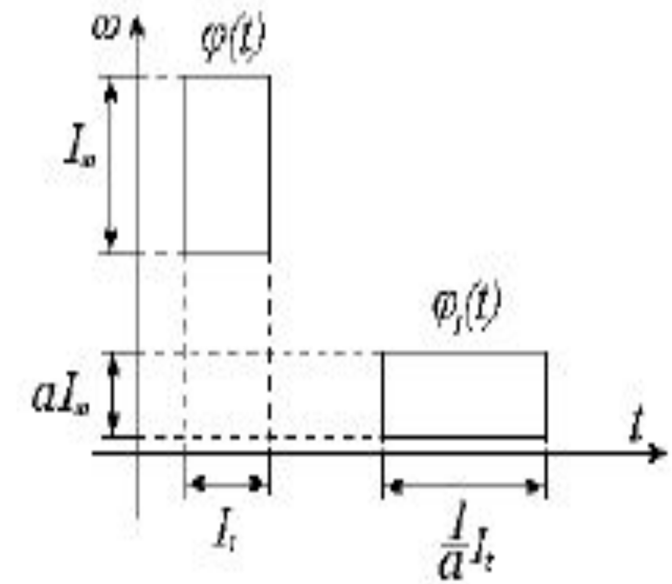
частоте функции называют

«частотно-временными атомами»

Смещение функции на τ от исходного состояния вызовет перемещение прямоугольника параллельно оси t . Модуляция этой функции комплексной экспонентой $j\omega_0 t$ сдвигает прямоугольник параллельно оси ω.

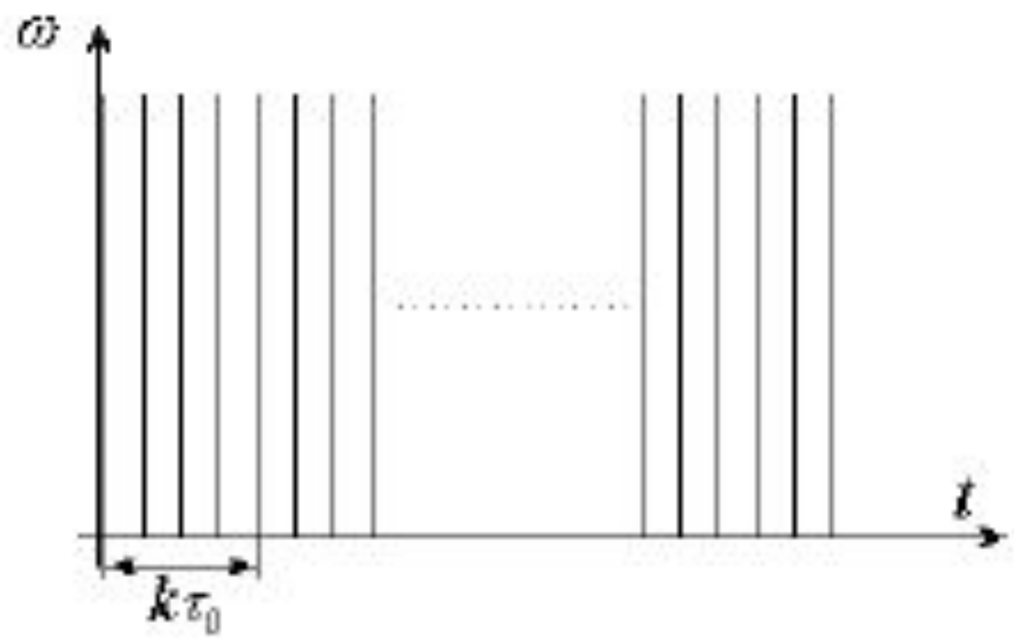
Масштабирование функции (ее сжатие или растяжение) приводит к развороту прямоугольника.



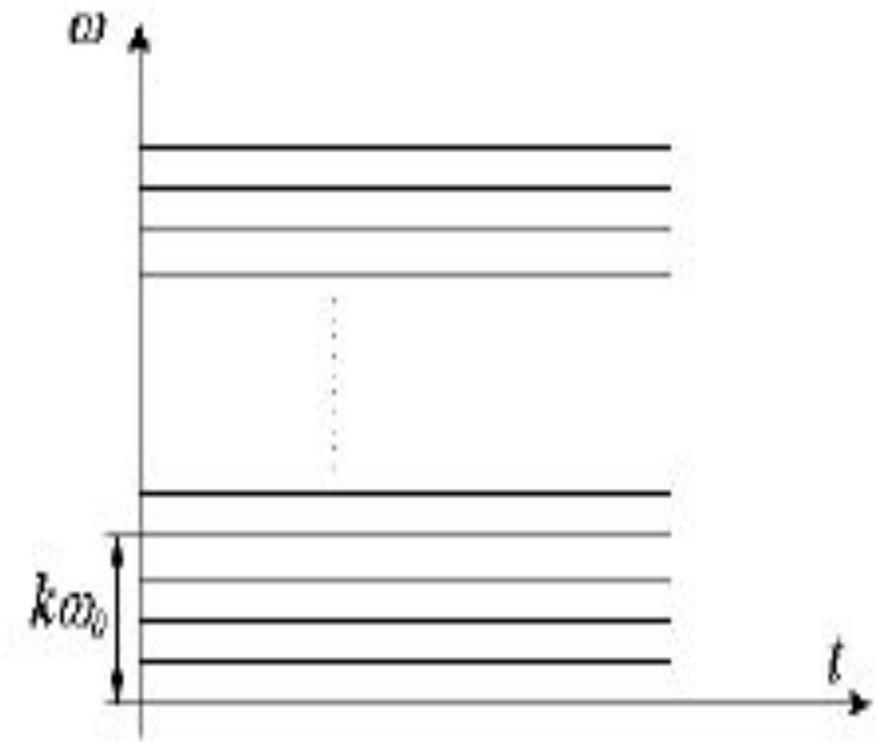


Рассмотрим δ -функцию Дирака и Фурье-базис.

δ -Функция является идеальным базисом для временного анализа сигналов. Результатом такого анализа являются отсчеты, которые можно рассматривать как временной спектр сигнала. На плоскости время-частота δ -функция $\delta(t - k\tau_0)$ выглядит как показано на рисунке:



Базисные функции *exp(jωt)* Фурье-анализа, наоборот, обладают хорошей частотной локализацией, в то время как во временной области они имеют бесконечную протяженность:



Ограниченное во времени Фурье-преобразование

Локальность преобразования Фурье достигается путем ограничения анализируемого сигнала с помощью движущегося окна. Результатом такого анализа будет функция двух переменных – положения окна τ и частоты ω :

- $$F(\omega,\tau) = \int f(t)\, w(t-\tau)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

Спектральный анализ в окне данных производится вычислением скалярного произведения сигнала и базисной функции

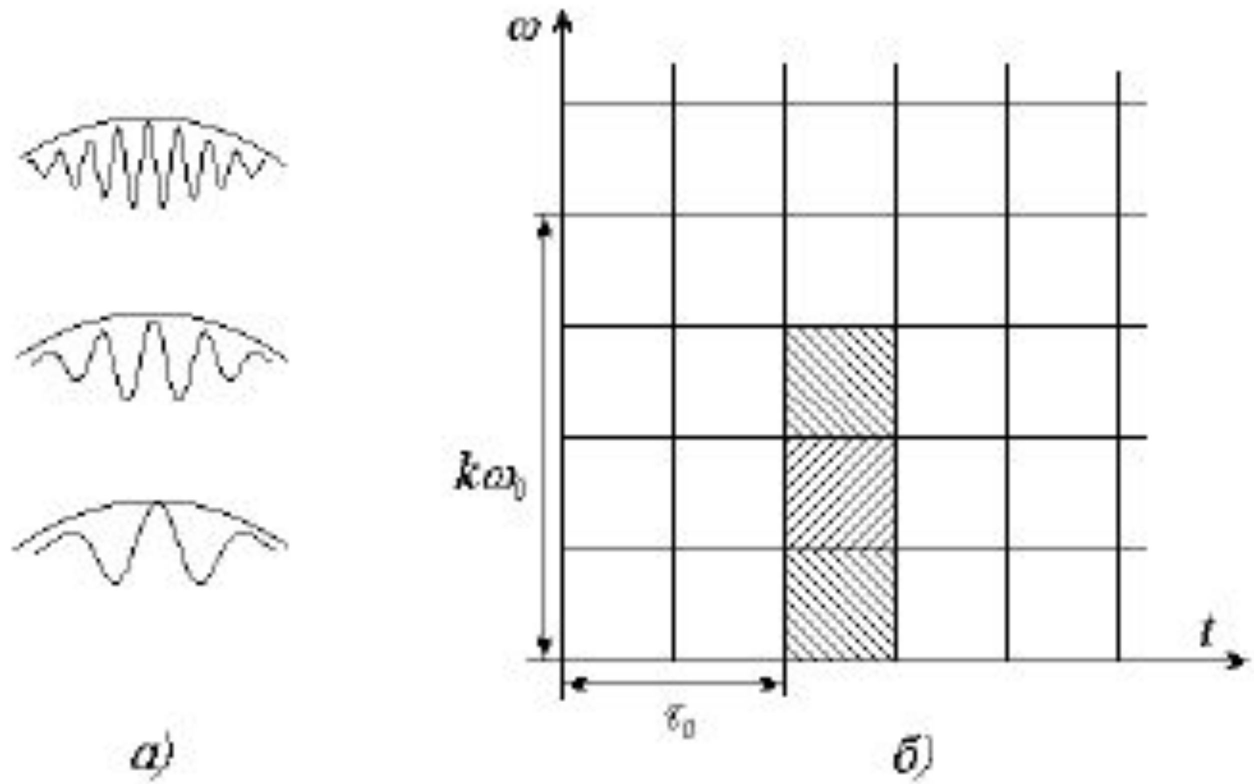
$$g_\tau(\omega, t) = w(t-\tau)e^{j\omega t},$$

т.е.

$$F(\omega, \tau) = \langle g_\tau(\omega, t), f(t) \rangle$$

Таким образом в спектральный анализ, кроме частоты, вводится еще один параметр – время.

Ограниченное во времени преобразование Фурье на плоскости время-частота



При сдвиге окна или изменении частоты модуляции ширина прямоугольника сохраняется неизменной. Это вызвано тем обстоятельством, что при всех этих операциях ширина самого окна не изменяется

$g_{\tau}(\omega, t) = e^{jk\omega_0 t} w(t - \tau_0)$ *при сдвиге* τ_0
и $k = 1,2,3$ *(вещественная часть)*;

Оконное преобразование Фурье

Частичным решением проблемы частотно-временного разрешения является *оконное преобразование Фурье* с движущейся по сигналу оконной функцией, имеющей компактный носитель.

Временной интервал сигнала разделяется на подинтервалы и преобразование выполняется последовательно для каждого подинтервала в отдельности. Тем самым осуществляется переход к частотно-временному (частотно-координатному) представлению сигналов, при этом в пределах каждого подинтервала сигнал считается стационарным.

- Оконное преобразование выполняется в соответствии с выражением:

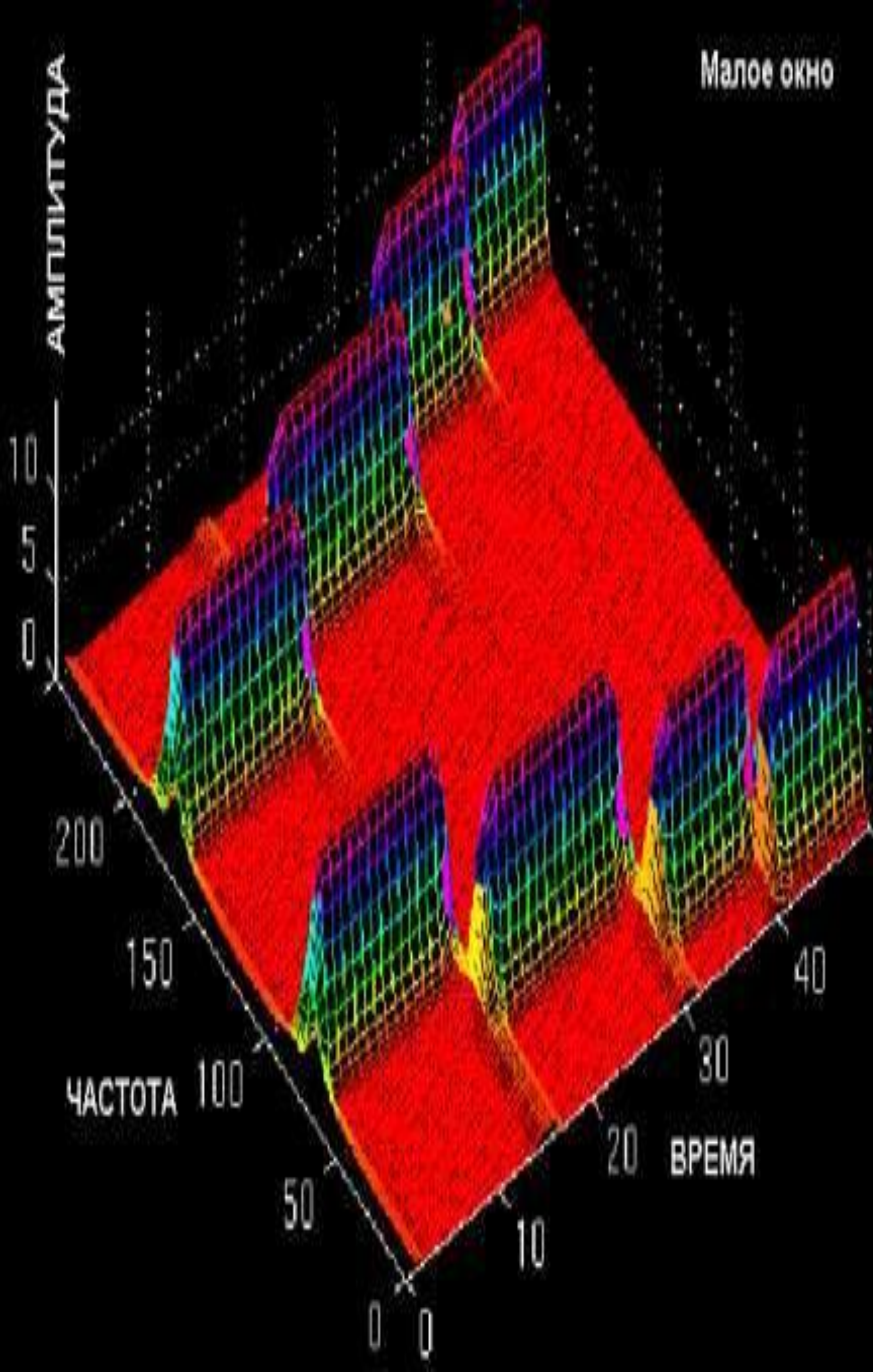
$$F(\omega,\tau) = \int f(t)\, w(t-\tau)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

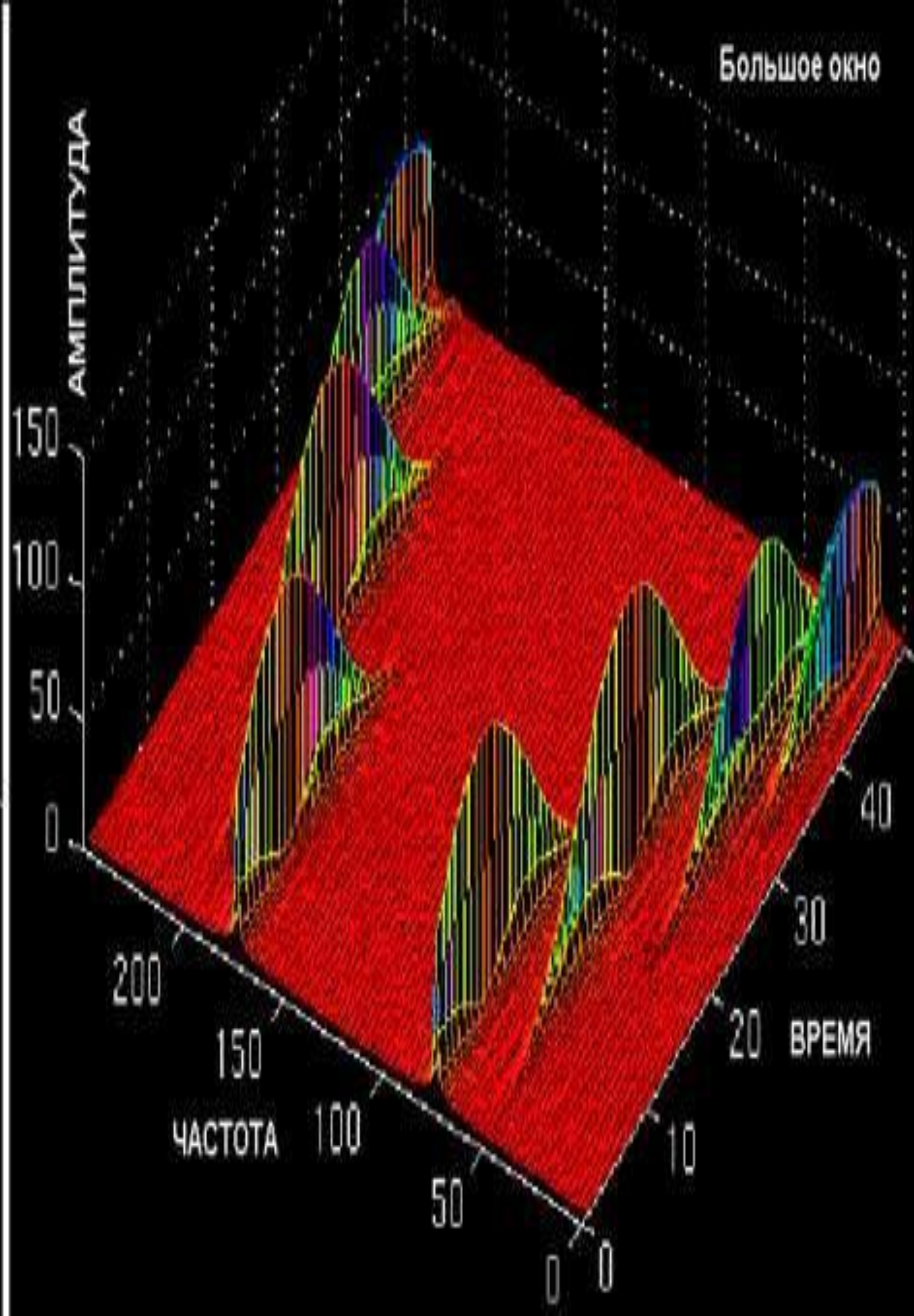
Функция $w(t\text{-}\tau)$ представляет собой функцию окна сдвига преобразования по координате t, где параметром τ задаются фиксированные значения сдвига.

При сдвиге окон с равномерным шагом значения τ принимаются равными $k\tau$.

Результатом оконного преобразования является *семейство спектров*, которым отображается изменение спектра сигнала по интервалам сдвига окна преобразования. Это позволяет выделять на координатной оси и анализировать особенности нестационарных сигналов.

Размер носителя оконной функции w(t) обычно устанавливается соизмеримым с интервалом стационарности сигнала.


Малое окно
АМПЛИТУДА
10
5
0
200
150
100
50
0
ЧАСТОТА
0
10
20
30
40
ВРЕМЯ


Большое окно
АМПЛИТУДА
150
100
50
0
200
150
100
50
0
ЧАСТОТА
0
10
20
30
40
ВРЕМЯ

В качестве окна преобразования может использоваться простейшее прямоугольное окно (при этом $w(t)=1$ в пределах окна и 0 за его границами), а также специальные весовые окна (Бартлетта, Гаусса, и пр.), обеспечивающие малые искажения спектра при вырезке оконных отрезков сигналов, т.е. нейтрализующие явление Гиббса.

Частотно-временное оконное преобразование Фурье

- Функция оконного преобразования может быть переведена в вариант с независимыми переменными и по времени, и по частоте:

$$\mathrm{F}(t,\omega) = \int_{\tau} f(t-\tau)w(\tau)\exp(-i\omega t)\,d\tau$$

Иначе говоря, спектральный анализ в окне данных производится вычислением скалярного произведения сигнала и базисной функции, таким образом в спектральный анализ, кроме частоты, вводится еще один параметр – время.

- Координатная разрешающая способность оконного преобразования определяется шириной оконной функции и, в силу принципа неопределенности Гейзенберга $(\Delta t \cdot \Delta\omega \geq \frac{1}{2})$,

обратно пропорциональна частотной разрешающей способности: $\Delta\omega \sim \frac{1}{\Delta t}$

Хорошая разрешающая способность по времени подразумевает небольшое окно времени, которому соответствует плохая частотная разрешающая способность и наоборот.

Оптимальным считается ОПФ с гауссовым окном, которое получило название *преобразование Габора* (Gabor).

Гаусово окно имеет вид:

- $$g_\alpha(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}} e^{-\frac{t^2}{4\alpha}}$$

α > 0 – некоторое фиксированное число.

Хотя эта функция имеет некомпактный носитель, она экспоненциально убывает на бесконечности. Ширину окна можно охарактеризовать стандартным отклонением $\sigma = \sqrt{\alpha}$, считая α дисперсией. Таким образом, ширина окна равна $2\sqrt{\alpha}$.

Формула:

$$F_G(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g_\alpha(t-\tau) e^{-i\omega t} dt$$

называется преобразованием Габора функции *f(t)*

- Итак, частотно-временной анализ предназначен для выявления локальных частотно-временных возмущений сигнала.

Вследствие кратковременности таких возмущений, сам сигнал может рассматриваться как заданный в пространстве интегрируемых с квадратом функций, т.е. для одномерных сигналов – на всей действительной оси $R(-\infty,\infty)$ с нормой $\|s(t)\|^2 < \infty$

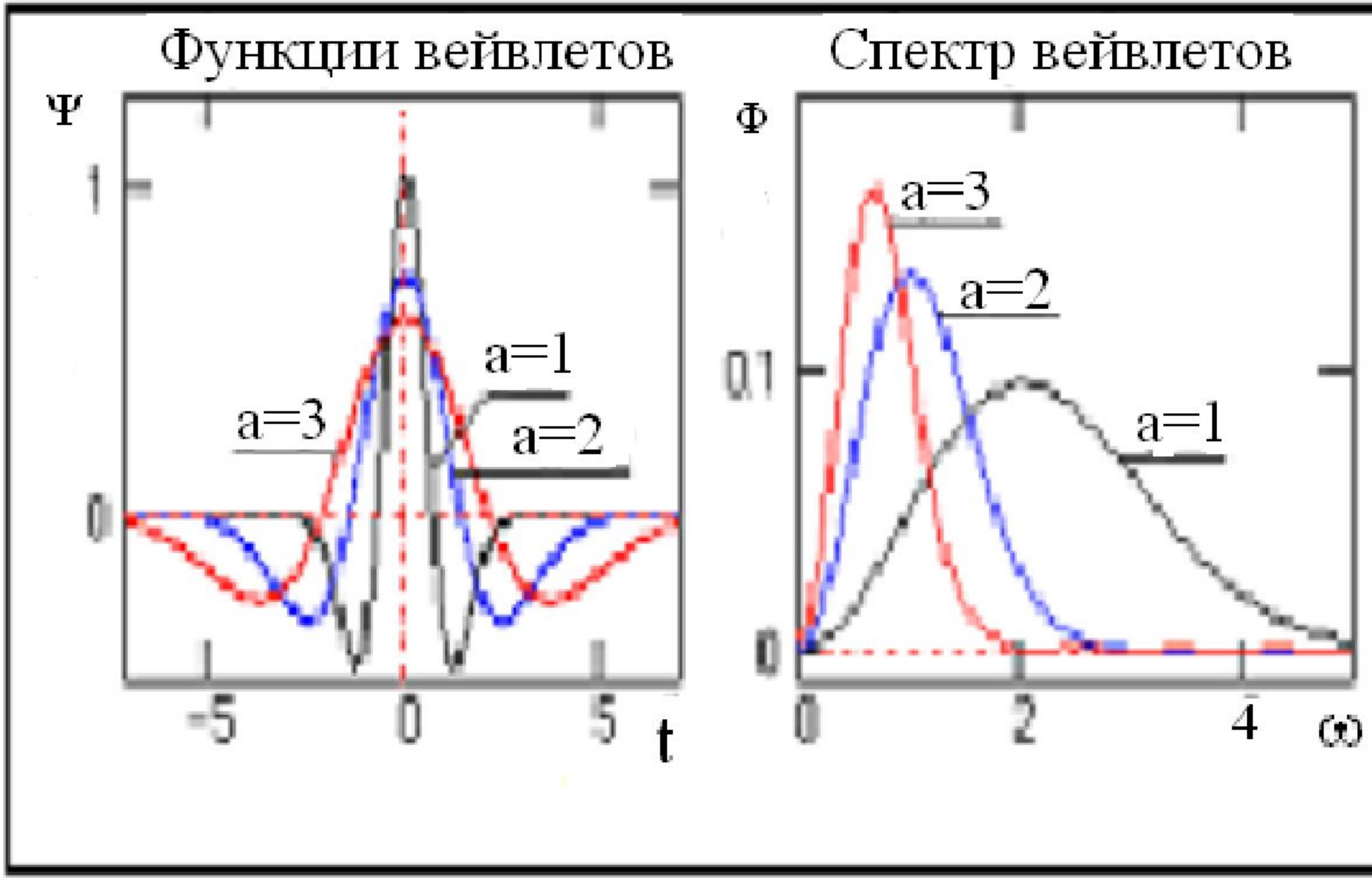
ОПФ не обладает свойством изменять свой масштаб при необходимости изучения более мелких деталей спектра, т.е. свойством масштабируемости

Вейвлетные преобразования

Вейвлет-преобразование обладает свойством масштабируемости.

В отличие от преобразования Фурье, при вейвлет-преобразовании не осуществляется поиск циклических частот, а определяются размеры деталей a в некоторое время t.

Вместо выражения «размеры деталей» обычно, правда, употребляется термин «коэффициенты масштабирования».



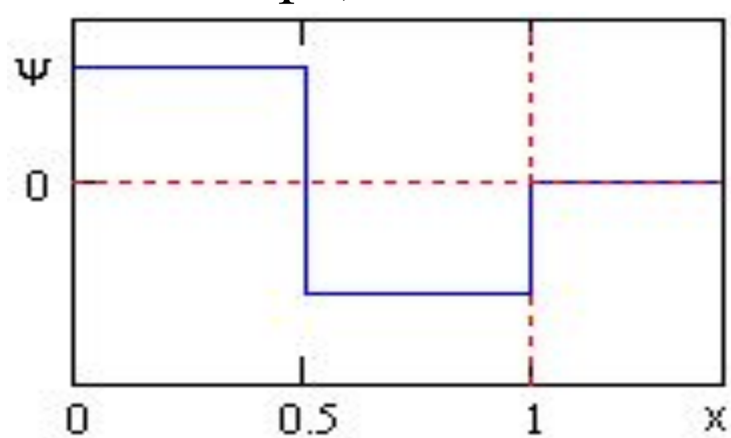
Функции вейвлетов
Спектр вейвлетов
Ψ
1
0
a=1
a=3
a=2
-5
0
5
t
Φ
0.1
0
a=3
a=2
a=1
0
2
4
ω

Термин "вейвлет" (wavelet) в переводе с английского означает "маленькая (короткая) волна".

Вейвлеты - это обобщенное название семейств математических функций определенной формы, которые локальны во времени и по частоте, и в которых все функции получаются из одной базовой (порождающей) посредством ее сдвигов и растяжений по оси времени.

Вейвлет-преобразования рассматривают анализируемые временные функции в терминах колебаний, локализованных по времени и частоте.

Пример такого всплеска – вейвлет Хаара, известный еще с начала прошлого века:



Базисные функции, которые получили название ***вейвлетов***, также должны принадлежать пространству интегрируемых с квадратом функций и быстро убывать при $t \to \infty$.

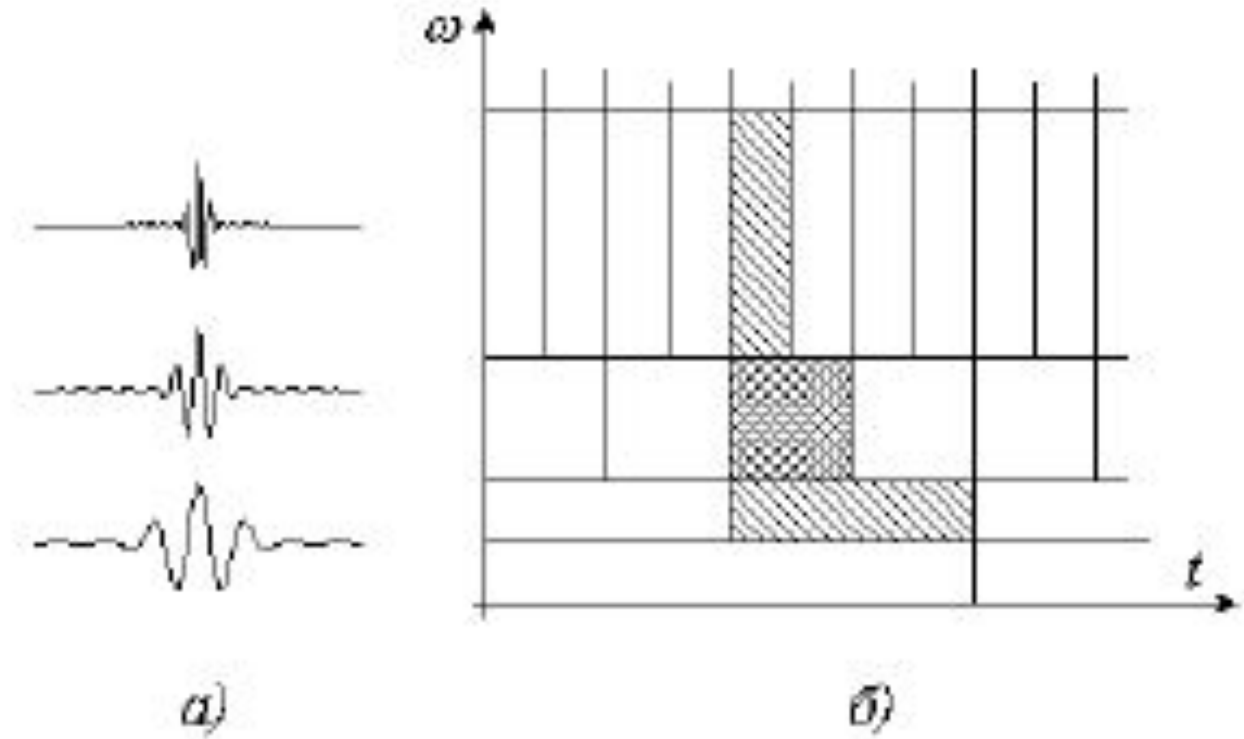
Тогда чтобы перекрыть такими базисными функциями все возможные временные положения сигнала, необходимо, чтобы они (базисные функции) представляли собой набор смещенных во времени функций.

- Удобнее всего, если этот набор образуется из одной и той же *"материнской" функции* $\psi(t)$ *(прототипа)*, сдвинутой по оси t, т.е. $\{\psi(t-b)\}$.

- Чтобы обеспечить частотный анализ, базисная функция должна иметь еще один аргумент – масштабный коэффициент, который является аналогом частоты в Фурье-анализе. Тогда базисные функции для частотно-временного анализа будут иметь вид:

$$\psi\left(\frac{t}{a}-\frac{b}{a}\right)=\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

$a, b \in R$.



Вейвлет-преобразование на плоскости «время-частота»
а) пример базисных вейвлет-функций при различных масштабах ($a - 2^k, k = 0, 1, 2$);
б) изображение функции на плоскости «время-частота»

Базисные функции для частотно-временного анализа должны обладать следующими свойствами:

- **Ограниченность**, т.е. принадлежность к пространству интегрируемых с квадратом функций;
- **Локализация**. Базисные функции вейвлет-анализа, в отличие от преобразования Фурье, должны быть локализованы, т.е. определены на конечном интервале как во временной, так и в частотной областях.

Нулевое среднее. Равенство нулю нулевого момента, т.е. график исходной функции должен осциллировать (быть знакопеременным) вокруг нуля на оси времени и иметь нулевую площадь :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)dt = 0$$

или, что иногда необходимо – равенство нулю всех моментов до m-го порядка включительно:

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^m \psi(t)dt = 0$$

Это – вейвлеты m-го порядка, позволяющие анализировать более тонкую структуру сигнала, подавляя медленно изменяющиеся его составляющие.

В случае анализа Фурье каждой частоте соответствует всего *одна* гармоническая составляющая.

В случае вейвлет-анализа каждой частоте соответствует *множество* сдвинутых друг относительно друга функций.

Если сигнал имеет особенности, например разрыв, то на его наличие укажут относительно высокие значения амплитуд при высоких частотах Фурье-представления этого сигнала.

При вейвлет-представлении высокие амплитуды будут только у тех вейвлетов, экстремумы которых окажутся вблизи точки разрыва, т.е. можно не только определить наличие особенности, но и ту точку, в которой она имеет место.

Примеры материнских вейвлетов

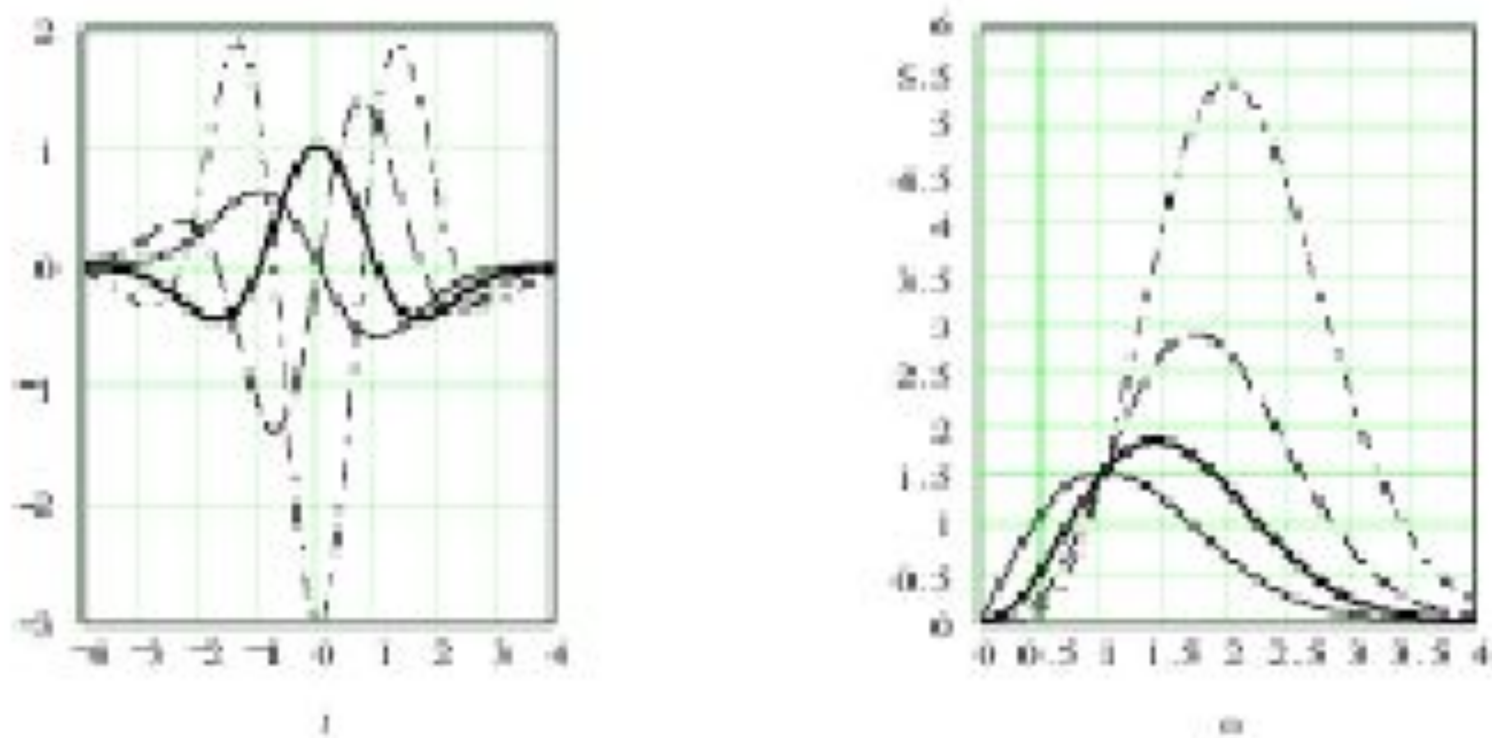
- Наиболее распространенные вещественные базисы конструируются на основе производных функции Гаусса

$$g_0(t) = exp(-\frac{t^2}{2})$$

Это обусловлено тем обстоятельством, что функция Гаусса имеет наилучшие показатели локализации как во временной, так и в частотной областях.

Примеры материнских вейвлетов

Вейвлеты первых четырех порядков Гауссианов и модули их спектральной плотности:



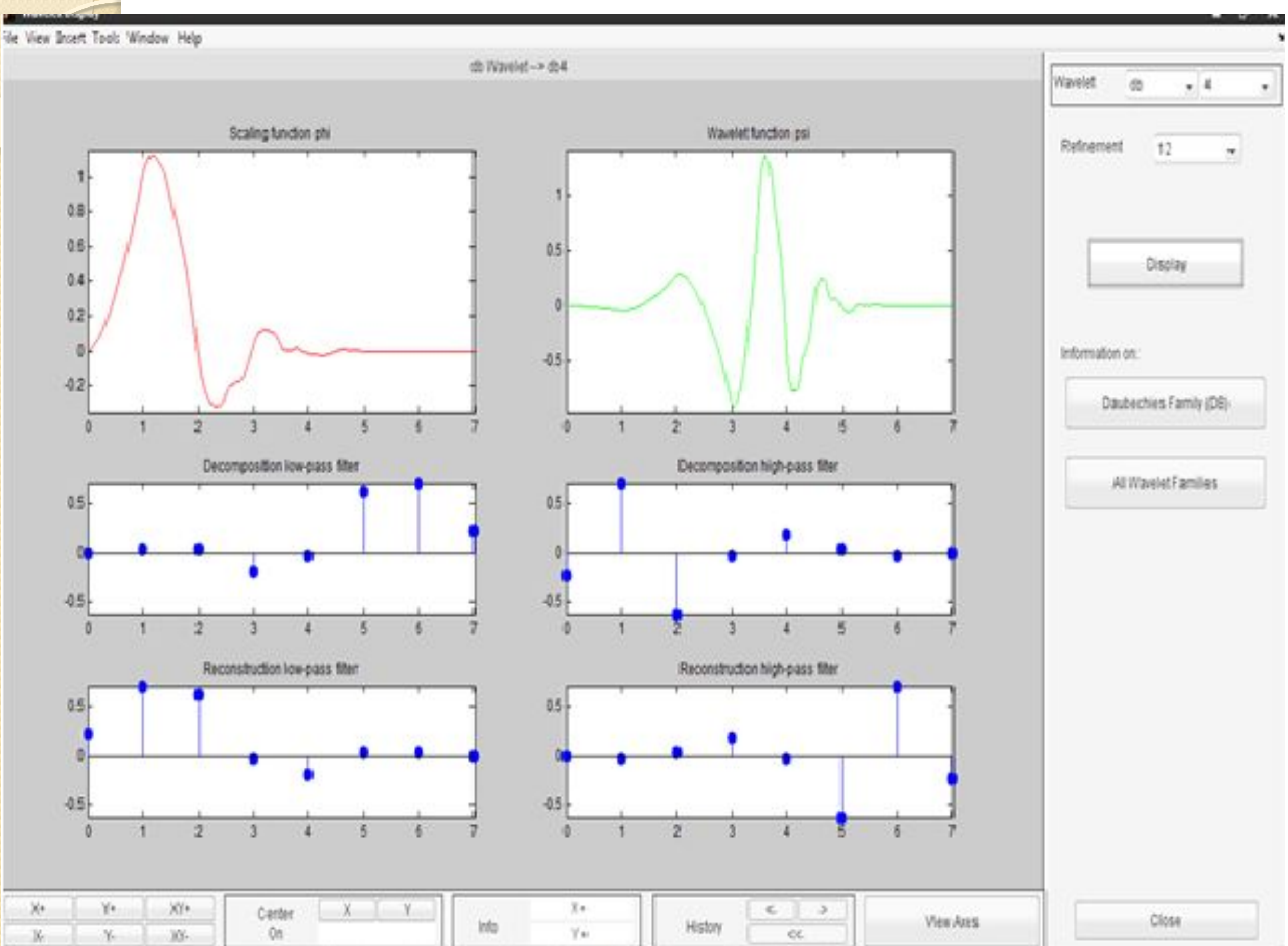
- При n=1 получаем вейвлет первого порядка, называемый WAVE-вейвлетом с равным нулю нулевым моментом.
- При n=2 получаем MHAT-вейвлет, называемый «мексиканская шляпа» (mexican hat – похож на сомбреро). У него нулевой и первый моменты равны нулю. Он имеет лучшее разрешение, чем WAVE-вейвлет.

Это небольшой перечень типов вейвлетов, описываемых аналитически в явном виде. Однако большинство типов вейвлетов не имеют аналитического описания в виде одной формулы, а задаются итерационными выражениями, легко вычисляемыми компьютерами. Примером таких вейвлетов являются функции Добеши (Daubechies).

Вейвлеты	Аналитическая запись $\psi(t)$	Спектральная плотность $\psi(\omega)$
Вещественные непрерывные базисы		
Гауссовы: – первого порядка, или WAVE-вейвлет,	$-t\exp(-t^2/2)$	$(i\omega)\sqrt{2\pi}\exp(-\omega^2/2)$
– второго порядка, или MHAT-вейвлет «мексиканская шляпа» – mexican hat),	$(1-t^2)\exp(-t^2/2)$	$(i\omega)^2\sqrt{2\pi}\exp(-\omega^2/2)$
– n-го порядка,	$(-1)^n \frac{d^n}{dt^n}\left[\exp(-t^2/2)\right]$	$(-1)^n(i\omega)^n\sqrt{2\pi}\exp(-\omega^2/2)$
DOG – difference of gaussians	$e^{-t^2/2}-0,5e^{-t^2/8}$	$\sqrt{2\pi}\left(e^{-\omega^2/2}-e^{-2\omega^2}\right)$
LP-Littlewood & Paley	$(\pi t)^{-1}(\sin 2\pi t-\sin \pi t)$	$\begin{cases}(2\pi)^{-1/2}, \pi\le\lvert t\rvert\le 2\pi, \\ 0, \text{ в противном случае}\end{cases}$

Вещественные дискретные		
HAAR-вейвлет	$\geq \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1/2, \\ -1, & 1/2 \leq t \leq 1, \\ 0, & t < 0,\ t > 0. \end{cases}$	$ie^{j\omega/2}\dfrac{\sin^2 \omega/4}{\omega/4}$
FHAT-вейвлет, или «французская шляпа» (French hat – похож на цилиндр)	$\geq \begin{cases} 1, & \lvert t \rvert \leq 1/3, \\ -1/2, & 1/3 \leq \lvert t \rvert \leq 1, \\ 0, & \lvert t \rvert > 1. \end{cases}$	$\dfrac{4}{3}\dfrac{\sin^3 \omega/3}{\omega/3}$
Комплексные		
Морле (Morlet)	$e^{i\omega_0 t}e^{-t^2/2}$	$\sigma(\omega)\sqrt{2\pi}\, e^{-(\omega-\omega_0)^2/2}$
Пауля (Paul) (чем больше n, тем больше нулевых моментов имеет вейвлет)	$\Gamma(n+1)\dfrac{i^n}{(1-n)^{n+1}}$	$\sigma(\omega)\sqrt{2\pi}\,(\omega)^n e^{-\omega}$

- В настоящее время выбор вейвлетов довольно обширен. Только в пакете Wavelet Toolbox 2.0/2.1 (MATLAB 6) представлено полтора десятка материнских вейвлетов; при этом для ряда из них дано ещё множество вариантов. Для получения справки по какому-либо типу вейвлета при работе в командном режиме MATLAB достаточно исполнить команду ***waveinfo (‘type’)***, указав тип вейвлета.
- Для просмотра же вейвлетов достаточно исполнить команду ***wavemenu*** и в появившемся окне со списком разделов вейвлет-преобразований нажать кнопку **Wavelet Display**. Нажатие этой кнопки выводит окно просмотра вейвлетов, в котором имеется возможность просмотра: общей информации о вейвлетах, о выбранном вейвлете (с именем ‘Name’) и информации о нем.

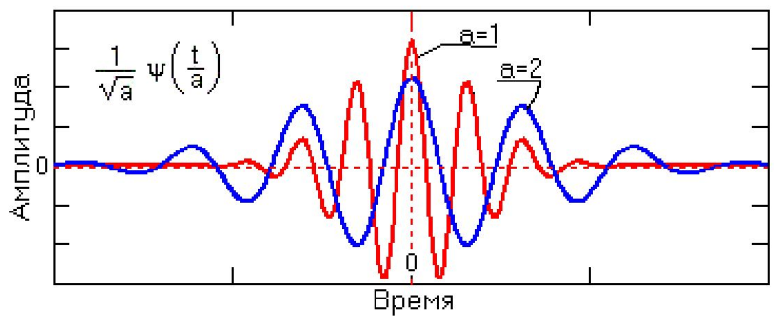

File View Insert Tools Window Help
db Wavelet --> db4
Scaling function phi
Wavelet function psi
Decomposition low-pass filter
Decomposition high-pass filter
Reconstruction low-pass filter
Reconstruction high-pass filter
Wavelet
db
4
Refinement
12
Display
Information on:
Daubechies Family (DB)
All Wavelet Families
Center On
Info
History
View Axes
Close

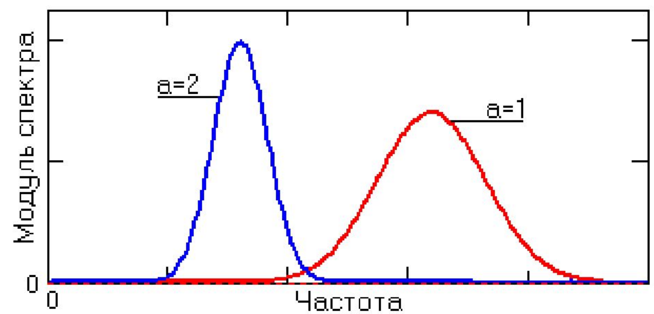
ОСНОВЫ ВЕЙВЛЕТ - ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

В основе вейвлет-преобразований, в общем случае, лежит использование двух непрерывных, взаимозависимых и интегрируемых по независимой переменной функций:

- **Вейвлет-функции ψ(t)**, как psi-функции времени с нулевым значением интеграла и частотным фурье-образом Ψ(ω). Этой функцией, которую обычно и называют *вейвлетом*, выделяются локальные особенности сигнала. В качестве вейвлетов обычно выбираются функции, хорошо локализованные и во временной, и в частотной области.
- **Масштабирующей функции φ(t)**, как временнóй phi-функции с единичным значением интеграла, которой выполняется грубое приближение (аппроксимация) сигнала.

Пример временного и частотного образа функции





Непрерывное вейвлет-преобразование (НВП, CWT-Continious Wavelet Transform).

Допустим, что мы имеем функции s(t) с конечной энергией в пространстве интегрируемых с квадратом функций ($L^2(R)$), определенные по всей действительной оси $R(-\infty, \infty)$. Для финитных сигналов с конечной энергией средние значения сигналов должны стремиться к нулю на $\pm\infty$.

Непрерывным вейвлет-преобразованием (или вейвлетным образом) функции $s(t) \in L^2(R)$ называют функцию двух переменных $a, b \in R$, $a \neq 0$:

$$C(a,b) = \langle s(t), \psi(a,b,t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\psi(a,b,t)dt,$$

где вейвлеты $\psi(a,b,t) \equiv \psi_{ab}(t)$ – масштабированные и сдвинутые копии порождающего вейвлета $\psi(t) \in L^2(R)$, совокупность которых создает базис пространства $L^2(R)$.

Порождающими функциями могут быть самые различные функции с компактным носителем - ограниченные по времени и местоположению на временной оси, и имеющие спектральный образ, локализованный на частотной оси.

Базис пространства $L^2(R)$ целесообразно конструировать из одной порождающей функции, норма которой должна быть равна 1.

Для перекрытия функцией вейвлета всей временной оси пространства используется операция сдвига (смещения по временной оси): $\psi(t,b) = \psi(t-b)$, где значение b для НВП является величиной непрерывной.

- Для перекрытия всего частотного диапазона пространства $L^2(R)$ используется операция временного масштабирования вейвлета с непрерывным изменением независимой переменной:

$$\psi(a,t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi\left(\frac{t}{a}\right)$$

Понятие масштаба ВП имеет аналогию с масштабом географических карт.

Большие значения масштаба соответствуют глобальному представлению сигнала, а низкие значения масштаба позволяют различить детали.

В терминах частоты низкие частоты соответствуют глобальной информации о сигнале, а высокие частоты - детальной информации и особенностям, которые имеют малую протяженность, т.е. масштаб вейвлета, как единица шкалы частотно-временного представления сигналов, обратен частоте.

Масштабирование, как математическая операция, расширяет или сжимает сигнал. Большие значения масштабов соответствуют расширениям сигнала, а малые значения - сжатым версиям.

В определении вейвлета коэффициент масштаба a стоит в знаменателе. Соответственно, $a > 1$ расширяет сигнал, $a < 1$ сжимает его.

Процедура преобразования

- Стартует с масштаба a=1 и продолжается при увеличивающихся значениях a, т.е. анализ начинается с высоких частот и проводится в сторону низких частот. Первое значение 'a' соответствует наиболее сжатому вейвлету. При увеличении значения 'a' вейвлет расширяется.

- Вейвлет помещается в начало сигнала (t=0), перемножается с сигналом, интегрируется на интервале своего задания и нормализуется на $1/\sqrt{|a|}$. Результат вычисления C(a,b) помещается в точку (a=1, b=0) масштабно-временного спектра преобразования. Сдвиг b может рассматриваться как время с момента t=0, при этом координатная ось b повторяет временную ось сигнала.

- Затем вейвлет масштаба a=1 сдвигается вправо на значение b и процедура повторяется. Получаем значение, соответствующее t=b в строке a=1 на частотно-временном плане. Процедура повторяется до тех пор, пока вейвлет не достигнет конца сигнала. Таким образом получаем строку точек на масштабно-временном плане для масштаба a=1.

- Для вычисления следующей масштабной строки значение *a* увеличивается на некоторое значение. При НВП в аналитической форме $\Delta b \rightarrow 0$ и $\Delta a \rightarrow 0$.

При выполнении преобразования в компьютере выполняется увеличение обоих параметров с определенным шагом. Тем самым осуществляется дискретизация масштабно-временной плоскости.

Начальное значение масштабного коэффициента может быть и меньше 1. Для детализации самых высоких частот сигнала минимальный размер окна вейвлета не должен превышать периода самой высокочастотной гармоники анализируемого сигнала

- Если в сигнале присутствуют спектральные компоненты, соответствующие текущему значению a, то интеграл произведения вейвлета с сигналом в интервале, где эта спектральная компонента присутствует, дает относительно большое значение.
- В противном случае - произведение мало или равно нулю, т.к. среднее значение вейвлетной функции равно нулю. С увеличением масштаба (ширины окна) вейвлета преобразование выделяет все более низкие частоты.

Обратное преобразование

Так как форма базисных функций ψ(a,b,t) зафиксирована, то вся информация о сигнале переносится на значения функции C(a,b).

Точность обратного интегрального вейвлет-преобразования зависит от выбора базисного вейвлета и способа построения базиса, т.е. от значений базисных параметров *a*, *b*.

Строго теоретически вейвлет может считаться базисной функцией $L^2(R)$ только в случае его ортонормированности.

Для практических целей непрерывного преобразования часто бывает вполне достаточна устойчивость и "приблизительность" ортогональности системы разложения функций.

Под устойчивостью понимается достаточно точная реконструкция произвольных сигналов.

- Для ортонормированных вейвлетов обратное вейвлет-преобразование записывается с помощью того же базиса, что и прямое:

$$s(t) = \frac{1}{C_\psi} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2} C(a,b)\psi(a,b,t)dadb$$

где C_ψ - нормализующий коэффициент:

$$C_\psi = (|\Psi(\omega)|^2 /\omega)\ d\omega < \infty.$$

Условие конечности C_ψ ограничивает класс функций, которые можно использовать в качестве вейвлетов.

Таким образом, **непрерывное вейвлет-преобразование** представляет собой разложение сигнала по всем возможным сдвигам и сжатиям/растяжениям некоторой локализованной финитной функции - вейвлета. При этом переменная 'a' определяет масштаб вейвлета и эквивалентна частоте в преобразованиях Фурье, а переменная 'b' – сдвиг вейвлета по сигналу от начальной точки в области его определения, шкала которого повторяет временную шкалу анализируемого сигнала.

Вейвлетный анализ является частотно-пространственным анализом сигналов.

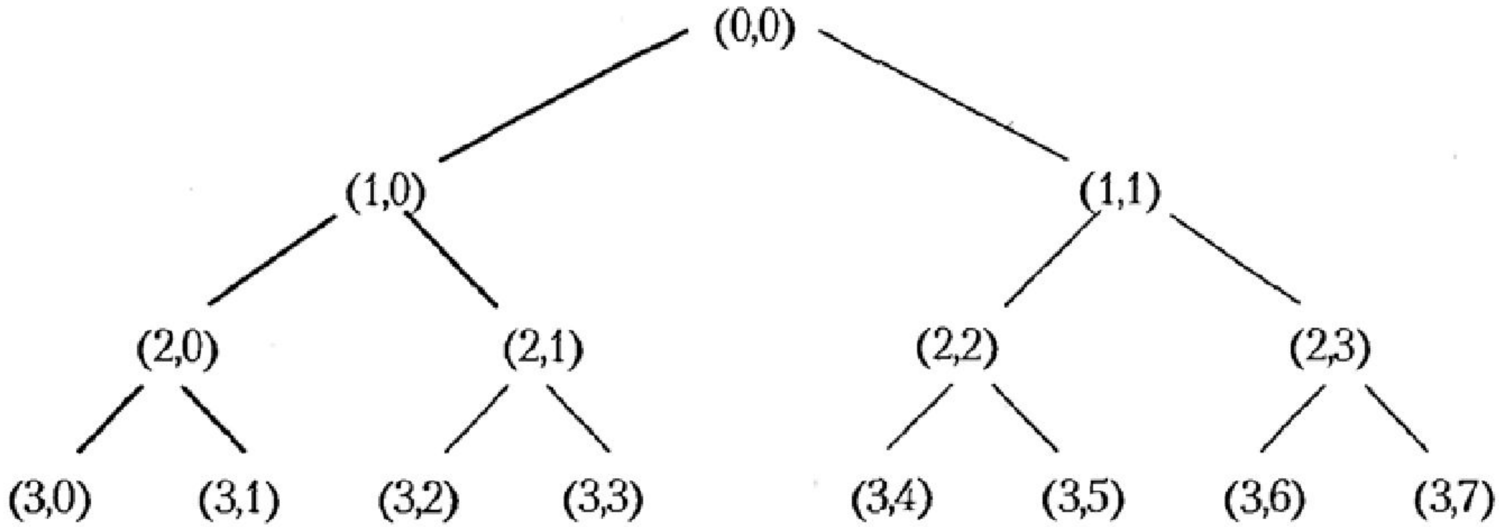


Схема пакетного разложения сигнала