

Логические законы и правила преобразования логических выражений

Законы логики отражают наиболее важные закономерности логического мышления.

В алгебре логики законы логики записывают в виде формул, которые позволяют проводить равносильные преобразования логических выражений.

Закон непротиворечия

Высказывание не может быть одновременно истинным и ложным. Если высказывание A истинно, то его отрицание \bar{A} должно быть ложным. Следовательно, логическое произведение высказывания и его отрицания должно быть ложно:

$$A \& \bar{A} = 0$$

Закон исключения третьего

Высказывание может быть либо истинным, либо ложным, третьего не дано. Это означает, что результат логического сложения высказывания и его отрицания всегда принимает значение истина:

$$A \vee \bar{A} = 1$$

Закон двойного отрицания

Если дважды отрицать некоторое высказывание, то в результате мы получим исходное высказывание:

$$\neg(\bar{A})=A$$

Законы де Моргана (законы общей инверсии)

Общая инверсия двух логических слагаемых равносильна логическому умножению инвертированных переменных:

$$\neg(A \vee B) = \neg A \ \& \ \neg B$$

Общая инверсия двух логических сомножителей равносильна логическому сложению инвертированных переменных:

$$\neg(A \ \& \ B) = \neg A \ \vee \ \neg B$$

Правила логических преобразований

Кроме логических законов важное значение для выполнения преобразований логических выражений имеют правила алгебраических преобразований.

Правило коммутативности

В алгебре переменных и функций слагаемые и множители можно менять местами. В алгебре логики можно менять местами логические переменные при операциях логического умножения:

$$A \& B = B \& A$$

И логического сложения:

$$A \vee B = B \vee A$$

Правило дистрибутивности

В отличие от алгебры переменных и функций, где за скобки можно выносить только общие множители, в алгебре логики за скобки можно выносить как общие множители, так и общие слагаемые:
дистрибутивность умножения относительно сложения

$$(A \& B) \vee (A \& C) = A \& (B \vee C)$$

дистрибутивность сложения относительно умножения

$$(A \vee B) \& (A \vee C) = A \vee (B \& C)$$

Правила равносильности

Это правила отсутствия показателей степени у результатов логического сложения и умножения переменных.

Для логического сложения:

$$A \vee A = A$$

Для логического умножения:

$$A \& A = A$$

Правила исключения констант

Для логического сложения:

$$A \vee 1 = 1 \quad A \vee 0 = A$$

Для логического умножения:

$$A \& 1 = A \quad A \& 0 = 0$$

Преобразование логического выражения

Упростить логическое выражение:

$$(A \& B) \vee (A \& \neg B)$$

Выносим за скобки A (дистрибутивность)

$$(A \& B) \vee (A \& \neg B) = A \& (B \vee \neg B)$$

По закону исключения третьего

$$A \& (B \vee \neg B) = A \& 1$$

По правилу исключения констант

$$A \& 1 = A$$

Контрольные вопросы

Упростить логическое выражение:

$$(A \vee B) \& (A \vee \neg B)$$

Решить логическое уравнение:

$$\neg(X \& B) \& \neg(X \& \neg B) = A$$

Решить логическое уравнение:

$$\neg(X \vee A) \vee \neg(X \vee \neg A) = B$$

$$X = B$$