Симплекс-метод

Лекции 6, 7

Симплекс-метод с естественным базисом

Симплекс –метод основан на переходе от одного опорного плана к другому, при котором значение целевой функции возрастает при условии, что задача имеет оптимальный план и каждый опорный план является невырожденным.

Этот переход возможен, если известен какой-либо опорный план.

В этом случае каноническая задача линейного программирования должна содержать единичную подматрицу порядка m

Тогда очевиден первоначальный опорный план(неотрицательное базисное решение системы ограничений КЗЛП).

Рассмотрим задачу, для которой это возможно.

Пусть требуется найти максимальное значение функции

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1 + a_{1m+1}x_{m+1} + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ x_2 + a_{2m+1}x_{m+1} + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ x_m + a_{mm+1}x_{m+1} + ... + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad (j = \overline{1,n}).$$

Здесь $a_{ij}, b_i, c_j \quad (i = \overline{1,m}, \; j = \overline{1,n})$ -заданные постоянные числа, причем $m < n, \quad b_i > 0.$

Перепишем ЗЛП в векторной форме: найти максимум функции

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

при условиях

$$x_1 P_1 + x_2 P_2 + \ldots + x_n P_n = P_0,$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}).$$

Здесь

$$P_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix};\ P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix};\ P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix};\ldots;$$

$$P_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 1 \end{pmatrix};\ P_{m+1} = \begin{pmatrix} a_{1m+1} \\ a_{2m+1} \\ \ldots \\ a_{mm+1} \end{pmatrix};\ P_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Так как $b_1P_1 + b_2P_2 + ... + b_mP_m = P_0$,
то по определению опорного плана

$$\overline{X} = (b_1, b_2, ..., b_m, 0, 0, ..., 0)$$,

где последние компоненты вектора равны нулю, является опорным планом

Опорный план называется невырожденным, если он содержит m положительных компонент. В противном случае он называется вырожденным.

План, при котором целевая функция ЗЛП принимает свое максимальное (минимальное) значение , называется <u>оптимальным</u>

Этот план определяется системой единичных векторов , которые образуют базис *m*-векторного пространства.

Проверка на оптимальность опорного плана происходит с помощью критерия оптимальности.

Признак оптимальности.

1)Опорный план ЗЛП является оптимальным, если

$$\Delta_j = z_j - c_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} - c_j \geq 0$$

для любого $j = \overline{1,n}$.

2)Если для некоторого *j=k* $\Delta_k < 0$

и среди чисел a_{ik} $(i = \overline{1, m})$

нет положительных, т.е. $a_{ik} \le 0$, то целевая функция ЗЛП не ограничена на множестве ее планов, т.е. ЗЛП не имеет решения, так как нет конечного оптимума.

3)Если же для некоторого k выполняется условие $\Delta_k < 0$, но среди чисел a_{ik} есть положительные, т.е. не все $a_{ik} \le 0$, то можно получить новый опорный план, для которого значения целевой функции

$$F(X') > F(X) \quad .$$

На основании признака оптимальности делаем вывод о целесообразности перехода к новому опорному плану.

Симплекс-таблица

i	Базис	Сб	c_j / P_0 (план)	c_1	c_2	c_3	…	c_m	c_{m+1}	…	c_n	Q
				P_1	P_2	P_3	…	P_m	P_{m+1}	…	P_n	
1	P_1	c_1	b_1	1	0	0	…	0	a_{1m+1}	…	a_{1n}	
2	P_2	c_2	b_2	0	1	0	…	0	a_{2m+1}	…	a_{2n}	
3	P_3	c_3	b_3	0	0	1	…	0	a_{3m+1}	…	a_{3n}	
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	
m	P_m	c_m	b_m	0	0	0	…	1	a_{mm+1}	…	a_{mn}	
m+1			F_0	0	0	0	…	0	Δ_{m+1}	…	Δ_n	

Симплекс-таблица

В столбце Сб записывают коэффициенты при неизвестных целевой функции, имеющие те же индексы, что и векторы данного базиса.

В столбце P_0 -положительные компоненты исходного опорного плана, в нем же в результате вычислений получают положительные компоненты оптимального плана.

Первые *m* строк заполняют по исходным данным задачи, а показатели (*m*+1)-й строки вычисляют. В этой строке в столбце вектора P_0 записывают значение целевой функции, которое она принимает при данном опорном плане, а в столбце вектора P_j - значение $\Delta_j = z_j - c_j$.

Здесь $z = c_{\acute{a}} \cdot P_j$, т.е.

$$z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} = c_1 a_{1j} + c_2 a_{2j} + \ldots + c_m a_{mj} \quad (j = \overline{1,n})$$

Значение

$$F_0 = P_0 \cdot c_{\acute{a}} = c_1 b_1 + c_2 b_2 + \ldots + c_m b_m .$$

После заполнения таблицы исходный опорный план проверяют на оптимальность. Для этого просматривают элементы (m+1)-й строки. Может иметь место один из 3-х случаев.

1) Все $\Delta_j \geq 0.$ Тогда составленный план оптимален.

2) $\Delta_j < 0$ для некоторого *j* и все соответствующие этому *j* $a_{ij} \leq 0$. Тогда целевая функция неограничена.

3) $\Delta_j < 0$ для некоторых индексов *j* и для каждого такого *j* по крайней мере одно из чисел a_{ij} положительно. Здесь можно перейти к новому опорному плану.

Этот переход осуществляется исключением из базиса какого-нибудь из векторов и включением в него другого.

В базис <u>вводим</u> вектор , давший минимальную отрицательную величину симплекс-разности

$$\Delta_k = \min(z_j - c_j), \qquad (j = \overline{1,n})$$

Из базиса <u>выводится </u>вектор P_r , который дает наименьшее положительное оценочное отношение

$$Q = \min(\frac{b_i}{a_{ik}})$$

для всех $a_{ik} > 0$, т.е. минимум достигается при *i*=*r*.

Число a_{rk} называется разрешающим элементом.

$$Q = \min\left(\frac{b_i}{a_{ik}}\right) = \frac{b_r}{a_{rk}}, \quad a_{ik} > 0, \quad i = \overline{1, m}.$$

Строка P_r называется разрешающей строкой, элементы этой строки в новой симплекс-таблице вычисляются по методу Жордана-Гаусса, т.е. по формулам:

$$a'_{rj} = \frac{a_{rj}}{a_{rk}}, \quad j = \overline{1, n}, \quad i = r.$$

Элементы *i*-й строки –по формулам

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{rj} a_{ik}}{a_{rk}}, \quad i = \overline{1, m}, \;\; j = \overline{1, n}.$$

Значение нового опорного плана считают по формулам

$$b'_r = \frac{b_r}{a_{rk}} \quad \text{äëÿ} \;\; i = r, i = \overline{1, m};$$

$$b'_i = b_i - \frac{b_r a_{ik}}{a_{rk}} \quad \text{äëÿ} \;\; i \neq r, i = \overline{1, m}.$$

Значение целевой функции при переходе от одного опорного плана к другому , улучшенному, изменяется по формуле $F' = F - \Delta_k Q.$

Процесс решения продолжаем до получения оптимального плана либо до установления неограниченности ЦФ.

Если среди оценок оптимального плана нулевые только оценки , соответствующие базисным векторам, то оптимальный план единствен.

Если же нулевая оценка соответствует вектору, не входящему в базис, то в общем случае это означает, что опорный план не единствен.

Алгоритм применения симплекс-метода

1)Находят опорный план.

2)Составляют симплекс-таблицу.

3)Выясняют, имеется ли хотя бы одна отрицательная оценка. Если нет, то найденный опорный план оптимален. Если же есть отрицательные оценки, то либо устанавливают неразрешимость задачи, либо переходят к новому опорному плану.

ВГУЭС

4)Находят направляющие столбец и строку. Направляющий столбец определяется наибольшим по абсолютной величине отрицательным числом Δ_j , а направляющая строка— минимальным числом Q.

5)Определяют положительные компоненты нового опорного плана. Составляется новая таблица.

6)Проверяют найденный опорный план на оптимальность.

Пример.

Решить симплекс-методом ЗЛП

$$F = 10x_1 + 20x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 3,5x_2 \le 350, \\ 2x_1 + 0,5x_2 \le 240, \\ x_1 + x_2 \le 150, \end{cases}$$

$$x_{1,2} \ge 0.$$

Решение.

Приведем задачу к каноническому виду, введя новые переменные $x_3, x_4, x_5.$

В целевую функцию эти переменные войдут с нулевыми коэффициентами:

$$F = 10x_1 + 20x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + 3,5x_2 + x_3 = 350, \\ 2x_1 + 0,5x_2 + x_4 = 240, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 150, \end{cases}$$

$$x_{1,2,3,4,5} \geq 0.$$

Из коэффициентов при неизвестных и свободных членов составим векторы

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 3,5 \\ 0,5 \\ 1 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, P_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, P_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, P_0 = \begin{pmatrix} 350 \\ 240 \\ 150 \end{pmatrix}$$

Единичные векторы образуют единичную подматрицу и составляют базис первоначального плана. Свободные неизвестные приравниваются к нулю.

Получаем первоначальный опорный план:

X= (0;0;350;240;150).

Составим симплекс-таблицу и проверим план на оптимальность. В нашем примере

$$m = 3, n = 5.$$

Для заполнения последней строки таблицы сразу вычислим симплекс-разности

$$\Delta_j = z_j - c_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} - c_j :$$

Для этого поочередно умножаем столбец Сб на соответствующие элементы каждого столбца $P_1, \ P_2, \ \ldots$

$$\Delta_1 = z_1 - c_1 = 0\cdot 1 + 0\cdot 2 + 0\cdot 1 - 10 = -10,$$

$$\Delta_2 = z_2 - c_2 = 0\cdot 3,5 + 0\cdot 0,5 + 0\cdot 1 - 20 = -20,$$

$$\Delta_3 = z_3 - c_3 = 0\cdot 1 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 - 0 = 0,$$

$$\Delta_4 = z_4 - c_4 = 0\cdot 1 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 - 0 = 0,$$

$$\Delta_5 = z_5 - c_{5.} = 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 1 - 0 = 0.$$

Составим теперь нулевую симплексную таблицу

Таблица 0.

i	Базис	Сб	c_j / P_0 (план)	10	20	0	0	0	Q
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	
1	P_3	0	350	1	3,5	1	0	0	100
2	P_4	0	240	2	0,5	0	1	0	480
3	P_5	0	150	1	1	0	0	1	150
4			0	-10	-20	0	0	0	

Среди оценок имеются отрицательные, поэтому план не оптимален.

Определяем разрешающий элемент симплексной таблицы. Т.к. имеется 2 отрицательные оценки, то выбираем ту, что дает максимальную по абсолютной величине отрицательную оценку, т. е. -20.

Это означает, что в базис включается вектор P_2 , а исключается из базиса тот вектор, которому соответствует

$$Q = \min_i \left\{ \frac{b_i}{a_{ik}} \right\} = \frac{b_r}{a_{rk}} \qquad (a_{ik} > 0, i = \overline{1, m}).$$

$$Q = \min_i \left\{ \frac{b_i}{a_{ik}} \right\} = \min \left\{ \frac{350}{3,5}, \frac{240}{0,5}, \frac{150}{1} \right\} = \min \{100, 480, 150\} =$$

$$= \frac{b_r}{a_{rk}} = \frac{b_1}{a_{12}} = 100.$$

Разрешающим элементом является $a_{12} = 3,5$.

Значение целевой функции в следующей симплекс-таблице будет равно:

$$F(X^{(1)}) = F(X^{(0)}) - \Delta_k^{(0)} Q^{(0)} = 0 - (-20) \cdot 100 = 2000$$

Элементы направляющей строки в новой таблице вычисляем, деля эту строку на ведущий элемент(в том числе и клетку в столбце план):

$$a_{11}^{(1)} = \frac{a_{11}^{(0)}}{a_{12}} = \frac{1}{3,5} = 0,286,$$

$$a_{12}^{(1)} = \frac{a_{12}^{(0)}}{a_{12}} = \frac{3,5}{3,5} = 1, \quad a_{13}^{(1)} = \frac{1}{3,5} = 0,286,$$

$$a_{14}^{(1)} = \frac{0}{3,5} = 0, \; a_{15}^{(1)} = \frac{0}{3,5} = 0.$$

Можно рассчитывать элементы строк методом Жордана-Гаусса, домножая 1-ю строку на (-0,5) и прибавляя ее ко 2-й, а затем на(-1) и прибавляя к 3-й, обнулив таким образом элементы 2-го выделенного (разрешающего) столбца, или по формулам треугольника

$$a_{ij}^{'} = a_{ij} - \frac{a_{ri} a_{ik}}{a_{rk}}$$

$$b_i^{'} = b_i - \frac{b_r a_{ik}}{a_{rk}}, \quad i \neq r.$$

Элементы 2-ой строки получаем по методу Жордана-Гаусса (или по формулам треугольника)

$$a_{21}^{(1)} = a_{21} - \frac{a_{11}}{a_{12}} = 2 - \frac{1 \cdot 0,5}{3,5} = 1,857,$$

$$a_{22}^{(1)} = a_{22} - \frac{a_{12}a_{22}}{a_{12}} = 0,5 - \frac{3,5 \cdot 0,5}{3,5} = 0,$$

$$a_{23}^{(1)} = a_{23} - \frac{a_{13}a_{22}}{a_{12}} = 0 - \frac{1 \cdot 3,5}{3,5} = -0,143,$$

....

Аналогично рассчитываем элементы 3-й строки.

Значения нового опорного плана рассчитываем по формулам:

$$b_2^{(1)} = b_2 - \frac{b_1 a_{22}}{a_{12}} = 240 - \frac{350 \cdot 0,5}{3,5} = 190,$$

$$b_3^{(1)} = b_3 - \frac{b_1 a_{22}}{a_{12}} = 150 - \frac{350 \cdot 1}{3,5} = 50.$$

После чего заполняем таблицу 1.

Таблица 1.

i	Базис	Сб	P_0 (план) \ c_j	10	20	0	0	0	Q
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	
1	P_2	20	100	0,286	1	0,286	0	0	350
2	P_4	0	190	1,857	0	-0,143	1	0	102,308
3	P_5	0	50	**0,714**	0	-0,286	0	1	**70**
4			2000	-4,286	0	5,714	0	0	

В результате вычислений получен следующий опорный план:

X=(0,100,0,190,50).Значение целевой функции при этом

$$F = \sum_{i=1}^{3} c_i b_i = 20 \cdot 100 + 0 \cdot 190 + 0 \cdot 50 = 2000.$$

Проверим план на оптимальность. Вычислим симплекс-разности.

$$\Delta_1^{(1)} = z_1 - c_1 = 20 \cdot 0,286 + 0 \cdot 1,857 + 0 \cdot 0,714 - 10 = -4,286,$$

$$\Delta_2^{(1)} = z_2 - c_2 = 20 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 - 20 = 0,$$

$$\Delta_3^{(1)} = z_3 - c_3 = 20 \cdot 0,286 + 0 \cdot (-0,143) + 0 \cdot (-0,286) -$$

$$-0 = 5,714,$$

$$\Delta_4^{(1)} = z_4 - c_4 = 20 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 - 0 = 0,$$

$$\Delta_5^{(1)} = z_5 - c_5 = 20 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 - 0 = 0.$$

В первом столбце матрицы имеется отрицательная оценка. План не оптимален, но его можно улучшить , включив в базис вектор P_1 . Найдем минимальное оценочное отношение:

$$Q = \min\left\{\frac{b_i}{a_{ik}}\right\} = \min\left\{\frac{100}{0,286};\frac{190}{1,857};\frac{50}{0,714}\right\} =$$

$$= \min\{350;102,308;70\} = \frac{b_3}{a_{31}} = 70.$$

Выводится из базиса вектор P_5, которому соответствует минимальное оценочное отношение 70. Переходим к следующему опорному плану. Вводим в базис вектор P_1, делим разрешающую строку на разрешающий элемент $a_{31} = 0,714$ и заполняем 3-ю строку таблицы 2. После чего методом Жордана-Гаусса домножаем эту строку на (-0,286) и прибавляем к первой, затем домножим эту строку на (-1,857) и прибавляем ко второй.

Таблица 2

i	Базис	Сб	P_0 (план) \ c_j	10	20	0	0	0	Q
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	
1	P_2	20	80	0	1	0,4	0	-0,4	
2	P_4	0	60	0	0	0,6	1	-2,6	
3	P_1	10	70	**1**	0	-0,4	0	1,4	
4			2300	0	0	4	0	6	

Получили опорный план: X =(70,80,0,60,0) и проверяем его на оптимальность.

Вычисляем симплекс-разности.

$$\Delta_1 = z_1 - c_1 = 20 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 10 \cdot 1 - 10 = 0,$$

$$\Delta_2 = z_2 - c_2 = 20 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 10 \cdot 0 - 20 = 0,$$

$$\Delta_3 = z_3 - c_3 = 20 \cdot 0,4 + 0 \cdot 0,6 + 10 \cdot (-0,4) - 0 = 4,$$

$$\Delta_4 = z_4 - c_4 = 20 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 10 \cdot 0 - 0 = 0,$$

$$\Delta_5 = z_5 - c_5 = 20 \cdot (-0,4) + 0 \cdot (-2,6) + 10 \cdot 1,4 - 0 = 6.$$

План оптимален. Значение целевой функции

$$F = 10 \cdot 70 + 20 \cdot 80 + 0 \cdot 60 = 2300.$$