Механика сплошных сред

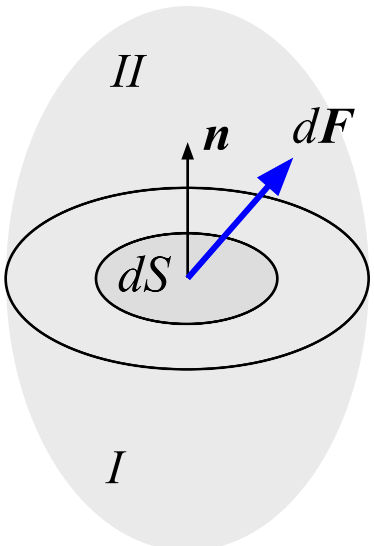
Сплошная среда – это механическая система, в которой вещество распределено непрерывно.

Примеры сплошных среды газ, жидкость, деформируемое твердое тело.

Силы в сплошной среде → поверхностные
Силы в сплошной среде → объемные (массовые)

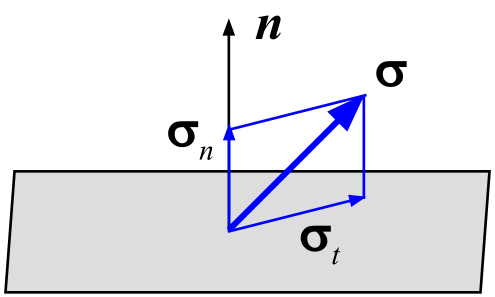
Силы в сплошной среде

Поверхностные силы



$d\boldsymbol{F}$ – поверхностная сила, с которой тело *II* действует на тело *I* на площадке dS

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{d\boldsymbol{F}}{dS}$$ – *напряжение* (действующее на *I* на dS)



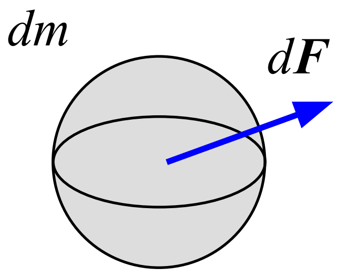
$\boldsymbol{\sigma}_n$ – нормальное напряжение
$\boldsymbol{\sigma}_t$ – касательное напряжение

В общем случае

$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{n}),\quad \boldsymbol{\sigma}_n = \boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{n}),\quad \boldsymbol{\sigma}_t = \boldsymbol{\sigma}_t(\boldsymbol{n})$

Силы в сплошной среде

Объемные силы



$d\boldsymbol{F}$ – объемная сила, действующая на dm

$$\boldsymbol{f} = \frac{d\boldsymbol{F}}{dm}$$ – *удельная плотность массовых сил*

Для силы тяжести $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{g}$

Гидростатика

Жидкость (газ) не обладает упругостью формы:

если $\boldsymbol{\sigma}_t \neq 0$, то возникает движение жидкости

При равновесии в жидкости (газе) $\boldsymbol{\sigma}_t = 0$

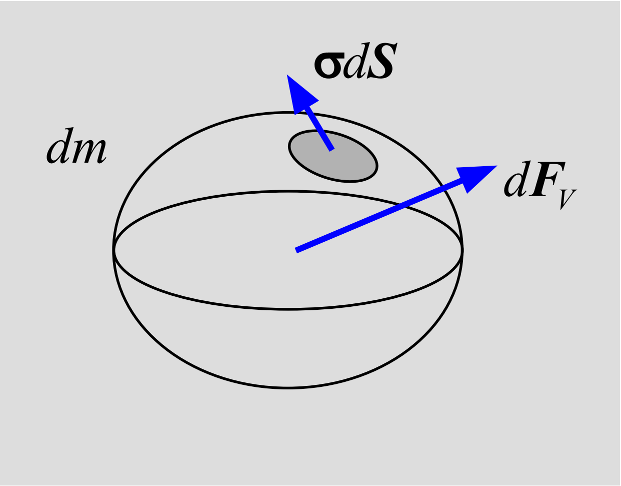
Кроме того, нормальное напряжение не зависит от ориентации площадки и носит характер давления, т.е.

$$\boldsymbol{\sigma}_n = -p\boldsymbol{n}$$

Закон Паскаля: В состоянии равновесия в жидкости (газе)

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_n = -p\boldsymbol{n}$$

Гидростатика



Объемная сила:

$$dF_V = f dm = \rho f\, dV \qquad \left(dm = \rho dV \right)$$

Поверхностная сила:

$$dF_S = \oint \sigma dS = -\oint p dS \qquad \left(\sigma = -p n \right)$$

Согласно векторному анализу: $\lim\limits_{V \to 0} \frac{1}{V} \oint p dS = \nabla p$

$$\nabla p = \text{grad } p \equiv \frac{\partial p}{\partial x} i + \frac{\partial p}{\partial y} j + \frac{\partial p}{\partial z} k$$ – *градиент p* (вектор)

Гидростатика

При равновесии
$$d\boldsymbol{F} = d\boldsymbol{F}_V + d\boldsymbol{F}_S = 0$$
$$d\boldsymbol{F}_V = \rho \boldsymbol{f}\, dV$$
$$d\boldsymbol{F}_S = -\nabla p\, dV$$

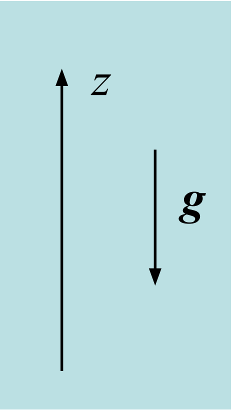
$$(\rho \boldsymbol{f} - \nabla p) dV = 0$$

$$\boxed{\nabla p = \rho \boldsymbol{f}}$$ *– основное уравнение гидростатики*

Гидростатика

$$\boldsymbol{f} = 0 \qquad \nabla p = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{p = \text{const}}$$

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{g} \qquad \nabla p = \rho \boldsymbol{g} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0\,, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad \Rightarrow$$



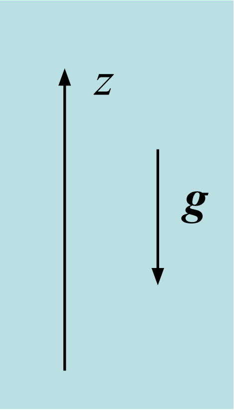
$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \qquad \left(\quad p = p(z) \quad \right)$$

1) Несжимаемая жидкость, $\rho = \text{const}$

$$\boxed{p = p_0 - \rho g z}$$

Гидростатика

2) Идеальный газ в механическом и тепловом равновесии



$T = \mathrm{const}$

$$p = \frac{RT}{\mu}\rho$$ – уравнение состояния идеального газа

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{\mu g}{RT}p \qquad \left(\frac{dp}{dz} = -\rho g \right) \Rightarrow$$

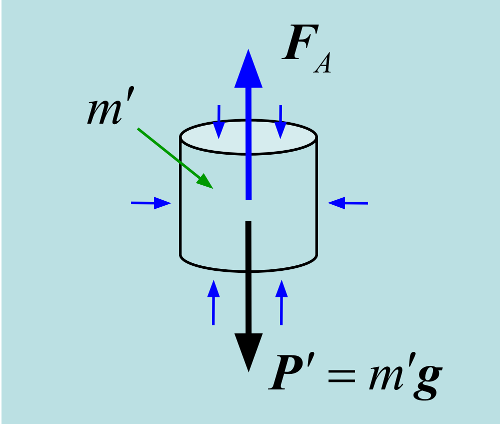
$$\frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{RT}dz \Rightarrow$$

$$\begin{cases} p = p_0 \exp\left(-\frac{\mu g z}{RT}\right) \\ \rho = \rho_0 \exp\left(-\frac{\mu g z}{RT}\right) \end{cases}$$

– *барометрические формулы*

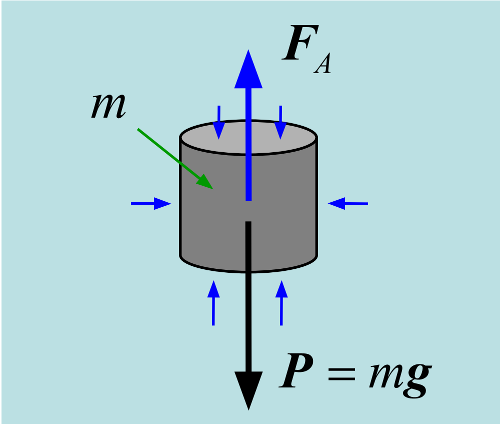
Гидростатика

Закон Архимеда



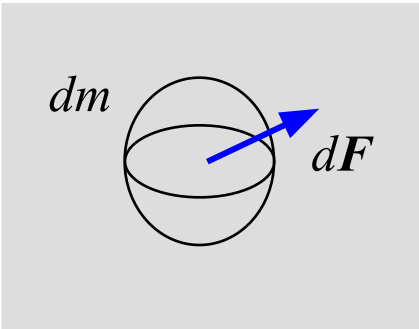
F_A – равнодействующая сил давления,
P' – сила тяжести (вес) жидкого объема,
P – сила тяжести (вес) тела

При равновесии жидкого объема $F_A = P'$.
Такая же по величине выталкивающая сила (сила Архимеда) действует и на тело.



Закон Архимеда:
Выталкивающая сила, действующая на неподвижное тело в жидкости, равна весу вытесненной жидкости, направлена вверх и проходит через центр масс.

Стационарное движение идеальной жидкости



Идеальная жидкость:

$\boldsymbol{\sigma}_t = 0$ при любых движениях

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{n}$$

Уравнение движения элементарного жидкого объема

$$dm\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = d\boldsymbol{F}$$

$$d\boldsymbol{F} = d\boldsymbol{F}_V + d\boldsymbol{F}_S = (\rho\boldsymbol{f} - \nabla p)dV$$

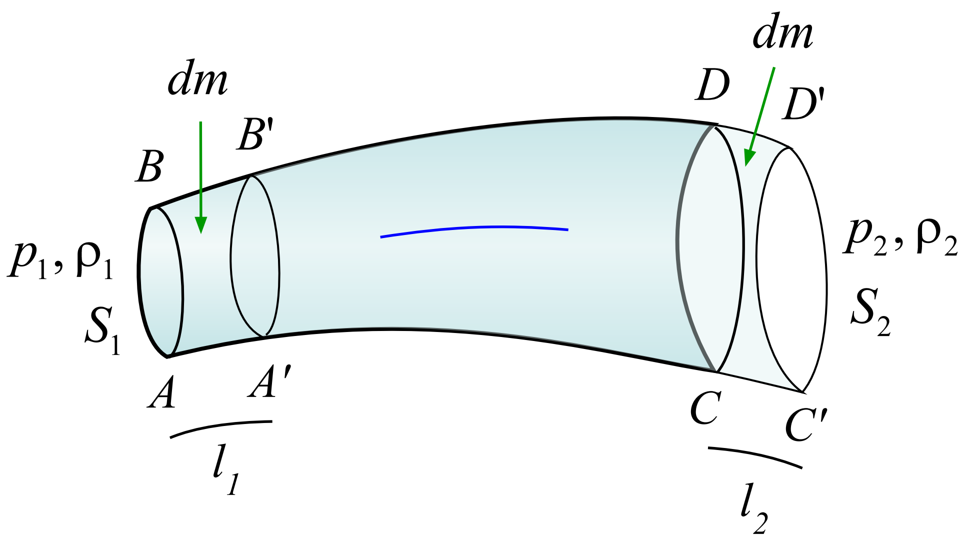
$$dm = \rho dV$$

$$\boxed{\rho\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \rho\boldsymbol{f} - \nabla p}$$

– основное уравнение динамики идеальной жидкости (*уравнение Эйлера*)

Стационарное движение идеальной жидкости

Трубка тока – трубчатая поверхность, образованная линиями тока



При движении $ABCD \rightarrow A'B'C'D'$

$$dA = p_1 S_1 l_1 - p_2 S_2 l_2$$

$$dm = \rho_1 S_1 l_1 = \rho_2 S_2 l_2$$

$$\Rightarrow \quad dA = \left(\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2} \right) dm$$

Стационарное движение идеальной жидкости

$$\varepsilon = \frac{dE}{dm}$$ – удельная плотность энергии (E – полная энергия)

Изменение энергии трубки тока $ABCD$ $\quad dE = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)dm$

В соответствии с законом сохранения энергии $\quad dE = dA \Rightarrow$

$$\varepsilon_1 + \frac{p_1}{\rho_1} = \varepsilon_2 + \frac{p_2}{\rho_2}$$ или (на линии тока)

$$\boxed{\varepsilon + \frac{p}{\rho} = \mathrm{const}\,(L)}$$ – *уравнение Бернулли*

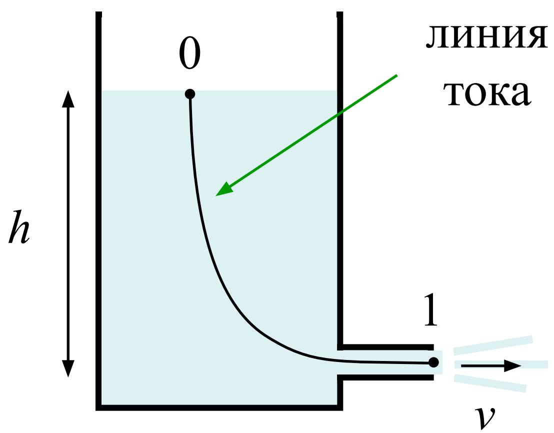
Стационарное движение идеальной жидкости

В случае $\rho = \text{const}$ и $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{g}$
($U_{\text{вн}} = \text{const}$ по причине несжимаемости) $\Rightarrow$ $\left(\varepsilon = \dfrac{v^2}{2} + gh \right)$

$$\boxed{\frac{v^2}{2} + gh + \frac{p}{\rho} = \text{const}\,(L)}$$

– уравнение Бернулли

Истечение жидкости из сосуда

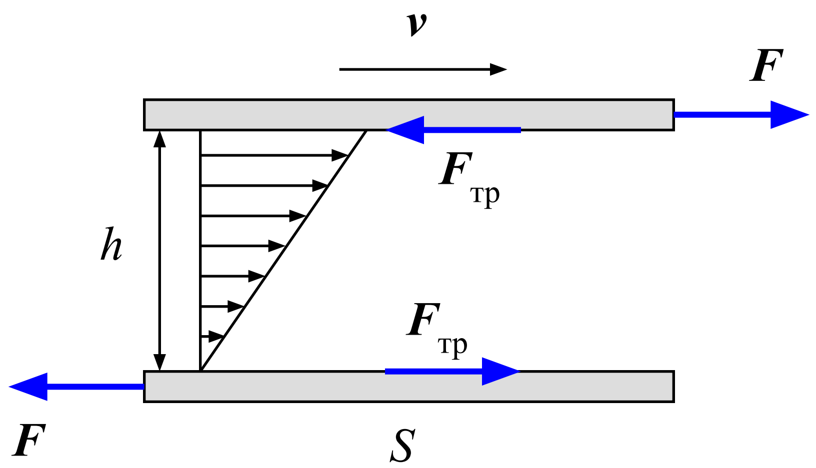


$$\overbrace{\frac{p_0}{\rho} + gh}^{0} = \overbrace{\frac{p_0}{\rho} + \frac{v^2}{2}}^{1} \Rightarrow$$

$$\boxed{v = \sqrt{2gh}}$$

– формула Торричелли

Вязкая жидкость



Для поддержания движения верхней пластины и удержания в покое нижней требуется приложить постоянную силу ***F***.

Опыт:

1) $F = \eta S \dfrac{v}{h}$, где μ – *коэффициент* (*динамической*) *вязкости*

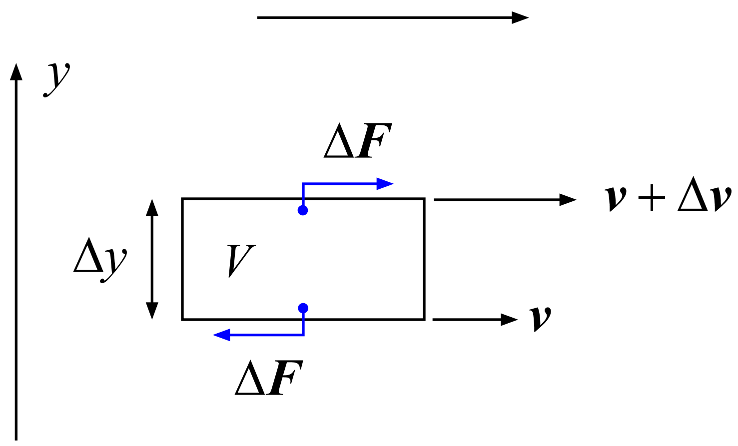
2) жидкость прилипает к пластинкам

Поэтому в формуле можно считать

1) v – относительная скорость граничных слоев жидкости

2) F – приложена к этим граничным слоям

Вязкая жидкость



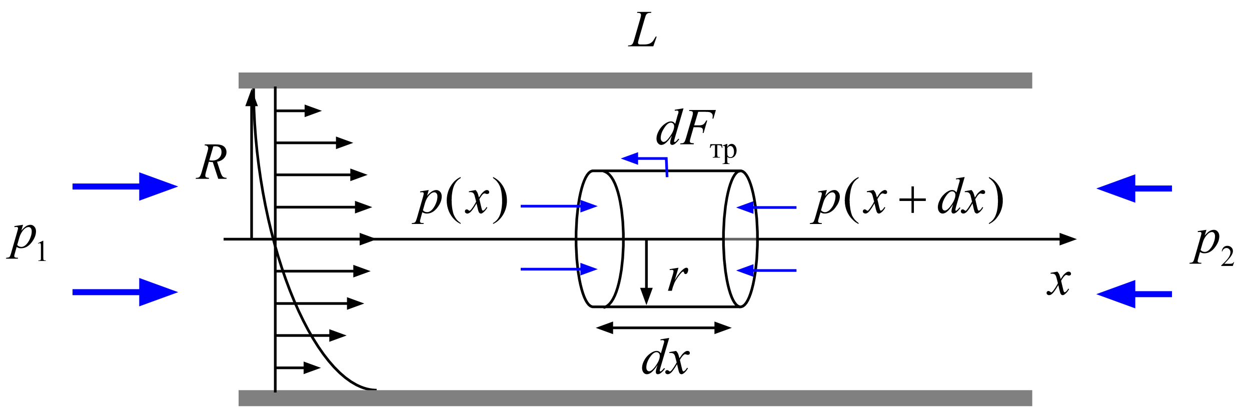
V – прямоугольный объем, боковые грани которого параллельны потоку

$$\Delta F = \eta \Delta S \frac{\Delta v}{\Delta y} = \eta \Delta S \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\sigma_t = \frac{dF_t}{dS} = \eta \frac{\partial v}{\partial n}$$

n – нормаль к dS

Формула Пуазейля



Положим, что линии тока $\parallel$ оси трубы и $p = p(x), \; v = v(r)$

Движение стационарное $\Rightarrow$ $\sum F_i = 0$ (на цилиндрик) $\Rightarrow$

$$\pi r^2 \left[p(x) - p(x+dx) \right] + (2\pi r \cdot dx)\eta \frac{dv}{dr} = 0 \quad \Big| \; \div \pi r^2 dx \quad \Rightarrow$$

Формула Пуазейля

$$\frac{2\eta}{r}\frac{dv}{dr} = \frac{dp}{dx} = \text{const} = \frac{p_2 - p_1}{L}$$

зависит от r

зависит от x

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{p_1 - p_2}{2\eta L} r \quad \Rightarrow \quad \left[\ v(R) = 0\ \right] \quad \boxed{v = \frac{p_1 - p_2}{4\eta L}(R^2 - r^2)}$$

Расход жидкости $\left(= \dfrac{dm}{dt}\right)$

$$Q = \int_0^R \rho v\, 2\pi r\, dr = \pi\rho \frac{p_1 - p_2}{2\eta L}\int_0^R (R^2 - r^2) r\, dr$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{Q = \pi\rho \frac{p_1 - p_2}{8\eta L} R^4}$$ – *формула Пуазейля*

Идеально упругие тела

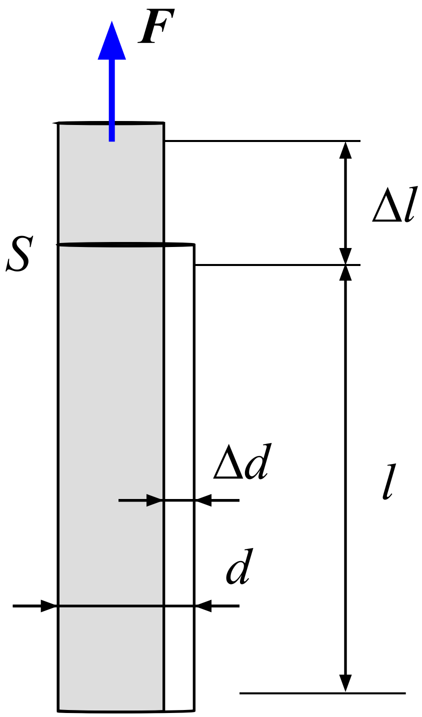
Деформации → *упругие*
Деформации → *пластические*

Упругие деформации – это деформации, исчезающие после прекращения действия деформирующих тело сил.
При *пластических деформациях* после прекращения действия внешних сил деформации полностью не исчезают.

Идеально упругих тела – это тела, деформации в которых пропорциональны внутренним напряжениям и для них справедлив принцип суперпозиции: деформация тела, вызываемая действием нескольких сил, равна сумме деформаций, вызываемой каждой силой в отдельности.

Т.е. идеально упругие тела подчиняются *закону Гука*.

Идеально упругие тела



По закону Гука:

1) $$\frac{F}{S} = E\frac{\Delta l}{l}$$

E – модуль Юнга

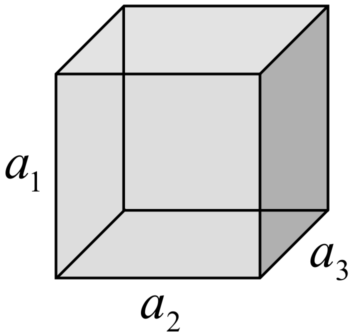
2) $$\frac{\Delta d}{d} = -\sigma\frac{\Delta l}{l}$$

σ – *коэффициент Пуассона*

Модуль Юнга *E* и коэффициент Пуассона σ полностью определяют упругие свойства изотропного материала.

Идеально упругие тела

Кубик



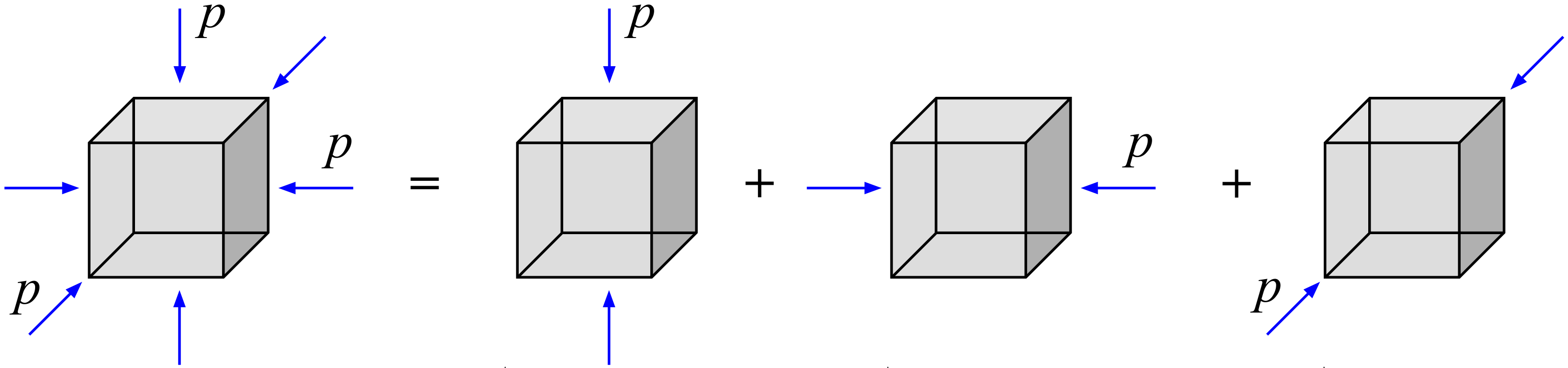
В отсутствии деформации $a_1 = a_2 = a_3 = a$

При малых деформациях

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta(a_1 a_2 a_3)}{a_1 a_2 a_3} = \frac{\Delta a_1}{a_1} + \frac{\Delta a_2}{a_2} + \frac{\Delta a_3}{a_3}$$

Идеально упругие тела

Деформация чистого сжатия



$$\frac{\Delta a_1}{a_1} = -\frac{p}{E} \qquad \frac{\Delta a_1}{a_1} = \sigma\frac{p}{E} \qquad \frac{\Delta a_1}{a_1} = \sigma\frac{p}{E}$$

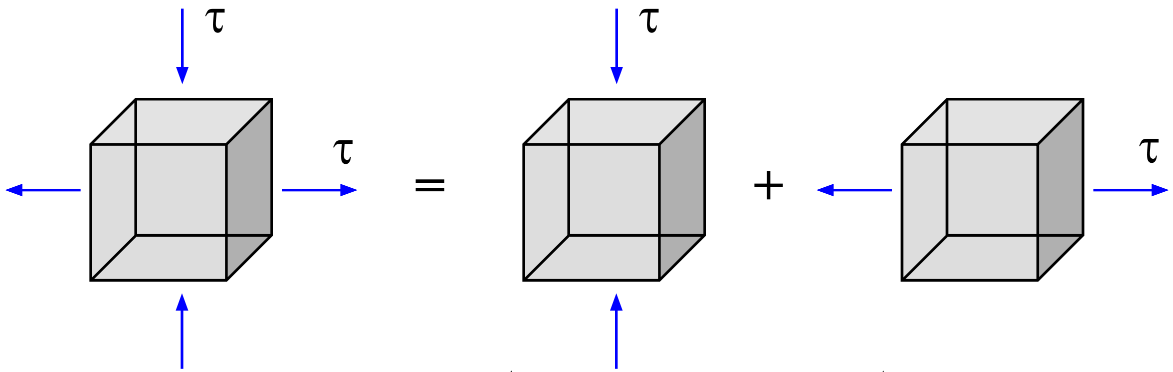
$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta a_1}{a_1} = \frac{\Delta a_2}{a_2} = \frac{\Delta a_3}{a_3} = -(1-2\sigma)\frac{p}{E} \qquad \frac{\Delta V}{V} = \frac{3\Delta a}{a} = -3(1-2\sigma)\frac{p}{E}$$

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{p}{K}$$

$K = \dfrac{E}{3(1-2\sigma)}$ *– модуль всестороннего сжатия*

Идеально упругие тела

Деформация чистого сдвига



$$\frac{\Delta a_1}{a_1} = -\frac{\tau}{E} \qquad \frac{\Delta a_1}{a_1} = -\sigma\frac{\tau}{E}$$

$$\frac{\Delta a_1}{a_1} = -(1+\sigma)\frac{\tau}{E}$$

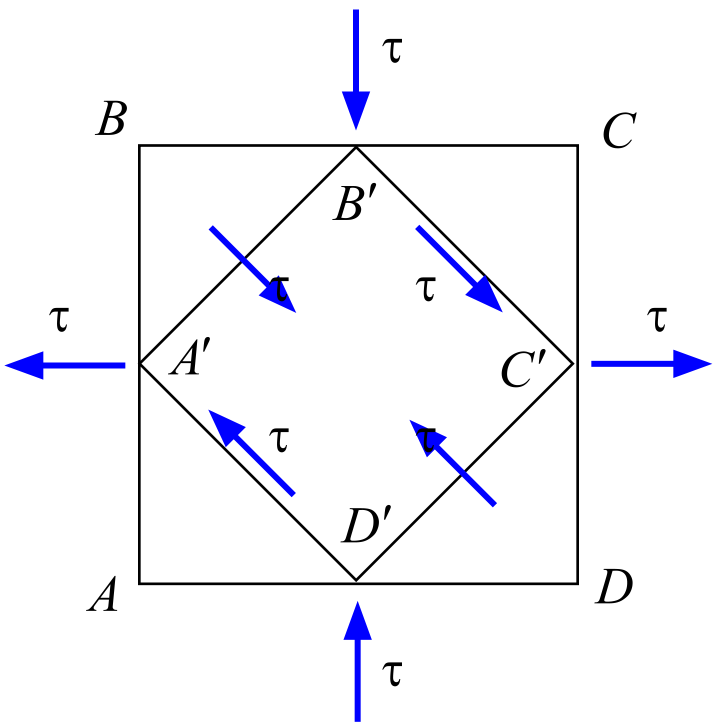
$$\frac{\Delta a_2}{a_2} = -\frac{\Delta a_1}{a_1}$$

$$\frac{\Delta a_3}{a_3} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{\Delta V}{V} = 0}$$

Идеально упругие тела

Деформация чистого сдвига



Из условия равновесия $A'BB'$ ⇒

На гранях вписанного кубика $A'B'C'D'$ действуют чисто касательные напряжения по величине равные напряжению на гранях внешнего кубика

$$\boldsymbol{\tau}_{A'B'} S_{A'B'} = \boldsymbol{\tau}_{BB'} S_{BB'} + \boldsymbol{\tau}_{A'B} S_{A'B} \quad \Rightarrow$$

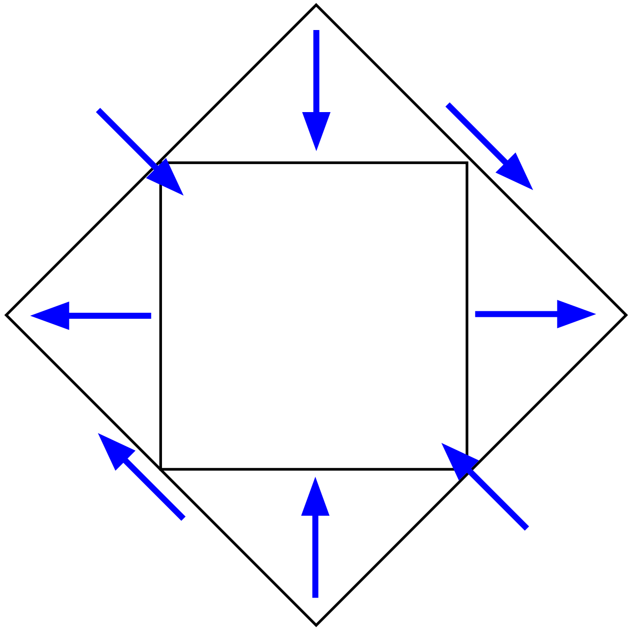
$$\begin{cases} \tau_{A'B'} = \tau \\ \boldsymbol{\tau}_{A'B'} \parallel A'B' \end{cases}$$

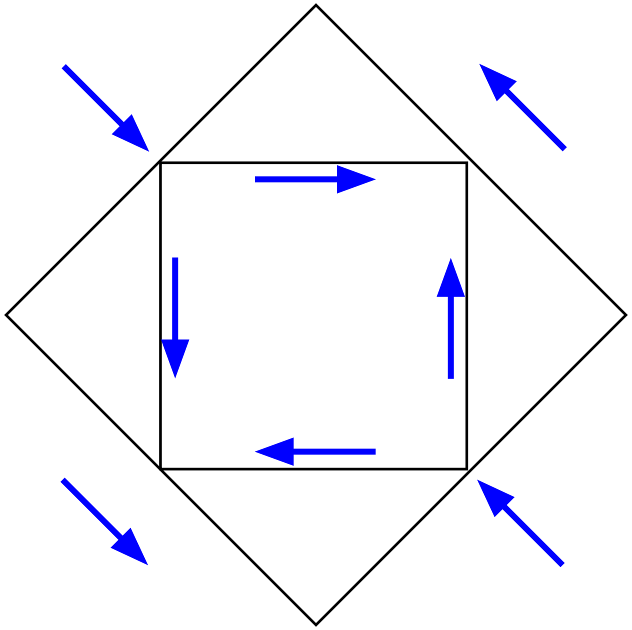
Идеально упругие тела

Деформация чистого сдвига

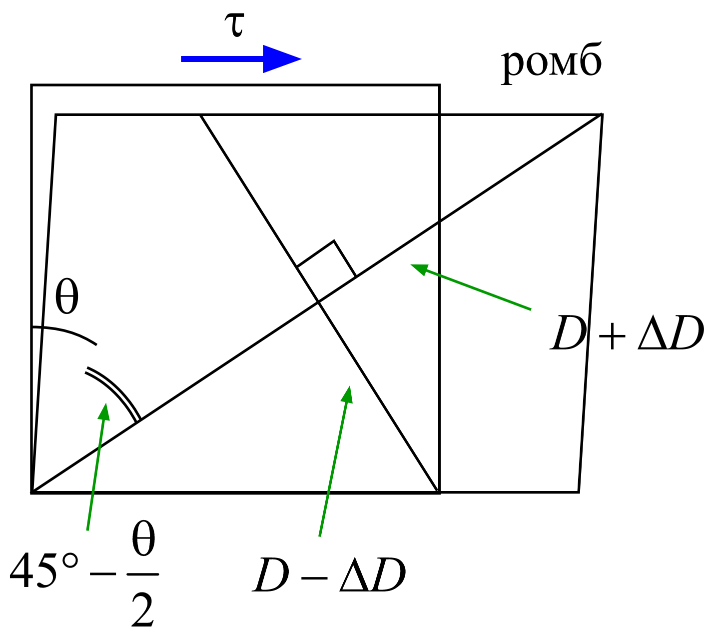
Переход от деформации чистого сдвига к деформации сжатие–растяжение

Чистый сдвиг ⟺ Сжатие–растяжение





Идеально упругие тела



D – диагональ квадрата

$$\frac{\Delta D}{D} = (1+\sigma)\frac{\tau}{E}$$

Из рисунка ⇒

$$\mathrm{tg}\left(45^\circ - \frac{\theta}{2}\right) = \frac{D-\Delta D}{D+\Delta D} = \frac{1-\Delta D/D}{1+\Delta D/D}$$

⇒ $\left(\theta \ll 1\right)$ $\quad \theta = 2\dfrac{\Delta D}{D} = \dfrac{2(1+\sigma)}{E}\tau$ ⇒

$$\tau = G\theta$$

$$G = \frac{E}{2(1+\sigma)}$$ – *модуль сдвига*