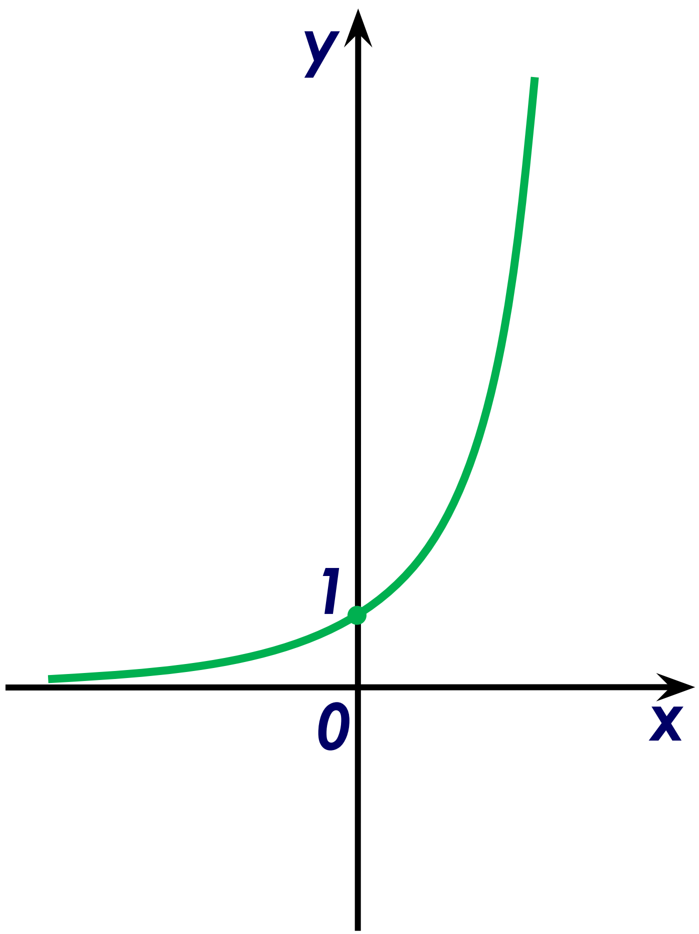
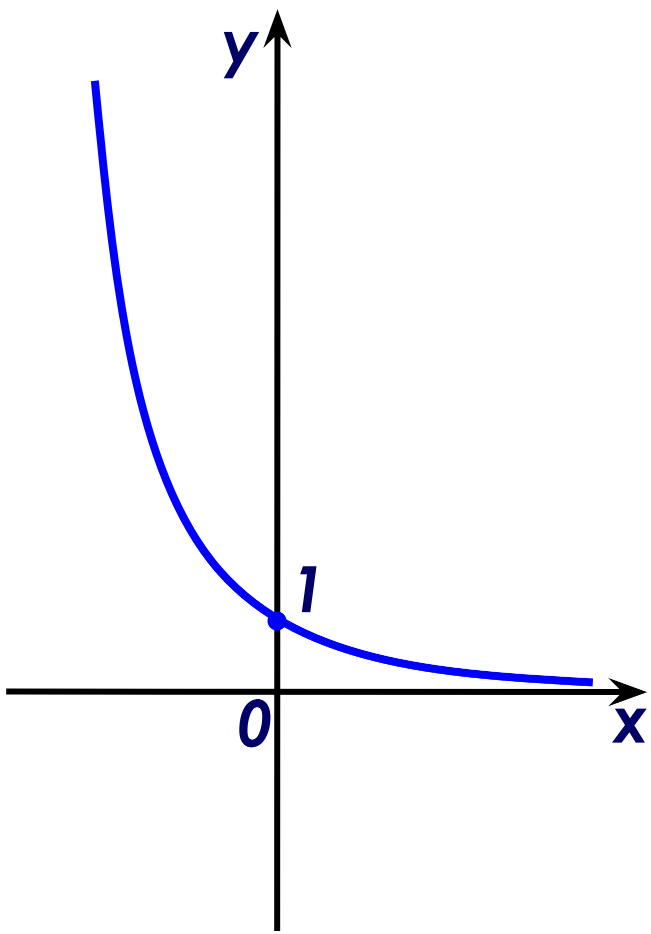
График показательной функции

$y = a^x,\ a \neq 1,\ a > 0$

$y = a^x,\ a > 1$



$y = a^x,\ 0 < a < 1$



Показательные уравнения

Уравнения вида $a^{f(x)} = a^{h(x)}$, где $a \neq 1$, $a > 0$ называют показательными уравнениями

$$\boxed{a^{f(x)} = a^{h(x)}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{f(x) = h(x)}$$

Методы решения показательных уравнений:

1. *Функционально-графический метод.*
2. *Метод уравнивания показателей.*
3. *Метод введения новой переменной.*

Показательные уравнения. Примеры

Пример 1

$$2^{2x-4}=64$$

$$2^{2x-4}=2^{6}$$

$$2x-4=6$$

$$x=5$$

$Ответ:\ 5$

Пример 2

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3,5}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3,5}=\left(\frac{1}{3}\right)^{0,5}$$

$$2x-3,5=0,5$$

$$x=2$$

$Ответ:\ 2$

Пример 3

$$5^{x^2-3x}=5^{3x-8}$$

$$x^2-3x=3x-8$$

$$x^2-6x+8=0$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1=2, \\ x_2=4 \end{array}\right.$$

$Ответ:\ 2;\ 4$

Показательные уравнения. Примеры

Пример 4

$$4^x + 2^{x+1} - 24 = 0$$

$$\left(2^2\right)^x + 2 \cdot 2^x - 24 = 0$$

$$\left(2^x\right)^2 + 2 \cdot 2^x - 24 = 0$$

Пусть $2^x = t$, *где* $t > 0$ *тогда*

$$t^2 + 2t - 24 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = -6, \\ t_2 = 4 \end{array}\right.$$

$t_1 = -6$ *не уд – ет условию* $t > 0$

Вернемся к исходной переменной

$$2^x = 4$$

$$x = 2$$

Ответ : 2

Показательные уравнения. Примеры

Пример 9. *Решить уравнение* $2\cdot 3^{x+1}-6\cdot 3^{x-1}-3^{x}=9$

Решение

$2\cdot 3^{x+1}-6\cdot 3^{x-1}-3^{x}=9 \;\Leftrightarrow\; 3^{x-1}\cdot\left(2\cdot 3^{2}-6-3^{1}\right)=9 \;\Leftrightarrow\; 3^{x-1}\cdot 9=9 \;\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\; 3^{x-1}=1 \;\Leftrightarrow\; 3^{x-1}=3^{0} \;\Leftrightarrow\; x=1.$

Ответ: $\{1\}$.

Пример 10. *Решить уравнение* $4^{x-1}+4^{x-\frac{1}{2}}+2^{2x-3}=14$

Решение

$4^{x-1}+4^{x-\frac{1}{2}}+2^{2x-3}=14 \;\Leftrightarrow\; 4^{x-1}+4^{x-\frac{1}{2}}+4^{x-\frac{3}{2}}=14 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4^{x-\frac{3}{2}}\cdot\left(4^{\frac{1}{2}}+4^{1}+1\right)=14 \Leftrightarrow 4^{x-\frac{3}{2}}\cdot 7=14 \Leftrightarrow 2^{2x-3}=2 \Leftrightarrow 2x-3=1 \Leftrightarrow x=2.$

Ответ: $\{2\}$.

Показательные уравнения. Примеры

Пример 5 (однородное уравнение)

$$5^{2x+1} - 13 \cdot 15^x + 54 \cdot 9^{x-1} = 0$$

$$5 \cdot 5^{2x} - 13 \cdot 15^x + 54 \cdot \frac{9^x}{9} = 0$$

$$5 \cdot 5^{2x} - 13 \cdot 15^x + 6 \cdot 9^x = 0$$

Разделим на 9^x, *тогда*

$$\frac{5 \cdot 5^{2x}}{9^x} - \frac{13 \cdot 15^x}{9^x} + \frac{6 \cdot 9^x}{9^x} = 0$$

$$5 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{2x} - 13 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^x + 6 = 0$$

Пусть $\left(\frac{5}{3}\right)^x = t$, *где* $t > 0$, *тогда*

$$5t^2 - 13t + 6 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = \frac{3}{5}, \\ t_2 = 2 \end{array}\right.$$

Вернемся к исходной переменной

$\left(\frac{5}{3}\right)^x = \frac{3}{5}$ *или* $\left(\frac{5}{3}\right)^x = 2$

$x = -1$ $\quad$ $x = \log_{\frac{5}{3}} 2$

Ответ : $-1;\ \log_{\frac{5}{3}} 2.$

чисел.

Вернёмся к функции $y = 2^x$, построим её график. Для этого составим таблицу значений функции $y = 2^x$:

x	0	1	-1	2	-2	3	-3
y	1	2	$\frac{1}{2}$	4	$\frac{1}{4}$	8	$\frac{1}{8}$

Отметим точки (0; 1), (1; 2), $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$, (2; 4), $\left(-2; \frac{1}{4}\right)$, (3; 8), $\left(-3; \frac{1}{8}\right)$ на координатной плоскости (рис. 41), они намечают некоторую линию, проведём её — это график функции $y = 2^x$ (рис. 42).

Свойства функции $y = 2^x$:

1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$;
2) не является ни чётной, ни нечётной;
3) возрастает;
4) не ограничена сверху, ограничена снизу;
5) не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений;
6) непрерывна;
7) $E(f) = (0; +\infty)$;
8) выпукла вниз.

Строгие доказательства перечисленных свойств функции $y = 2^x$ приводят в курсе высшей математики. Часть этих свойств мы в той или иной мере обсудили ранее, часть из них наглядно демонстрирует построенный график (см. рис. 42). Например, отсутствие чётности или нечётности функции геометрически связано с отсутствием симметрии графика соответственно относительно оси y или относительно начала координат.

Покажем для примера, как можно доказать возрастание функции $y = 2^x$ при $x > 0$. Пусть $0 < x_1 < x_2$. Если оба числа — рациональные, то выше мы уже доказали, что в этом случае выполняется неравенство $2^{x_1} < 2^{x_2}$. Пусть x_1 — рациональное, а x_2 — иррациональное число: $x_2 = \alpha$. Рассмотрим последовательность

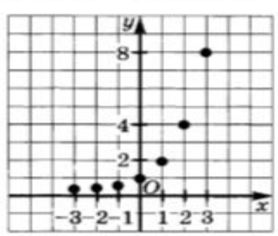


Рис. 41

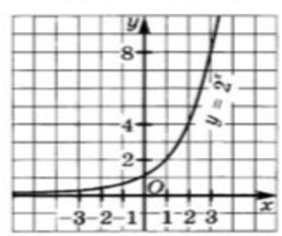


Рис. 42

Рис. 43

Рассмотрим теперь функцию $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, составим для неё таблицу значений:

x	0	−1	1	−2	2	−3	3
y	1	2	$\frac{1}{2}$	4	$\frac{1}{4}$	8	$\frac{1}{8}$

Отметим точки (0; 1), (−1; 2), $\left(1; \frac{1}{2}\right)$, (−2; 4), $\left(2; \frac{1}{4}\right)$, (−3; 8), $\left(3; \frac{1}{8}\right)$ на координатной плоскости (рис. 44). Они намечают некоторую линию, проведём её — это график функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ (рис. 45).

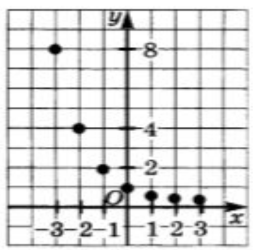


Рис. 44

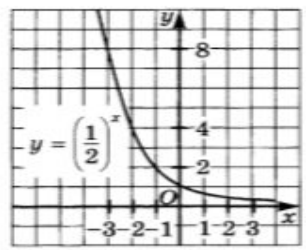


Рис. 45

Свойства функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$:

1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$;
2) не является ни чётной, ни нечётной;
3) убывает;
4) не ограничена сверху, ограничена снизу;
5) не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений;
6) непрерывна;
7) $E(f) = (0; +\infty)$;
8) выпукла вниз.

Точно такими же свойствами обладает любая функция вида $y = a^x$, где $0 < a < 1$. На рис. 46 в одной системе координат построены графики функций $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ и $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

Показательные неравенства

Неравенства вида $a^{f(x)} > a^{h(x)}$, где $a \neq 1$, $a > 0$ называют **показательными неравенствами**

$$a^{f(x)} > a^{g(x)}$$

$a > 1$ $\quad\Rightarrow\quad$ $f(x) > g(x)$

$0 < a < 1$ $\quad\Rightarrow\quad$ $f(x) < g(x)$

или

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow (a-1)(f(x)-g(x)) > 0$$

Показательные неравенства. Примеры

Пример 1

$$2^{2x-4} > 64$$

$$2^{2x-4} > 2^{6}$$

$$т.к.\ функция\ \ y = 2^{t}\ \ монотонно$$

$$возрастает\ на\ R,\ то$$

$$2x - 4 > 6$$

$$x > 5$$

$$Ответ:\ \left(5; +\infty\right)$$

Пример 2

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3,5} < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3,5} < \left(\frac{1}{3}\right)^{0,5}$$

$$т.к.\ функция\ \ y = \left(\frac{1}{3}\right)^{t}$$

$$монотонно\ \ убывает\ на\ R,\ то$$

$$2x - 3,5 > 0,5$$

$$x > 2$$

$$Ответ:\ \left(2; +\infty\right)$$

Показательные неравенства. Примеры

Пример 4

$$8^x + 18^x > 2 \cdot 27^x$$

$$2^{3x} + 2^x \cdot 3^{2x} > 2 \cdot 3^{3x} \quad \Big| : \left(3^{3x}\right), \ т.к. \ 3^{3x} > 0$$

$$\frac{2^{3x}}{3^{3x}} + \frac{2^x \cdot 3^{2x}}{3^{3x}} > \frac{2 \cdot 3^{3x}}{3^{3x}}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{3x} + \left(\frac{2}{3}\right)^x > 2$$

$$Пусть \quad \left(\frac{2}{3}\right)^x = t, \ где \ t > 0$$

$$t^3 + t - 2 > 0$$

$$t^3 + t - 2 = t^3 + t - 1 - 1 = t^3 - 1 + t - 1 = (t-1)\left(t^2 + t + 2\right)$$

$$т.к. \ t^2 + t + 2 > 0 \ для \ любых \ t, \ то \ t - 1 > 0$$

$$t > 1$$

Показательные неравенства. Примеры

Пример 4

Вернемся к исходной переменной :

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x > 1$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x > \left(\frac{2}{3}\right)^0,$$

т .к. $a = \frac{2}{3} < 1$, то ф – ция $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ убывает на R

$$x < 0$$

Ответ : $(-\infty;\ 0)$.

§ 13. Показательные неравенства

Решите неравенство:

13.1. а) $2^x \geqslant 4$; б) $2^x < \frac{1}{2}$; в) $2^x \leqslant 8$; г) $2^x > \frac{1}{16}$.

13.2. а) $3^x \leqslant 81$; в) $5^x > 125$;

б) $\left(\frac{1}{3}\right)^x > \frac{1}{27}$; г) $(0,2)^x \leqslant 0,04$.

13.3. а) $3^{2x-4} \leqslant 27$; в) $5^{4x+2} \geqslant 125$;

б) $\left(\frac{2}{3}\right)^{3x+6} > \frac{4}{9}$; г) $(0,1)^{5x-9} < 0,001$.

13.4. а) $7^{2x-9} > 7^{3x-6}$; в) $9^{x-1} \geqslant 9^{-2x+8}$;

б) $0,5^{4x+3} \geqslant 0,5^{6x-1}$; г) $\left(\frac{7}{11}\right)^{-3x-0,5} < \left(\frac{7}{11}\right)^{x+1,5}$

○13.5. а) $4^{5x-1} > 16^{3x+2}$; в) $11^{-7x+1} \leqslant 121^{-2x-10}$;

б) $\left(\frac{1}{7}\right)^{-3x+1} \geqslant \left(\frac{1}{49}\right)^{x+3}$; г) $0,09^{5x-1} < 0,3^{x+7}$.

○13.6. а) $2^{3x+6} \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}$; в) $25^{-x+3} \geqslant \left(\frac{1}{5}\right)^{3x-1}$;

б) $\left(\frac{7}{12}\right)^{-2x+3} > \left(\frac{12}{7}\right)^{3+2x}$; г) $\left(\frac{5}{3}\right)^{2x-8} < \left(\frac{9}{25}\right)^{-x+3}$.