Решение простейших тригонометрических неравенств

Все сложные тригонометрические неравенства решаются

Все простейшие тригонометрические неравенства решаются одним и тем же способом:

простейшие тригонометрические неравенства.

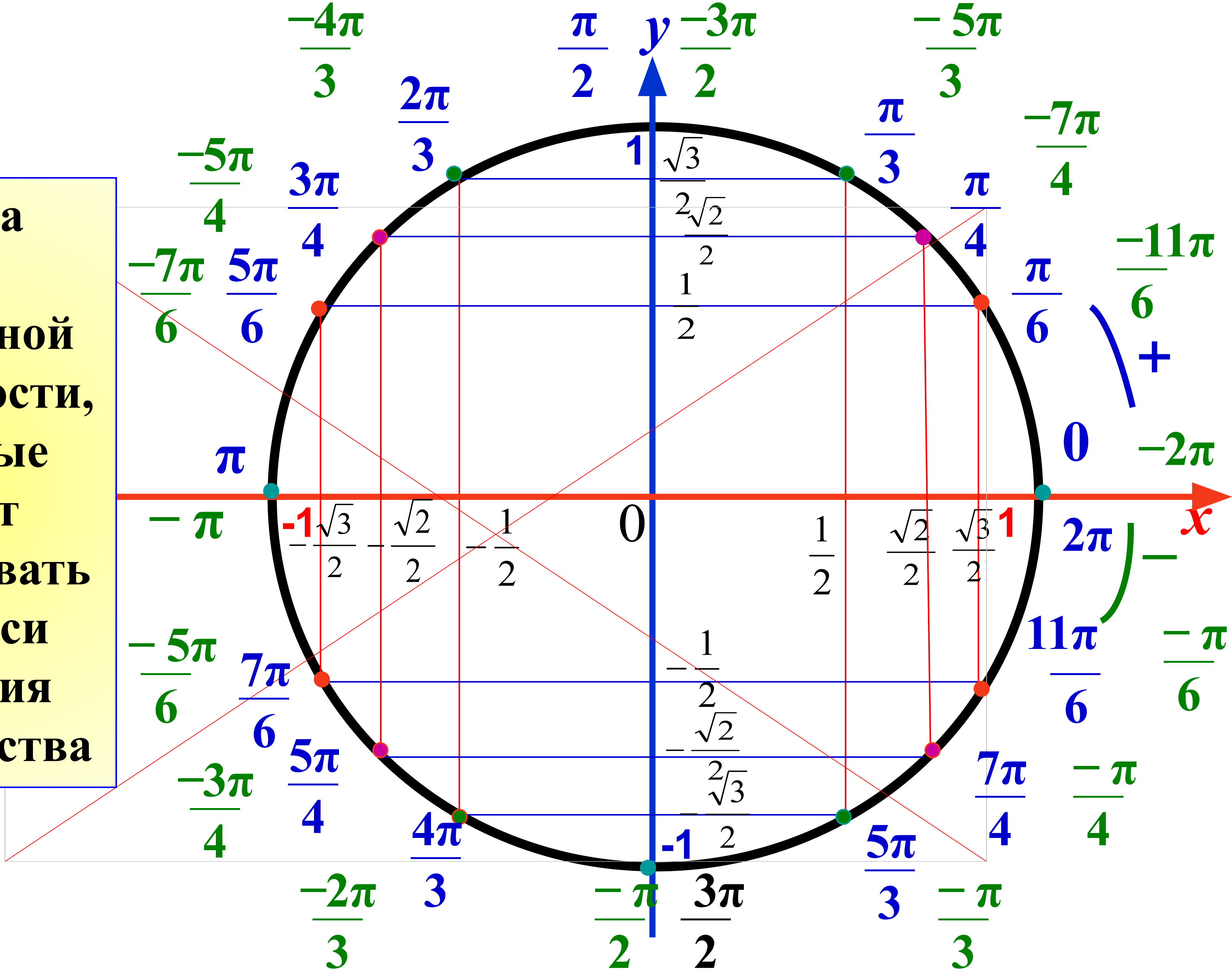
1. Выделяем на единичной окружности дугу, координаты точек которой удовлетворяют нашему неравенству.

2. Определяем начальную точку движения по этой дуге, исходя из того, что мы «умеем» двигаться только в положительном направлении, то есть против часовой стрелки (от меньшего числа к большему)

3. Двигаясь по выделенной дуге в положительном направлении, определяем конечную точку движения.

4. После того, как мы определили начальную и конечную точку движения по дуге, записываем решение неравенства и ответ.

Числа
на
единичной
окружности,
которые
могут
участвовать
в записи
решения
неравенства



Алгоритм решения неравенства $\sin x < a$ или $\sin x > a$

Изобразить единичную окружность, отметить число $y = a$ ($\sin\alpha = y$)

Провести прямую $y = a$

Выделить дугу окружности, соответствующую знаку сравнения (обход - строго против часовой стрелки).

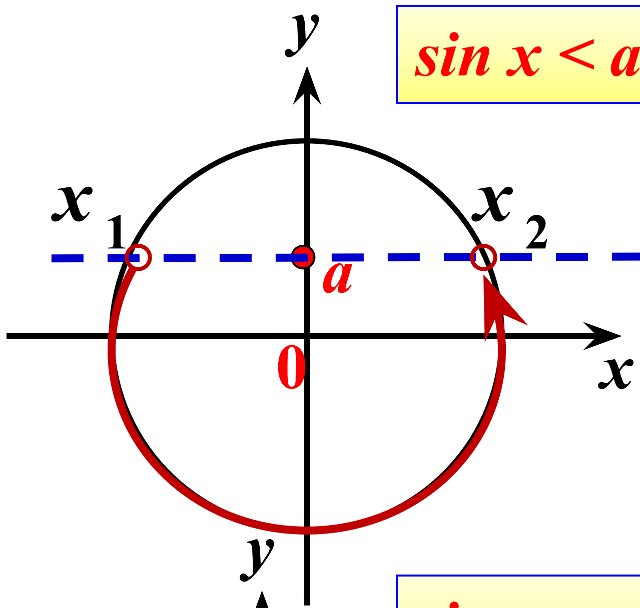
Записать числовые значения граничных точек дуги. Учитывая, что начало дуги – меньшее значение.

Записать решение неравенства

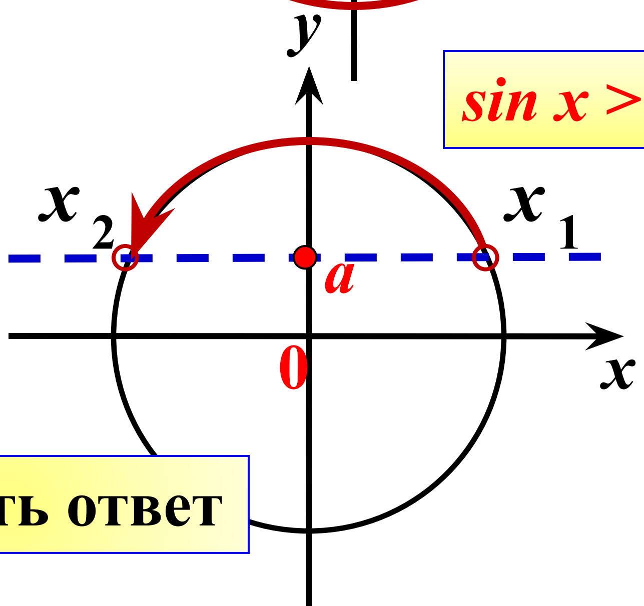
$x_1 + 2\pi n < x < x_2 + 2\pi n,\ n \in Z$

Записать ответ

$\sin x < a$



$\sin x > a$



1. На оси **Oy** отмечаем значение $\dfrac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}7$

и проводим прямую $y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$$\sin x \le \frac{\sqrt{2}}{2}$$

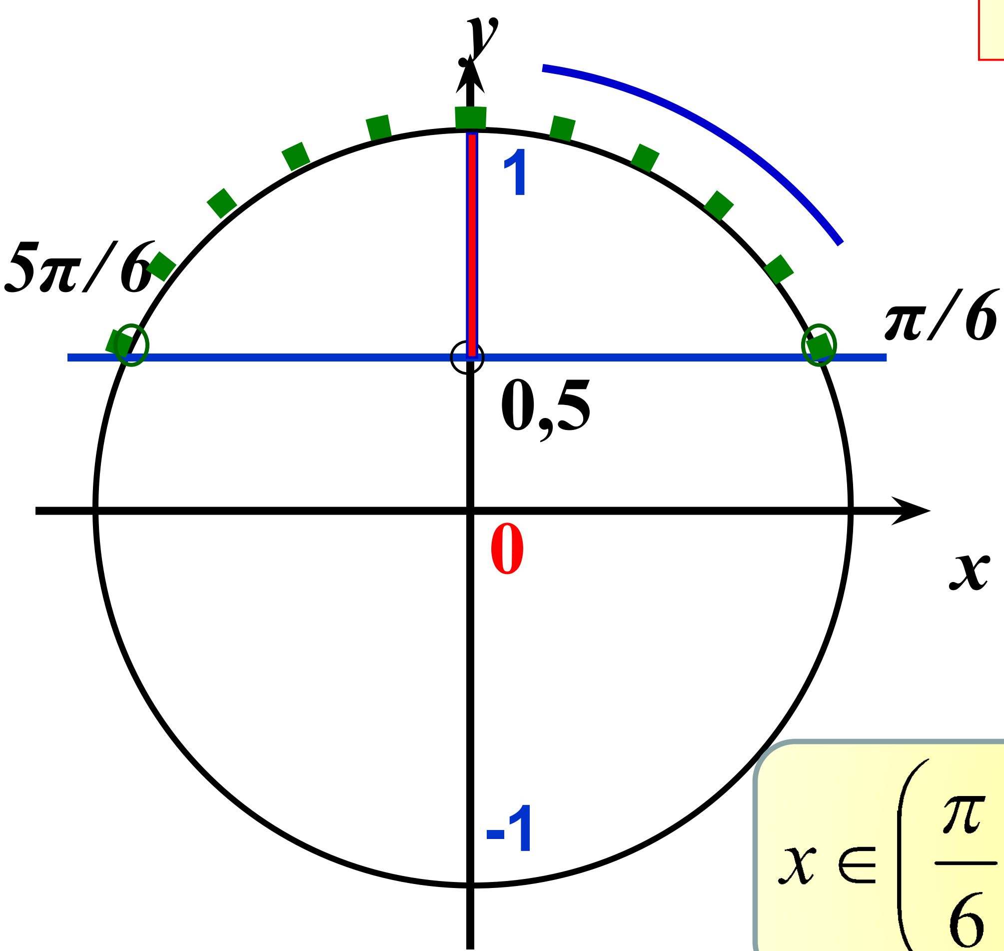
2. **Выделяем нижнюю часть окружности (обход - строго против часовой стрелки).**

3. **Подписываем полученные точки. Обязательно учитываем, что начало дуги – меньшее значение**

4. **Записываем решение:**

$$-\frac{5\pi}{4} + 2\pi k \le x \le \frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z$$

$\sin x > 0{,}5$



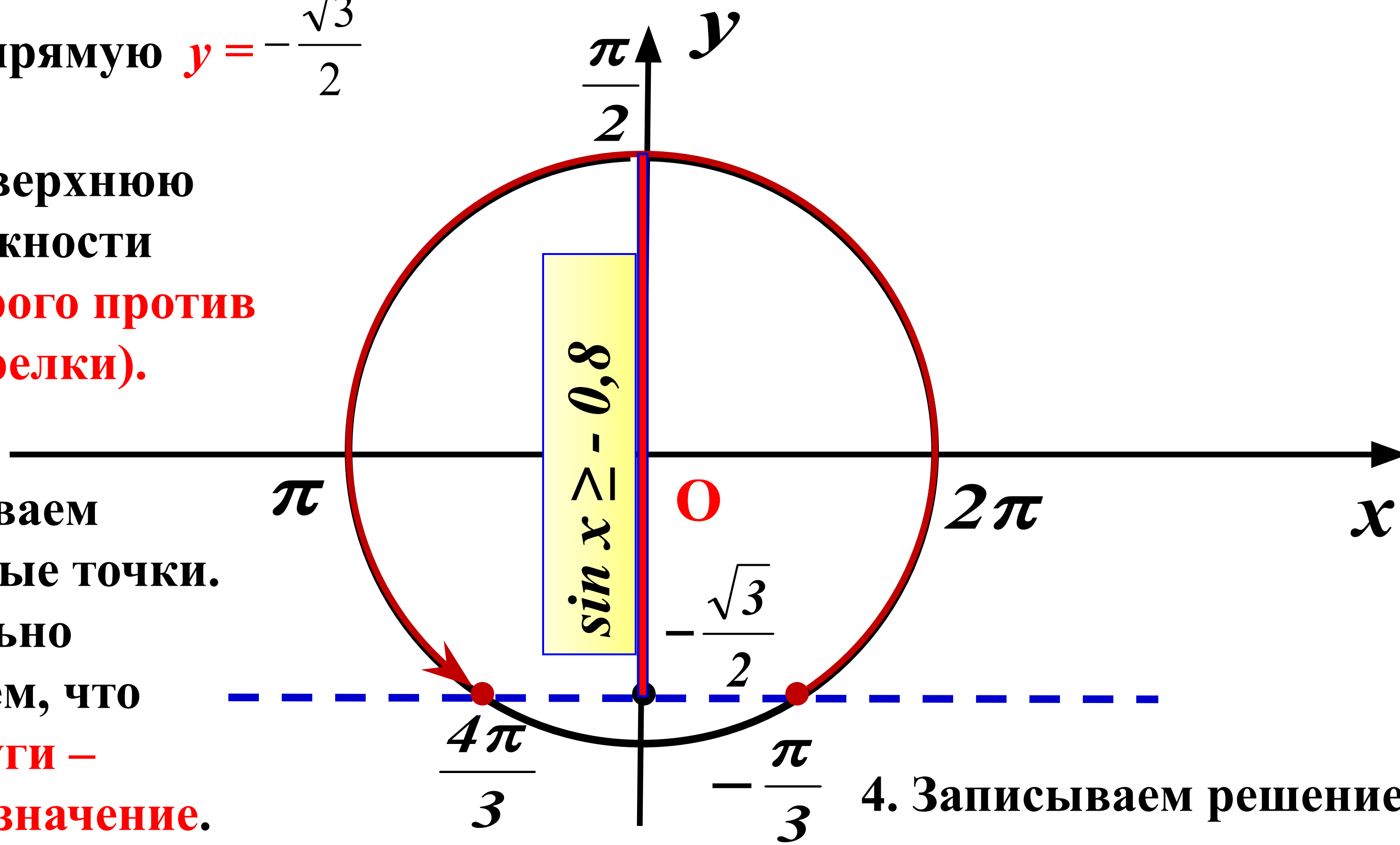
$$x \in \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \quad \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \right), \quad n \in Z$$

1. На **Oy** отмечаем значение $-\frac{\sqrt{3}}{2} \approx -0{,}8$

$$\sin x \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

и проводим прямую $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. Выделяем верхнюю часть окружности (обход - строго против часовой стрелки).



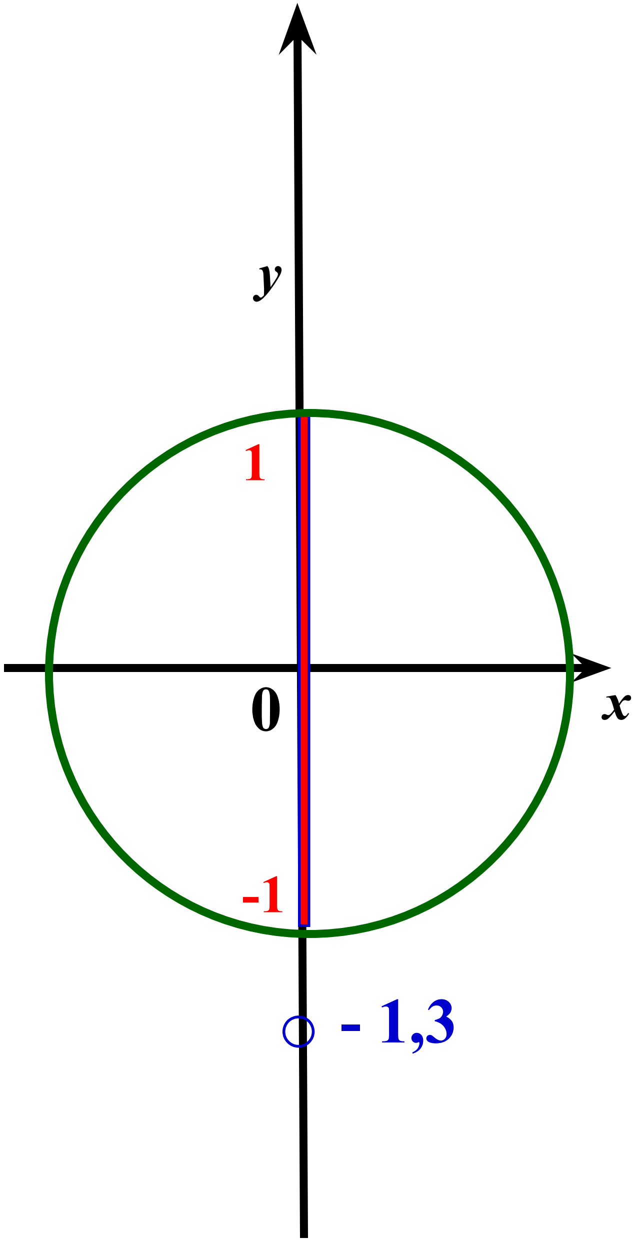
3. Подписываем полученные точки. Обязательно учитываем, что начало дуги – меньшее значение.

4. Записываем решение:

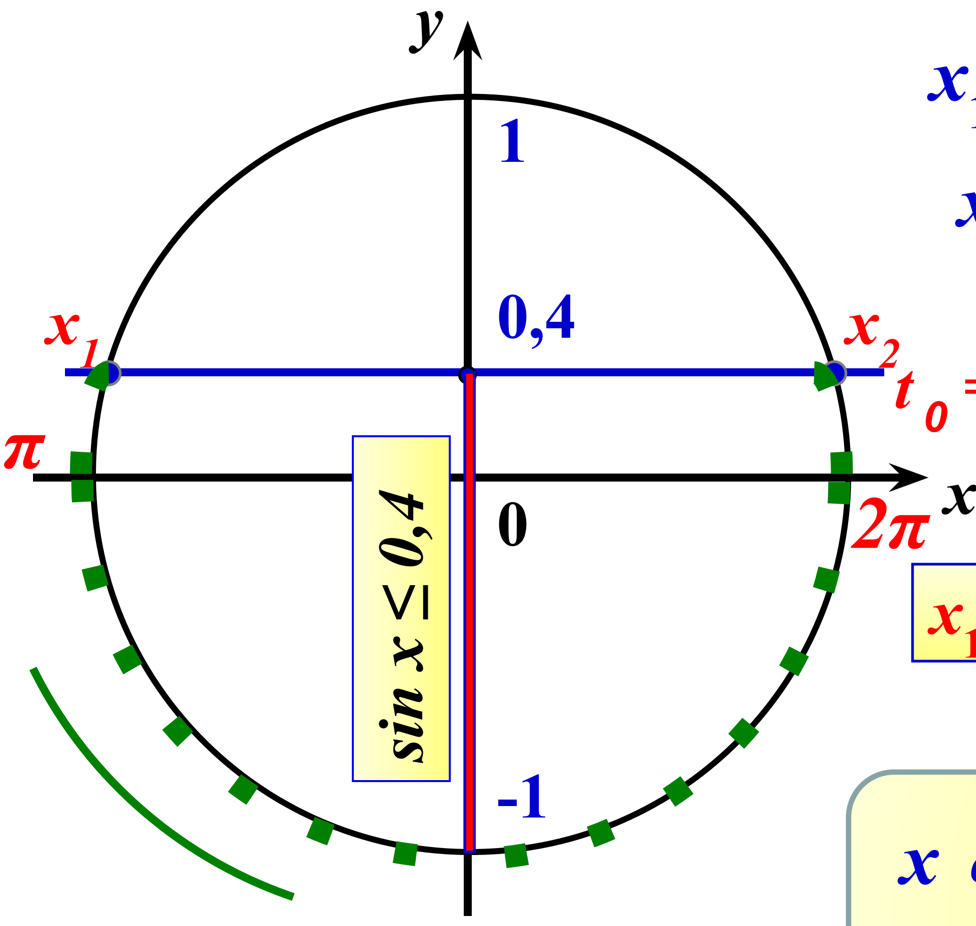
$$-\frac{\pi}{3} + 2\pi k \leq x \leq \frac{4\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$$

$\sin x > -1{,}3$

$x \in R$



$\sin x \leq 0{,}4$



$x_1 = \pi - \arcsin 0{,}4$

$x_2 = 2\pi + \arcsin 0{,}4$

$t_0 = \arcsin 0{,}4$

$x_1 + 2\pi k \leq x \leq x_2 + 2\pi k,\ k\epsilon Z$

$x \ \epsilon \ [\ \pi - \arcsin 0{,}4 + 2\pi k;$
$2\pi + \arcsin 0{,}4 + 2\pi k],\ k\epsilon Z$

Решим неравенство

$$5\sin(2\pi t+3\pi)>\frac{5}{2} \qquad \sin(2\pi t+3\pi)>\frac{1}{2}$$

Обозначим $2\pi t + 3\pi = x$ **получим** $\sin x>\frac{1}{2}$

$$x_0=\frac{\pi}{6}, \qquad x_1=-\frac{\pi}{6}+\pi=\frac{5\pi}{6},$$

$$\frac{\pi}{6}+2\pi k<x<\frac{5\pi}{6}+2\pi k, k\in Z$$

$$\frac{\pi}{6}+2\pi k<2\pi t+3\pi<\frac{5\pi}{6}+2\pi k, k\in Z$$

$$\frac{\pi}{6}-3\pi+2\pi k<2\pi t<\frac{5\pi}{6}-3\pi+2\pi k, k\in Z$$

$$-\frac{17\pi}{6}+2\pi k<2\pi t<-\frac{13\pi}{6}+2\pi k, k\in Z$$

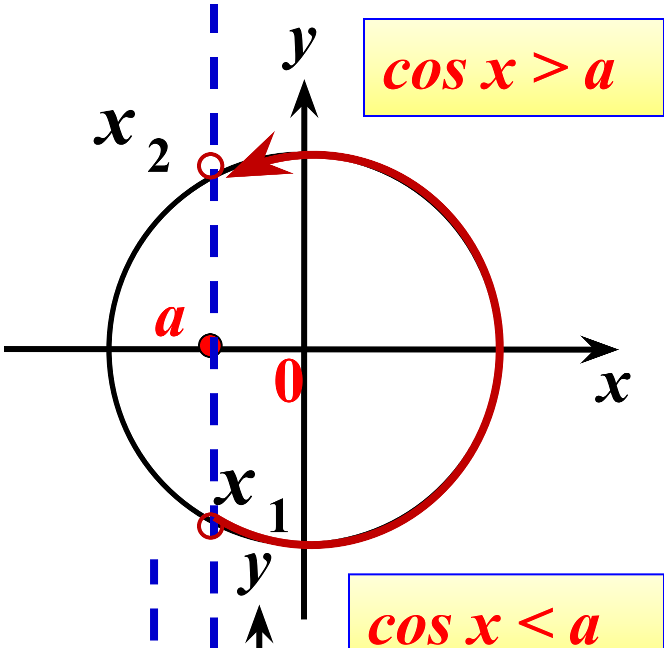
$$-\frac{17}{12}+k<t<-\frac{13}{6}+k, k\in Z \qquad t\in(-\frac{17}{12}+k; -\frac{13}{6}+k, k\in Z)$$

Алгоритм решения неравенства $\cos x > a$ или $\cos x < a$

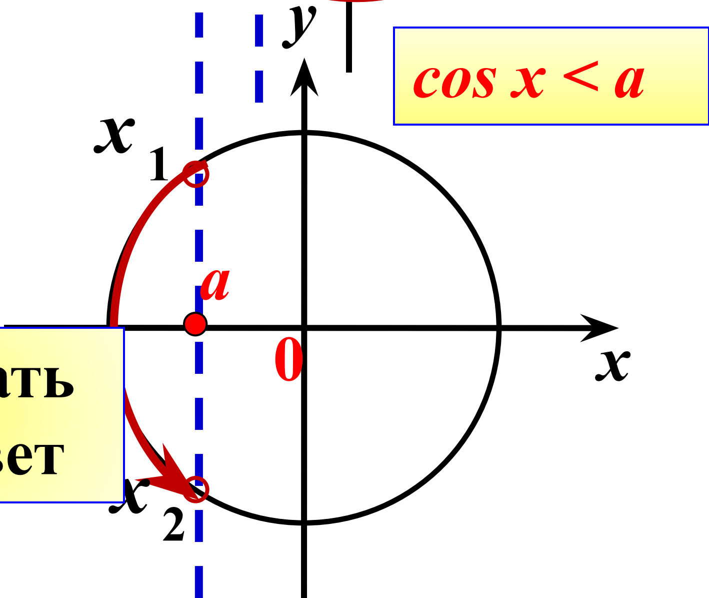
Изобразить единичную окружность, отметить число $x = a$ ($\cos\alpha = x$)

Провести прямую $x = a$

Выделить дугу окружности, соответствующую знаку сравнения (обход - строго против часовой стрелки).



Записать числовые значения граничных точек дуги. Учитывая, что начало дуги – меньшее значение.



Записать решение неравенства

Записать ответ

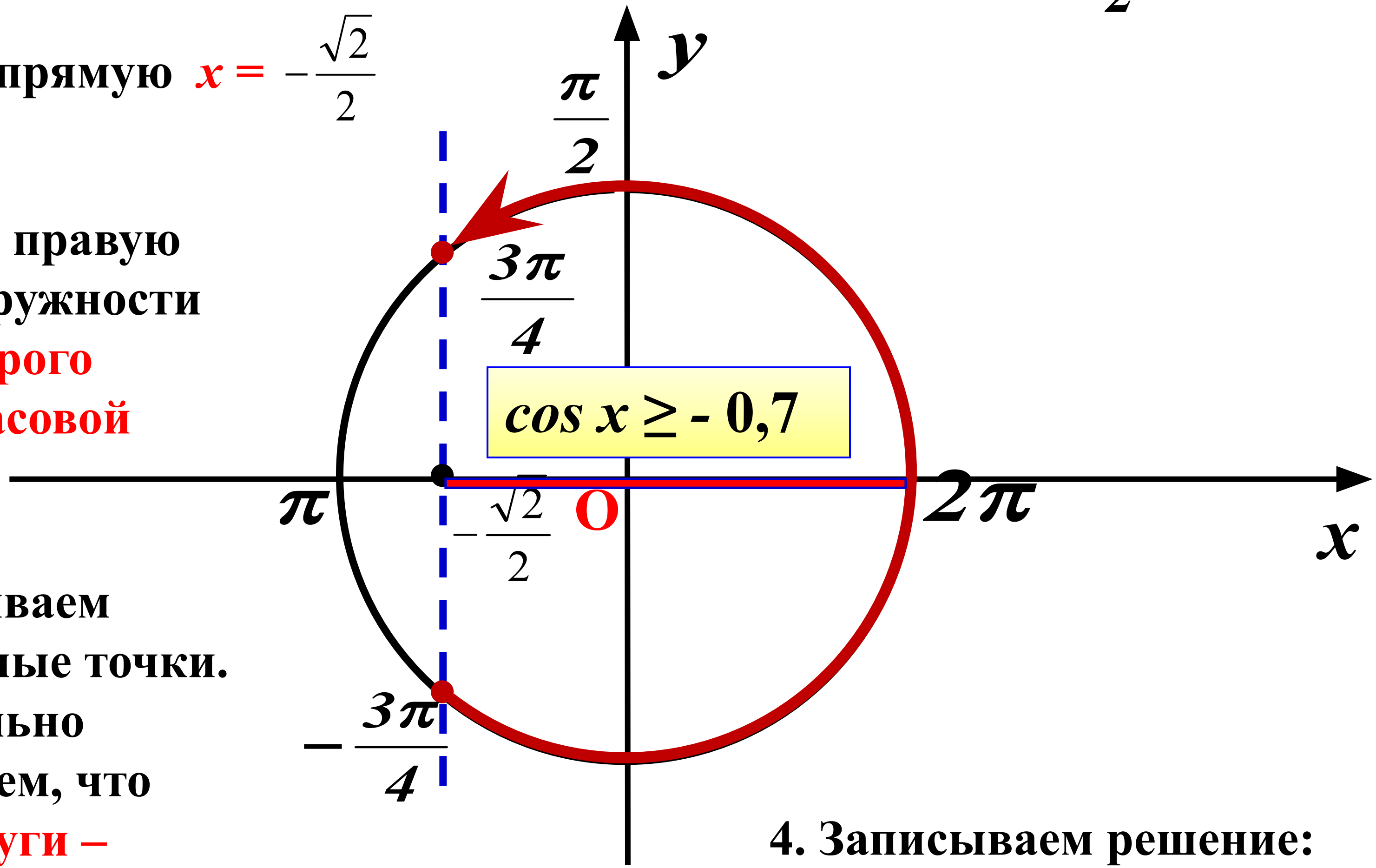
$x_1 + 2\pi n < x < x_2 + 2\pi n,\ n \in Z$

1. **На Ox отмечаем значение** $-\frac{\sqrt{2}}{2} \approx -0{,}7$

$$\cos x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

и проводим прямую $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

2. **Выделяем правую часть окружности (обход - строго против часовой стрелки).**



3. **Подписываем полученные точки. Обязательно учитываем, что начало дуги – меньшее значение.**

4. **Записываем решение:**

$$-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \leq x \leq \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z$$

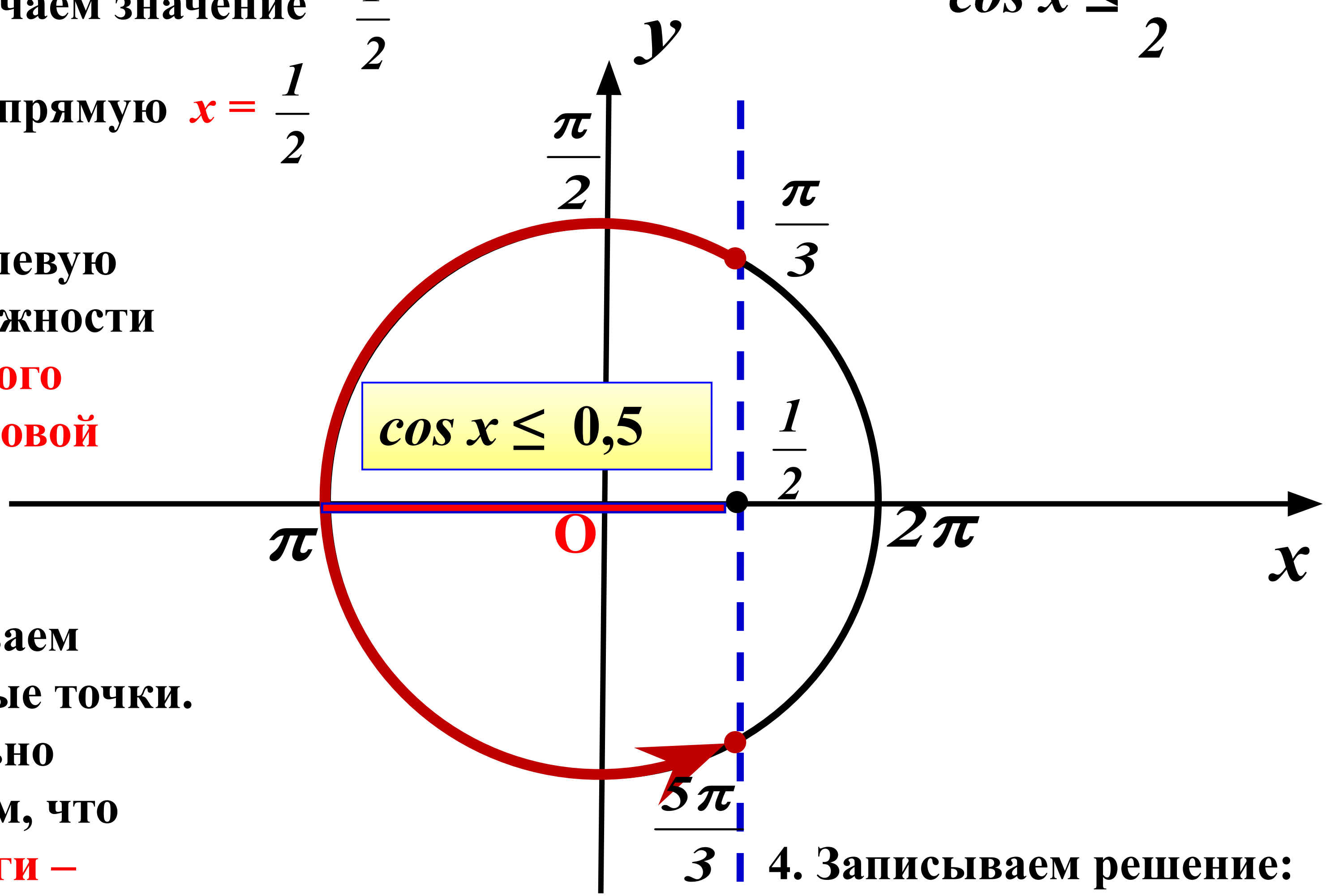
$\cos x \le \dfrac{1}{2}$

1. **На Ox отмечаем значение** $\dfrac{1}{2}$

и проводим прямую $x = \dfrac{1}{2}$

2. **Выделяем левую часть окружности (обход - строго против часовой стрелки).**

3. **Подписываем полученные точки. Обязательно учитываем, что начало дуги – меньшее значение.**

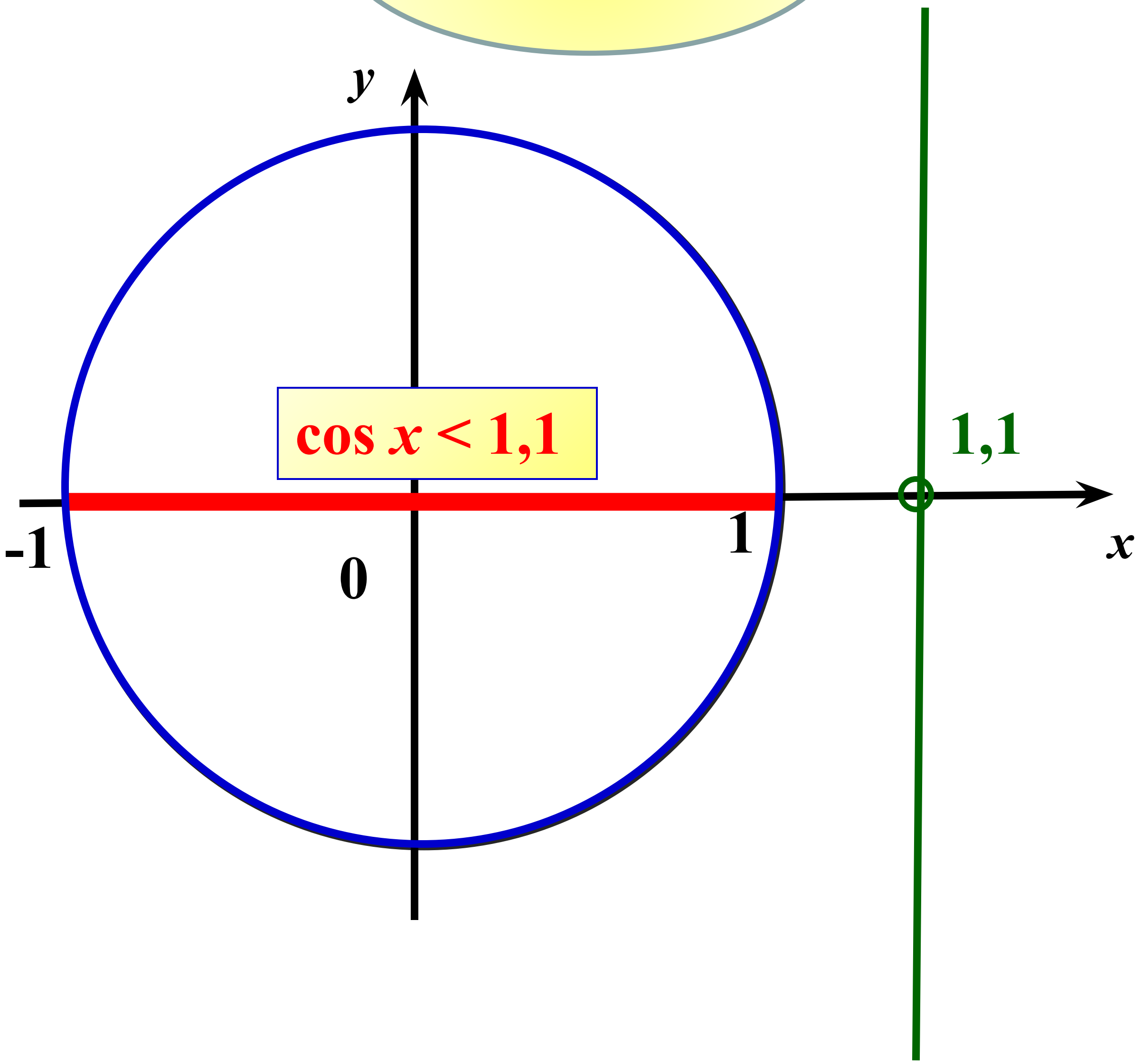


4. Записываем решение:

$$\frac{\pi}{3} + 2\pi k \le x \le \frac{5\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$$

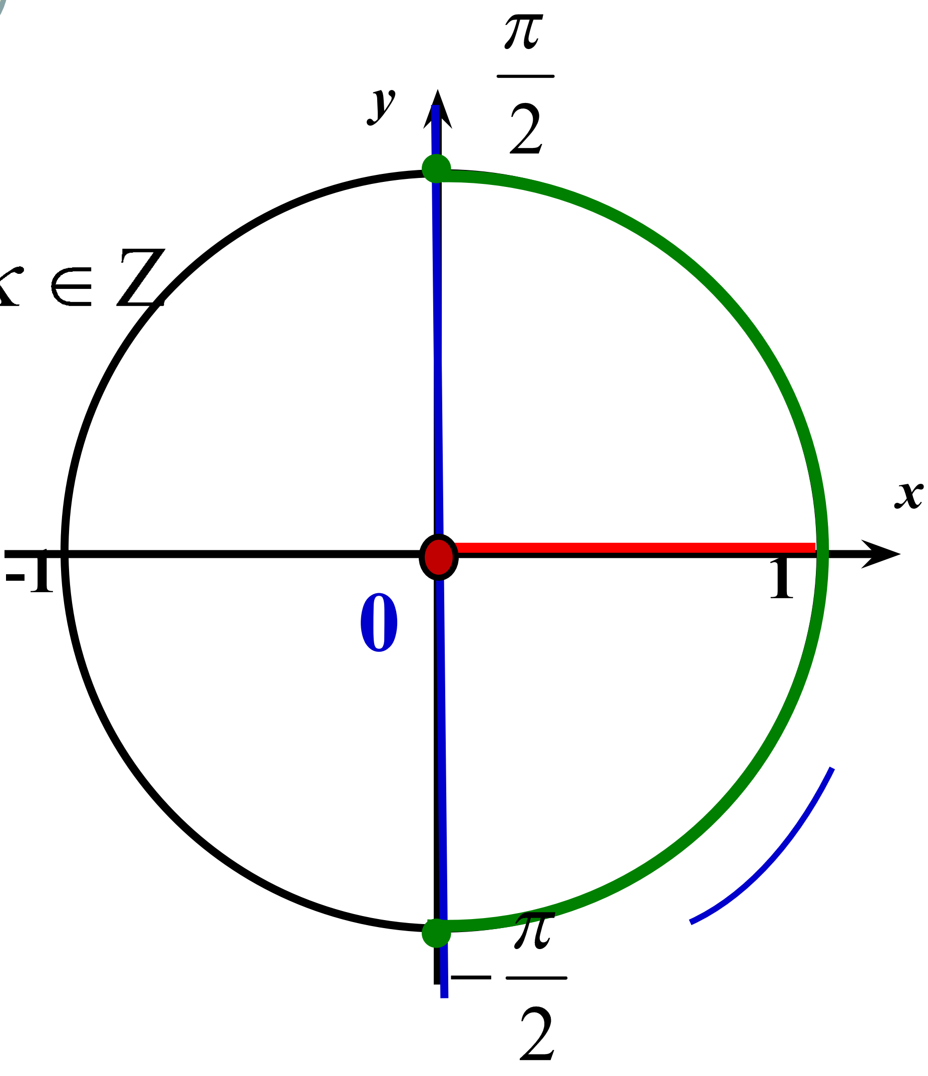
$\cos x < 1{,}1$

$x \in R$



$\cos x \geq 0$

$$-\frac{\pi}{2}+2\pi k \leq x \leq \frac{\pi}{2}+2\pi \kappa \,, \kappa \in Z$$



РЕШИ САМОСТОЯТЕЛЬНО:

$$1)\cos x \le \frac{1}{2};$$

$$2)\cos(x+\frac{\pi}{3}) \ge -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$3)\cos(2x-\frac{\pi}{4}) \le 0.$$

ПРОВЕРЬ СВОЙ ОТВЕТ:

$$1)\ \frac{\pi}{3}+2\pi n\le x\le\frac{5\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z;$$

$$2)\ -\frac{7\pi}{6}+2\pi n\le x\le\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z;$$

$$3)\ \frac{3\pi}{8}+\pi n\le x\le\frac{7\pi}{8}+\pi n,\ n\in Z.$$

Алгоритм решения неравенства $tg\,x \leq a$

И Показать точки, в которых не определён тангенс о тангенсов

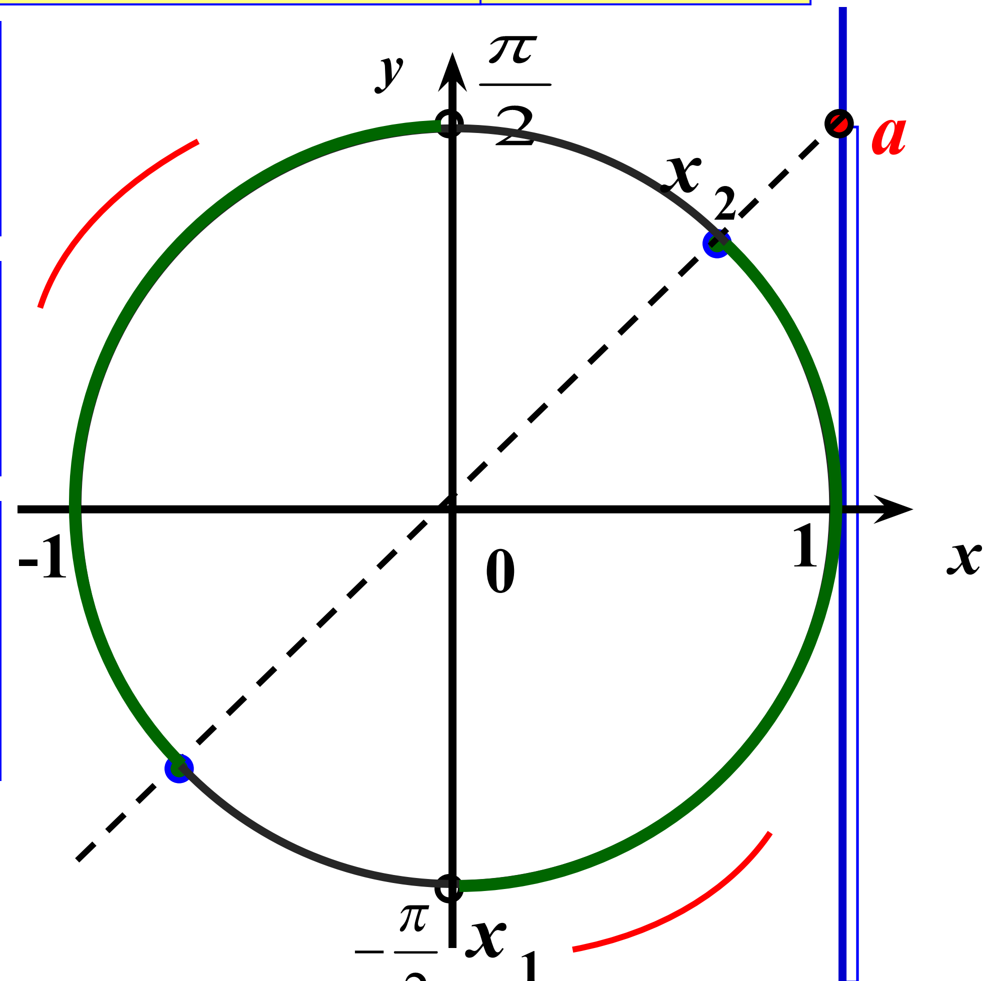
Выделить нижнюю часть линии тангенсов, поскольку решаем неравенство со знаком ≤

Выделить соответствующие дуги окружности (обход совершаем против часовой стрелки)

Подписать полученные точки на одной из дуг (вторая получается из неё: к концам +π). Учесть , что начало дуги – меньшее значение

Записать решение неравенства

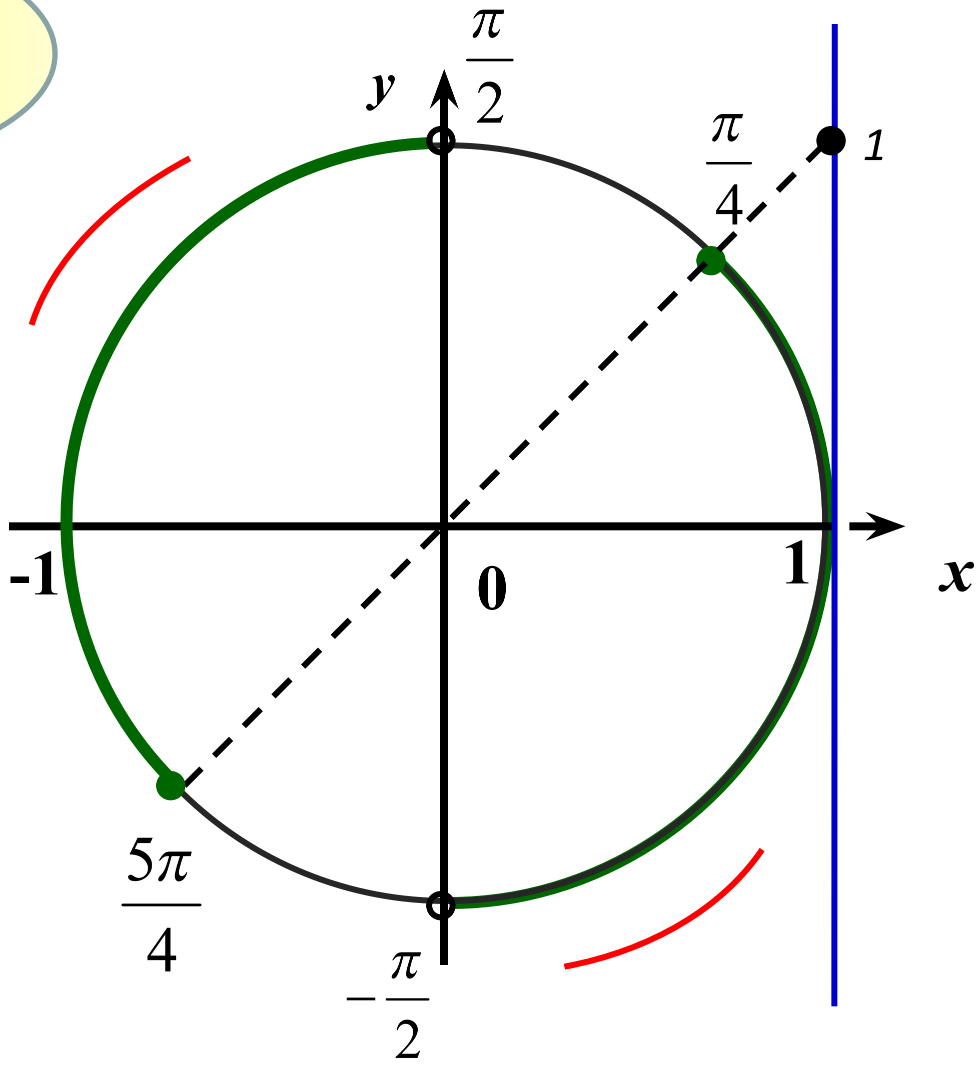
$$x_1 + \pi n < x \leq x_2 + \pi n,\ n \in Z$$



Записать ответ.

$\text{tg}\, x \le 1$

$$x \in (-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{4} + \pi k], k \in Z$$



$$tgx \le \sqrt{3}$$

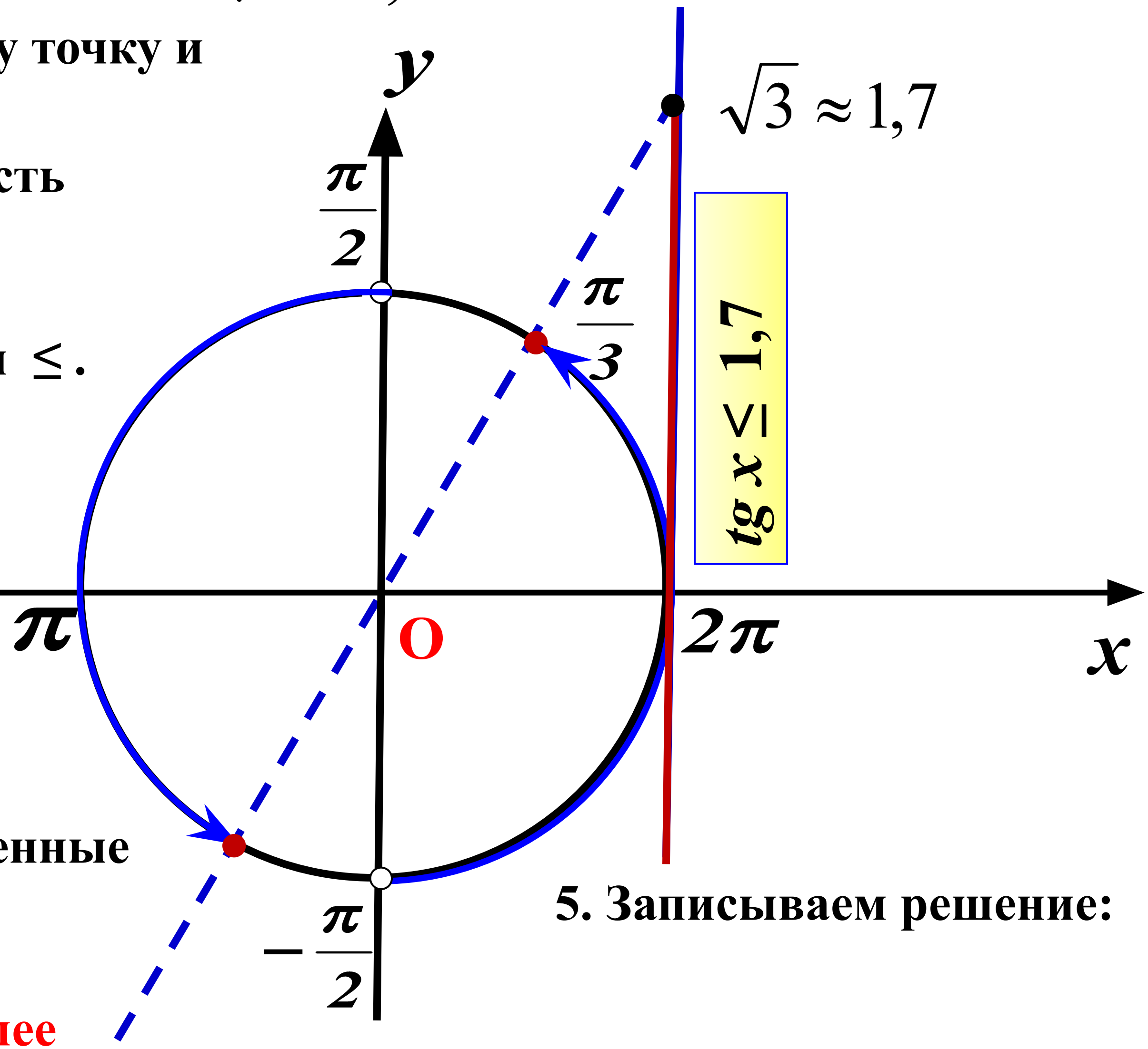
1. На линии тангенсов отмечаем $\sqrt{3} \approx 1{,}7$

проводим луч через эту точку и центр окружности

2. Выделяем нижнюю часть линии тангенсов, поскольку решаем неравенство со знаком $\le$.

3. Выделяем соответствующую часть окружности (обход совершаем против часовой стрелки).

4. Подписываем полученные точки. Обязательно учитываем, что начало дуги – меньшее значение



5. Записываем решение:

$$-\frac{\pi}{2} + \pi k < x \le \frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z$$

1. На линии тангенсов отмечаем значение **1**

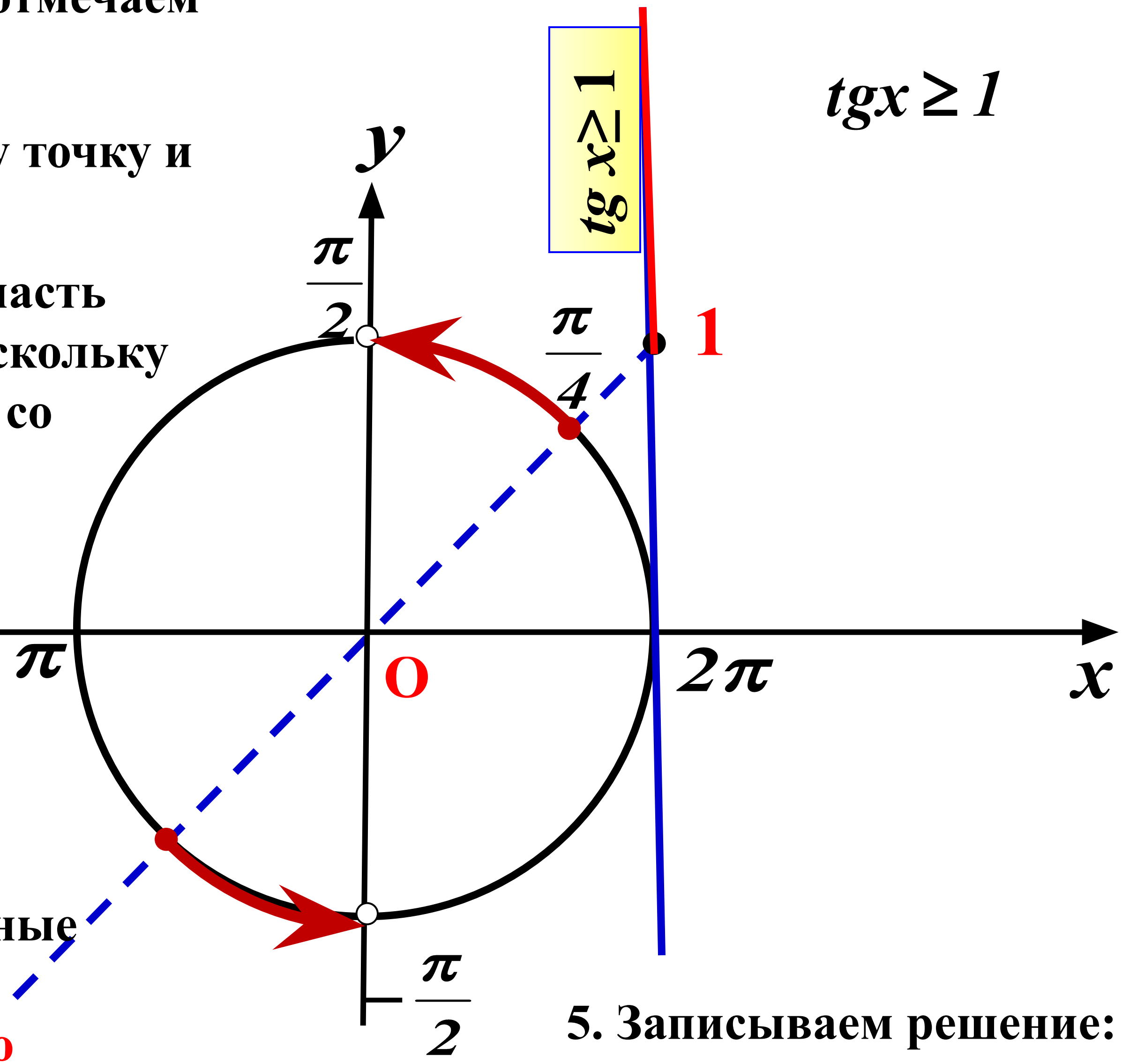
проводим луч через эту точку и центр окружности

2. Выделяем верхнюю часть линии тангенсов, поскольку решаем неравенство со знаком $\geq$.

3. Выделяем соответствующую часть окружности (обход - строго против часовой стрелки).

4. Подписываем полученные точки. Обязательно учитываем, что начало дуги – меньшее значение

$tgx \geq 1$



5. Записываем решение:

$$\frac{\pi}{4} + \pi k \leq x < \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$$