Финансовая математика –

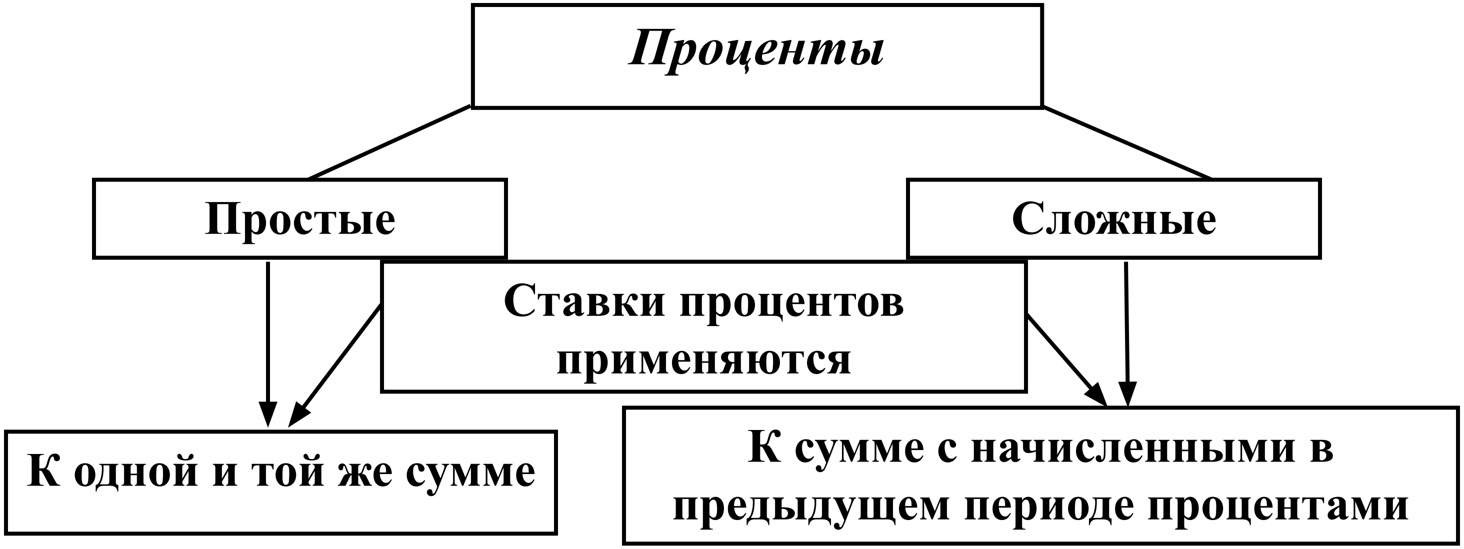
раздел количественного анализа финансовых операций, предметом которого является изучение зависимостей между параметрами финансовых операций и разработка методов решения финансовых задач

Количественные данные финансовых операций :

- Платежи или денежные суммы (единовременные, рассрочка)
- Время: фиксированные сроки платежей, интервалы поступления доходов, моменты погашения задолженности и т.д.)
- Процентная ставка

Основные задачи математических методов исследования финансовых операций

- Определение конечных финансовых результатов операции
- Разработка планов выполнения финансовых операции (планов погашения задолженностей)
- Установление зависимости конечных результатов от основных ее параметров
- Расчет параметров эквивалентного (безубыточного) изменения первоначальных условий операции



Простые проценты

P – первоначальная сумма денег

i_s – ставка простых процентов

S - наращенная сумма денег

$$P;\ P+Pi_s=P(1+i_s);\ P+P2i_s=P(1+2i_s);\ \ldots;\ P+Pni_s=P(1+ni_s)$$

$$\boxed{S=P(1+ni_s)}$$

Пример. Определить проценты и сумму накопленного долга, если ссуда равна 50000 руб., срок 2 года, проценты простые по ставке 15% годовых.

Если продолжительность ссуды менее года то

$$n = \frac{t}{k}$$

n - срок ссуды (в долях года)

t - срок операции (ссуды) в днях

k - число дней в году (временная база)

Задание 1. В банке взяли ссуду 200000 руб. 16.01.11. Какая сумма долга будет на момент 03.12.11., если проценты простые по ставке 0,17 и расчеты ведутся по схеме: а) 365/365, б)365/360, в)360/360.

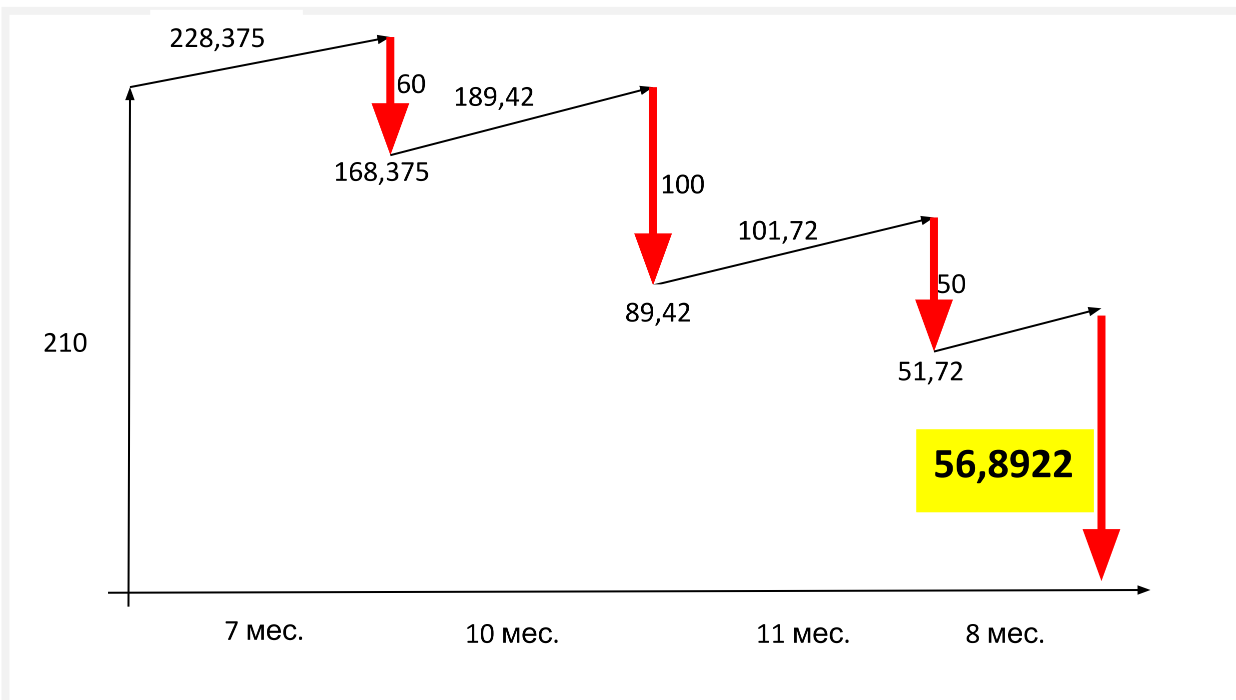
месяц	янв	февр	март	апр	май	июнь	июль	авг	сент	окт	ноябрь	дек	сумма
точное число дней в месяце	31	28	31	30	31	30	31	31	30	31	30	31	365
точное число дней ссуды	16	28	31	30	31	30	31	31	30	31	30	2	321
приближенное число дней в месяце	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	360
приближенное число дней ссуды	15	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	2	317

$S = P(1 + ni_s)$ а) $S = 229901.37$руб. б) $S = 230316{,}67$ руб. в) S = 229938,89 руб

Погашение задолженности частями

Контур финансовой операции

Задание 2. Предприниматель взял в долг 210 тыс.руб на 3 года под 0,15 простых процентов годовых. Через 7 месяцев он отдал 60 тыс. руб, через 10 месяцев он отдал 100 тыс.руб и еще через 11 месяцев он отдал 50 тыс.руб. Какой остаток долга, если выплаченные деньги идут на погашение долга с процентами, а на остаток начисляется простой процент i = 0,15%?



Дисконтирование – расPчет S по

S – наращенная величина

$D = S - P$ - дисконт

$P = S\frac{1}{1+ni_s}$ - первоначальная сумма денег

$\frac{1}{1+ni_s}$ - дисконтный множитель

$n = \frac{S-P}{Pi_s}$ - срок договора

$t = \frac{S-P}{Pi_s}k$ - срок операции в днях

$i_s = \frac{S-P}{Pn}$ - процентная ставка

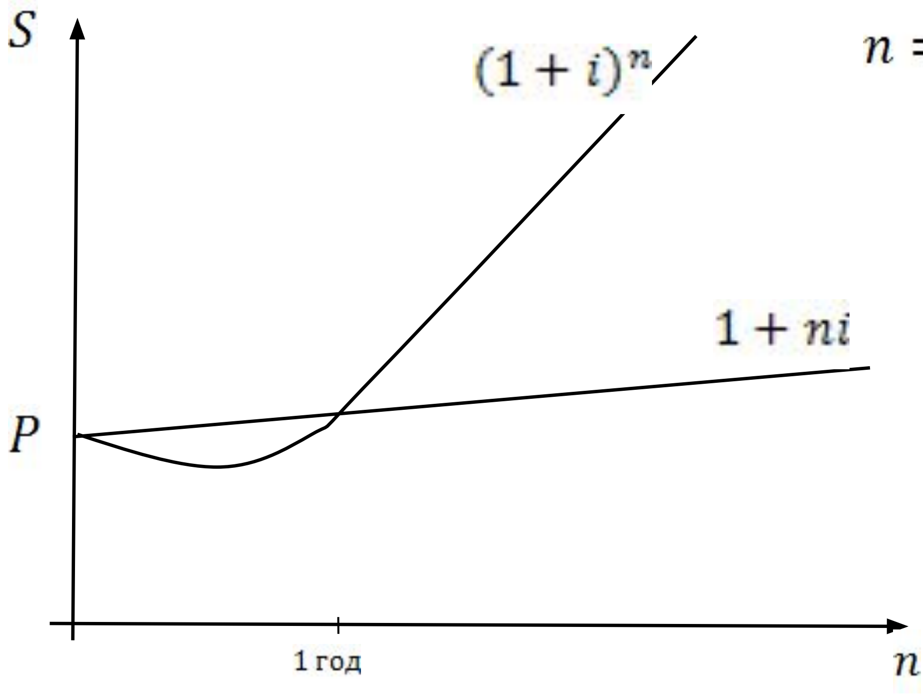
Сложные проценты

$$S = P(1+i)^n$$

$(1+i)^n$ – мультиплицирующий множитель

Если проценты капитализируются m раз вгоду,

то $(1+\frac{j}{m})^{mn}$ – мультиплицирующий множите



$$n = \frac{ln\frac{S}{P}}{\ln(1+i)}$$

$$i = \sqrt[n]{\frac{S}{P}} - 1$$

- ***<u>Задание 3.</u>*** На депозит положили $P = 120$ тысяч рублей под сложный процент. Определить: а) накопленную сумму через $n = 3$ лет, если ставка процента $i = 0,11\%$ и процент начисляется $m = 4$ раз в году; б) срок депозита, если накопленная сумма составляет 200 тыс.руб (начисление процента ежегодное); в) процентную ставку, если за 5 лет наращенная сумма составит 220 тыс.руб.

Решение

а) $S = 166.17$ тыс. руб

б) $n = 5.13$ года

в) $i = 12.9\%$

Номинальная и эффективная ставки

- Ставку j, которую указывают в договоре называют номинальной
- Эффективная ставка – это годовая ставка, которая дает тот же результат, что и m- разовое начисление по ставке j/m

$$j = m(\sqrt[m]{1+i} - 1) \qquad i = (1 + \frac{j}{m})^m - 1$$

Задание 4. В банке существовал срочный вклад А с ежегодным начислением процента по ставке 0,15. Было решено заменить его вкладом В с начислением процента ежемесячно. Какую номинальную ставку нужно назначить для вклада В, чтобы наращенная сумма совпала с той, которая получилась бы по вкладу А?

Решение

$$j = 12(\sqrt[12]{1+0.15} - 1) = 0.14$$

Задание 5. Определить денежную сумму, которую нужно положить в банк на депозит сроком 5 лет, если в конце срока нужно, чтобы накопленная сумма равнялась 300000 руб. и ставка наращения равна 0.1, если: а) простой процент; б) сложный процент с ежегодным начислением процента; в) сложный процент с ежеквартальным начислением процента; г) сложный процент с непрерывным начислением процента.

Решение

а) $P = S\frac{1}{1+ni} = \frac{300000}{1+5*0.1} = 200000$ руб.

б) $P = \frac{S}{(1+i)^n} = \frac{300000}{(1+0.1)^5} = 186335.4$ руб.

в) $P = \frac{S}{(1+\frac{j}{m})^{mn}} = \frac{300000}{(1+\frac{0.1}{4})^{4*5}} = 183000.08$ руб.

г) $S = Pe^{\delta n}$

$P = e^{-\delta n} = 300000e^{-0.1*5} =$ 181,96 руб.

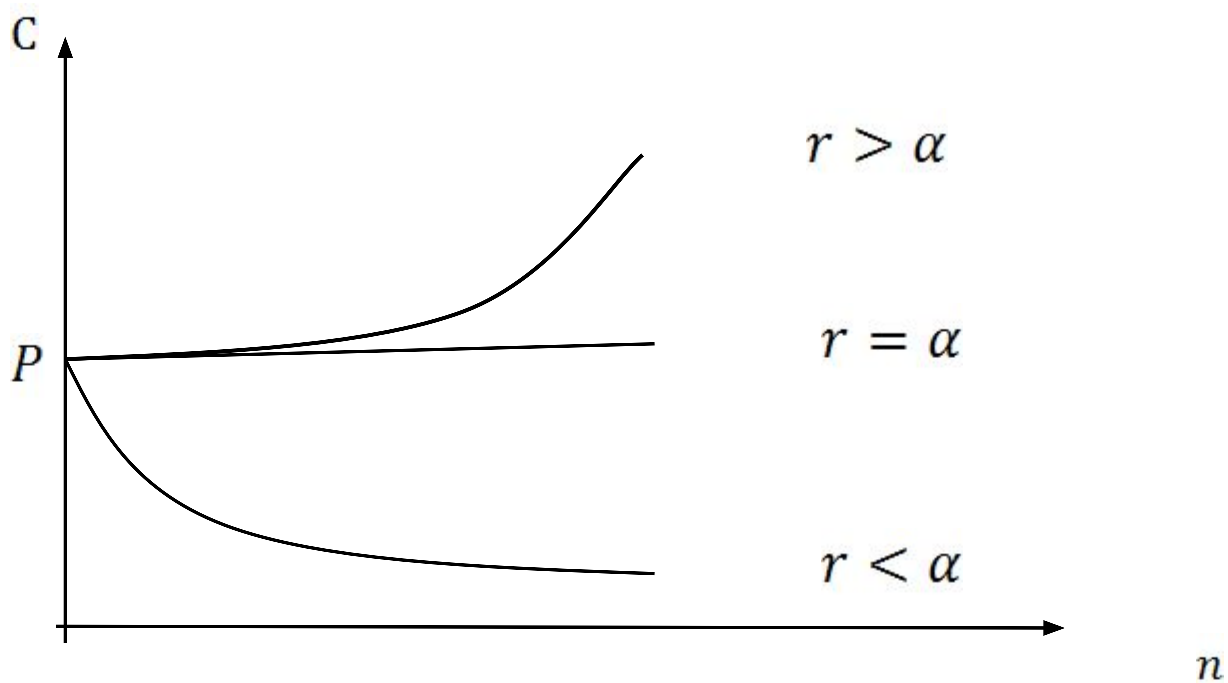
Учет инфляции в финансовых расчетах

- S — наращенная сумма денег, измеренная по номиналу
- C — наращенная сумма с учетом ее обесценивания за счет инфляции
- I_p — индекс цен, показывающий во сколько раз возросли цены
- α — темп инфляции (относительный прирост цен)
- r — номинальная ставка процента
- i — эффективная ставка процента

$$C = \frac{S}{I_p} \qquad I_p = 1 + \alpha \qquad I_p = (1+\alpha)^n, \alpha = const \qquad I_p = \prod_{t=1}^{n}(1+\alpha_t), \alpha \neq const$$

$$\alpha = const \; - \left[\begin{array}{l} C = \dfrac{P(1+nr)}{I_p} = P\dfrac{1+nr}{(1+\alpha)^n} \; - \text{простая ставка} \\[2ex] C = \dfrac{S}{I_p} = \dfrac{P(1+r)^n}{I_p} = P\left(\dfrac{1+r}{1+\alpha}\right)^n \; - \text{сложная ставка} \end{array} \right.$$

Зависимость сложной номинальной ставки от темпа инфляции



Брутто-ставка

$$\left(\frac{1+r}{1+\alpha}\right)^n = (1+i)^n$$

$$r = i + \alpha + i\alpha$$

<u>Задание 6.</u> Определить номинальную ставку банка (брутто-ставку), обеспечивающую реальную доходность $i = 0.1$, если ожидаемая инфляция α =0,03. Какая реальная доходность по вкладу, если номинальная составляет 12% при ожидаемой инфляции α.

Решение

$$r = i + \alpha + i\alpha = 0.1 + 0.03 + 0.1 * 0.03 = 0.133\ (13.3\%)$$

$$i = \frac{r-\alpha}{1+\alpha} = \frac{0.12-0.03}{1+0.03} = 0.0874\ (8.74\%)$$

Финансовые ренты

p - срочная рента (выплачивается p - раз в году)

m=1 (проценты начисляются 1 раз в году)

Годовая сумма платежа – R

$$S = \frac{R}{p} \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^{1/p} - 1}$$

p - срочная рента (выплачивается p - раз в году)

проценты начисляются m - раз в году

$$S = \frac{R}{p} \frac{(1+\frac{j}{m})^{mn} - 1}{(1+\frac{j}{m})^{m/p} - 1}$$

p - срочная рента (выплачивается p - раз в году)

m= p

$$S = \frac{R}{m} \frac{(1+\frac{j}{m})^{mn} - 1}{\frac{j}{m}}$$

Задание 7. Семья может ежемесячно класть в банк по 2000 руб. под 10% годовых. Какая сумма накопится за 5 лет, если процент начисляется: а) ежегодно; б) ежеквартально; в)ежемесячно.

Решение

а) $$S = \frac{R}{p}\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^{1/p} - 1} = \frac{24000}{12}\frac{(1+0{,}1)^5 - 1}{(1+0{,}1)^{1/12} - 1} = 154430{,}38 \text{ руб.}$$

б) $$S = \frac{R}{p}\frac{(1+\frac{j}{m})^{mn} - 1}{(1+\frac{j}{m})^{m/p} - 1} = \frac{24000}{12}\frac{(1+\frac{0{,}1}{4})^{4*5} - 1}{(1+\frac{0{,}1}{4})^{4/12} - 1} = 154699{,}61 \text{ руб.}$$

в) $$S = \frac{R}{m}\frac{(1+\frac{j}{m})^{mn} - 1}{\frac{j}{m}} = \frac{24000}{12}\frac{(1+\frac{0{,}1}{12})^{12*5} - 1}{0{,}1 \setminus 12} = 154866{,}24 \text{ руб.}$$

Задание 8. Семья хочет накопить 500000 на автомобиль, вкладывая в банк 25000 ежегодно. Годовая ставка сложного процента в банке составляет 0,15. Какое время придется платить?

Решение

$$n = \frac{ln\left(\frac{S}{R}i + 1\right)}{\ln(1+i)} = \frac{ln\left(\frac{500000}{25000}0.15 + 1\right)}{\ln(1+0.15)} = 9.9 \text{ года}$$

Задание 9. Предпринимателю предлагают либо взять в безвременную аренду земельный участок за 200000 руб. в год, либо выкупить его за 1500000 руб. Что выгоднее при годовой ставке 13%?

Решение

$$\text{А}_{\infty} = \frac{R}{i} = \frac{200000}{0.13} = 1538462 \text{ руб.}$$

Банковский или коммерческий учет

d_s - учетная ставка

$$S = P\frac{1}{1 - nd_s}$$ - простой процент

$$S = P\frac{1}{(1 - d)^n}$$ - сложный процент

Задание 6. Вексель будет учтен через 3 года за 20000 рублей. Определить его современную стоимость при учетной ставке 0,05, если: а) простой процент; б) процент сложный с ежегодным удержанием процента; в) процент сложный с ежеквартальным удержанием процента.

Решение

а) $P = S(1 - nd_s) = 20000(1 - 3*0,05) = 17000$руб.

б) $P = S(1 - d)^n = 20000(1 - 0.05)^3 = 17147.5$руб.

в) $P = S(1 - \frac{d}{m})^{mn} = 20000(1 - \frac{0.05}{4})^{4*3} = 17197.9$ руб.

Консолидирование платежей

Пусть платежи $S_1, S_2, \dots, S_m$ со сроками $n_1, n_2, \dots, n_m$ заменяются одним S_0 со сроком n_0 .

Если $n_1 < n_2 < \dots < n_m$ то S_0 есть сумма наращенных и дисконтированных к моменту оплаты платежей.

- Простая ставка процентов $$S_0 = \sum_j S_j (1 + t_j i) + \sum_k S_k (1 + t_k i)^{-1}$$

где S_j - размеры платежей со сроками $n_j < n_0$

S_k - размеры платежей со сроками $n_k > n_0$

- Сложная ставка $$S_0 = \sum_j S_j (1 + i)^{t_j} + \sum_k S_k (1 + i)^{-t_k}$$

<u>*Задание 8.*</u> Платежи 10 тыс.руб, 50 тыс.руб, 30 тыс.руб должны быть выплачены через 1,2 и 4 года соответственно со сложным процентом 0,15. Определить сумму единичного платежа, заменяющего три, если он будет выплачен через 3 года по ставке j=0.05.

Решение

$$S_0 = 10(1 + 0.15)^{-1} + 50(1 + 0.15)^{-2} + 30(1 + 0.15)^{-4} \qquad S_0 = 63.66 \text{ тыс. руб}$$

$$S_3 = S_0(1 + j)^3 = 63.66(1 + 0.05)^3 = 73.69 \text{тыс. руб}$$

- *<u>Задание 9.</u>* Заемщик обязан выплатить сумму 100 тыс.руб через год и сумму 500 тыс.руб через 3 года. Но он решил сегодня досрочно погасить весь долг. Сколько должен заплатить заемщик при ставке процента 0,1?

Решение

$$S_0 = 100(1 + 0.1)^{-1} + 500(1 + 0.1)^{-3} = 466.566 \text{ тыс. руб}$$