

Тема: Угол между плоскостями. Урок 3

«Решаем С2 ЕГЭ»

Разработала: Куракова Е. В., учитель математики

МБОУ СОШ с УИОП №38

им.Е.А. Болховитинова

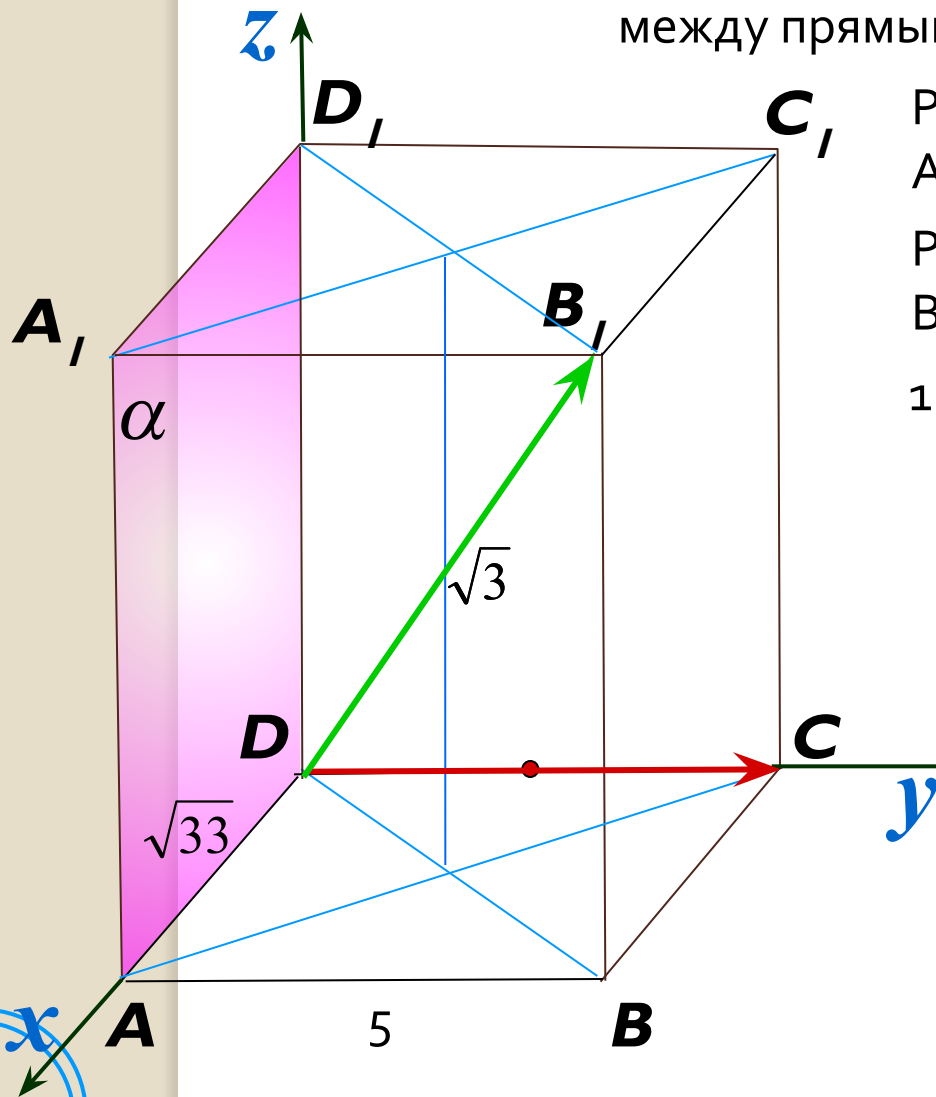
11 класс физико-математического профиля

Цели:

- Повторить понятие угла между плоскостями, нормали к плоскости.
- Закрепить методы введения координат
- Рассмотреть примеры S_2 ЕГЭ

Блиц-опрос по терминам

1. Основание прямой четырехугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямоугольник $ABCD$, в котором $AB = 5$, $AD = \sqrt{33}$. Найдите тангенс угла между плоскостью грани $AA_1 D_1 D$ и плоскостью, проходящей через середину ребра CD перпендикулярно прямой $B_1 D$, если расстояние между прямыми $A_1 C_1$ и BD равно $\sqrt{3}$.



Расстояние между прямыми $A_1 C_1$ и BD ?

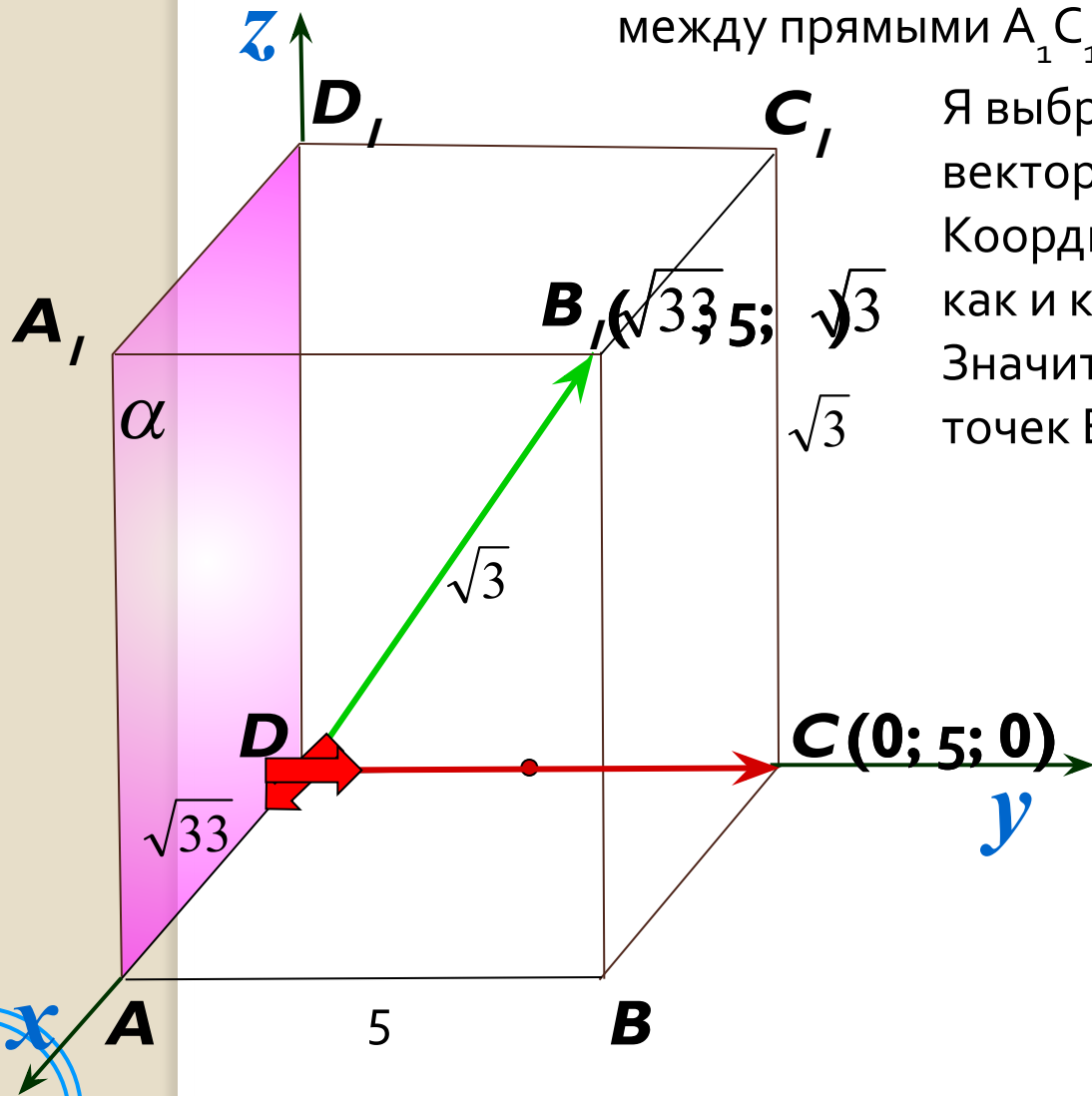
Решим задачу методом координат. Введем нормали к плоскостям.

1. Нормаль к плоскости ADD_1
 $\vec{DC} \perp \alpha$

2. Нормаль ко второй плоскости β , которую я и строить не берусь... Но по условию это сечение проходит перпендикулярно прямой $B_1 D$. Значит, $B_1 D$ перпендикуляр к плоскости. Выберем нормаль $B_1 D$.

$$\vec{DB_1} \perp \beta$$

Основание прямой четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольник $ABCD$, в котором $AB = 5$, $AD = \sqrt{33}$. Найдите тангенс угла между плоскостью грани AA_1D_1D и плоскостью, проходящей через середину ребра CD перпендикулярно прямой B_1D_1 , если расстояние между прямыми A_1C_1 и BD равно $\sqrt{3}$.



Я выбрала очень удобно нормальные векторы. Ведь это радиус-векторы. Координаты радиус-вектора такие же, как и координаты конца вектора. Значит, нам надо найти координаты точек B_1 и C .

1. $\vec{DB_1}$
2. \vec{DC}

$$\vec{DB}_1 (\sqrt{33}; 5; \sqrt{3}) \quad \vec{DC} (0; 5; 0)$$

$$3. \cos \varphi = \frac{|x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

$$\cos \varphi = \frac{|\sqrt{33} \cdot 0 + 5 \cdot 5 + \sqrt{3} \cdot 0|}{\sqrt{(\sqrt{33})^2 + 5^2 + (\sqrt{3})^2} \cdot \sqrt{0^2 + 5^2 + 0^2}}$$

$$= \frac{|0 + 25 + 0|}{\sqrt{33 + 25 + 3} \cdot \sqrt{25}} = \frac{25}{\sqrt{61} \cdot 5} = \frac{5}{\sqrt{61}}$$

$$\cos \varphi = \frac{5}{\sqrt{61}}$$

Теперь найдем тангенс.

$$\text{tg}^2 A + 1 = \frac{1}{\cos^2 A}$$

$$\text{tg}^2 \varphi + 1 = \frac{1}{\left(\frac{5}{\sqrt{61}}\right)^2}$$

$$\text{tg}^2 \varphi + 1 = \frac{61}{25}$$

$$\text{tg}^2 \varphi = \frac{61}{25} - 1$$

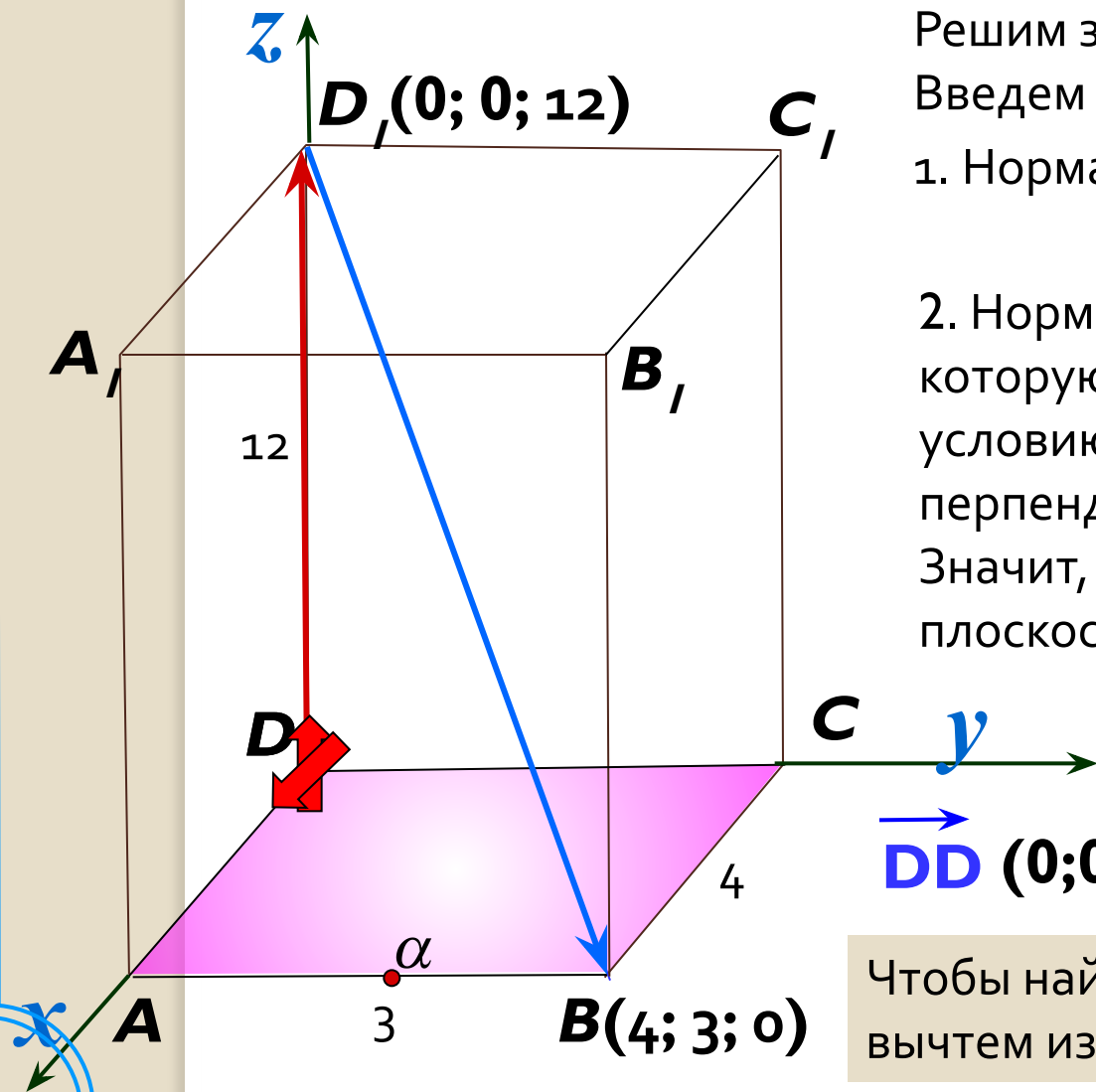
$$\text{tg}^2 \varphi = \frac{36}{25}$$

$$\text{tg} \varphi = \pm \frac{6}{5}$$

$$\text{tg} \varphi = \frac{6}{5}$$

т.к. φ — острый угол

2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$
 $AB = 3$, $BC = 4$, $AA_1 = 12$. Через середину ребра AB перпендикулярно
 диагонали BD_1 проведена плоскость. Найдите угол образованный этой
 плоскостью с основанием параллелепипеда.



Решим задачу методом координат.
 Введем нормали к плоскостям.

1. Нормаль к плоскости ABC

$$\vec{DD} \perp \alpha$$

2. Нормаль ко второй плоскости β ,
 которую я и строить не берусь... Но по
 условию это сечение проходит
 перпендикулярно прямой BD_1 .
 Значит, BD_1 - перпендикуляр к
 плоскости. Выберем нормаль D_1B .

$$\vec{D_1B} \perp \beta$$

$$\vec{DD} (0; 0; 12)$$

$$\vec{D_1B} (4; 3; -12)$$

Чтобы найти координаты вектора D_1B ,
 вычтем из конца вектора его начало.

$$\vec{D} (0; 0; 12)$$

$$\vec{D}_1 B (4; 3; -12)$$

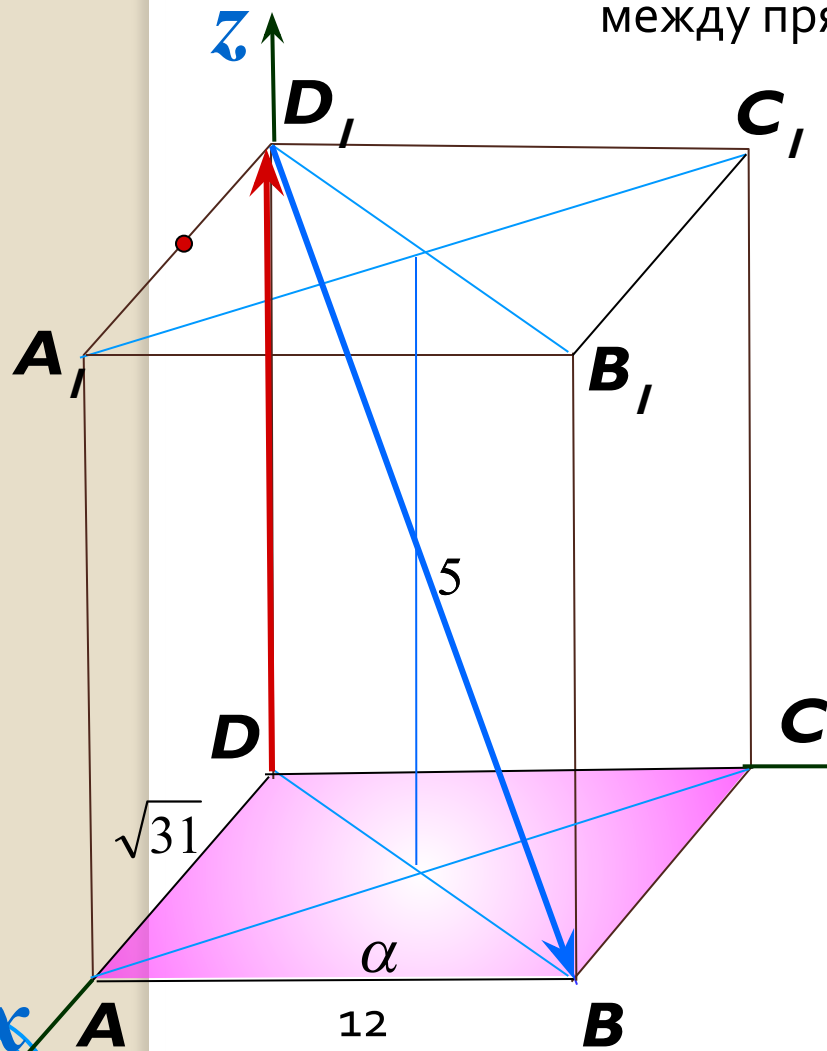
$$\cos \varphi = \frac{|x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

$$\cos \varphi = \frac{|0 \cdot 4 + 0 \cdot 3 + 12 \cdot (-12)|}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 12^2} \cdot \sqrt{4^2 + 3^2 + (-12)^2}} = \frac{|-144|}{12 \cdot \sqrt{169}} = \frac{144}{12 \cdot 13} = \frac{12}{13}$$

$$\cos \varphi = \frac{12}{13}$$

$$\text{Ответ: } \varphi = \arccos \frac{12}{13}$$

3. Основание прямой четырехугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямоугольник $ABCD$, в котором $AB = 12$, $AD = \sqrt{31}$. Найдите косинус угла между плоскостью основания и плоскостью, проходящей через середину ребра $A_1 D_1$ перпендикулярно прямой BD_1 , если расстояние между прямыми AC и $B_1 D_1$ равно 5.



Расстояние между прямыми AC и $B_1 D_1$?

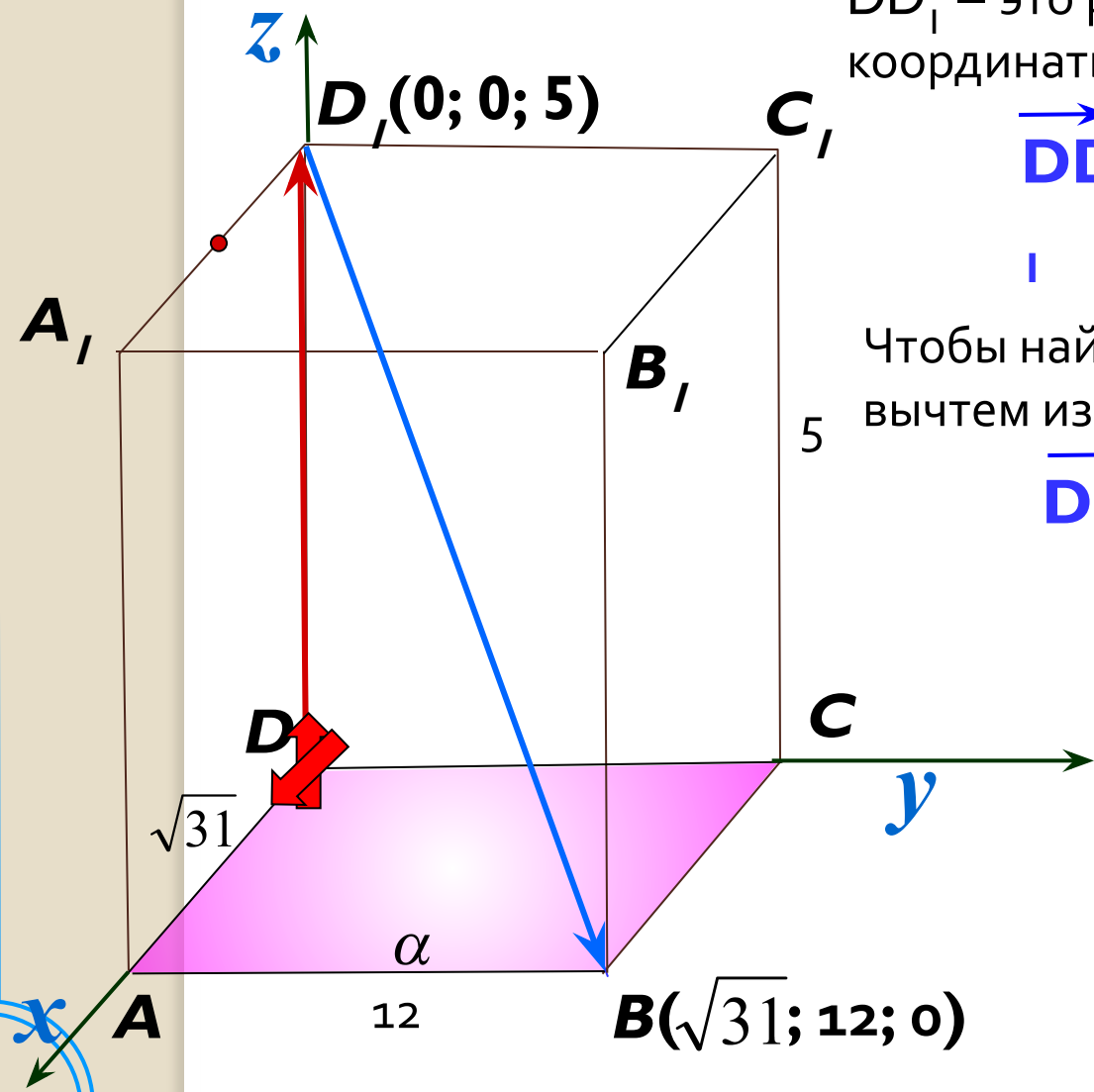
Решим задачу методом координат. Введем нормали к плоскостям.

1. Нормаль к плоскости ABC

$$\vec{DD} \perp \alpha$$

2. Нормаль ко второй плоскости β , которую я и строить не берусь... Но по условию это сечение проходит перпендикулярно прямой BD_1 . Значит, BD_1 - перпендикуляр к плоскости. Выберем нормаль $D_1 B$.

$$\vec{D_1 B} \perp \beta$$



DD_1 – это радиус-вектор, поэтому его координаты такие же, как и точки D_1

$$\vec{DD_1} (0; 0; 5)$$

↓

Чтобы найти координаты вектора D_1B , вычтем из конца вектора его начало.

$$\vec{D_1B} (\sqrt{31}; 12; -5)$$

$$\vec{D} \text{D} (0; 0; 5) \quad \vec{D}_1 \text{B} (\sqrt{31}; 12; -5)$$

$$\cos \varphi = \frac{|x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

$$\cos \varphi = \frac{|0 \cdot \sqrt{31} + 0 \cdot 12 + 5 \cdot (-5)|}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 5^2} \cdot \sqrt{(\sqrt{31})^2 + 12^2 + (-5)^2}} = \frac{|0 + 0 + 25|}{\sqrt{25} \cdot \sqrt{31 + 144 + 25}}$$

$$= \frac{25}{5 \cdot \sqrt{200}} = \frac{5}{\sqrt{2 \cdot 100}} = \frac{5}{10\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{Ответ: } \cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

4. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны ребра: AB

$$= \begin{cases} -12x + 0y + 5z = 0 \\ 0x + 5y + 5z = 0 \end{cases}$$

Выразим через x переменные y и z

$$\begin{cases} -12x + 5z = 0 & \text{Из (1): } 5z = 12x \\ 5y + 5z = 0 & \text{«-»} \\ -12x - 5y = 0 & \\ -5y = 12x & \\ y = -\frac{12}{5}x & \\ z = \frac{12}{5}x & \end{cases}$$

Эта система имеет бесконечное множество решений, так как векторы, перпендикулярные плоскости $AD_1 B_1$, бесконечно много. Выберем из данного множества ненулевой вектор \vec{n} ,

положив $x = 1$,

тогда $y = -\frac{12}{5}$, $z = \frac{12}{5}$



и $AD_1 B_1$. Известны ребра: AB , AD_1 , AB_1 .
Найдем угол между плоскостями $CD_1 B_1$ и $AD_1 B_1$.

Линейного угла не столь очевидно.

Поэтому применим метод координат.

Найдем вектор нормали плоскости $AD_1 B_1$.

Рассмотрим два вектора этой плоскости:

$$\vec{AD}_1 (-12; 0; 5) \quad \vec{AB}_1 (0; 5; 5)$$

Пусть вектор нормали $\vec{n} \{x; y; z\}$.

Вектор, перпендикулярный плоскости, будет перпендикулярен любой прямой, лежащей в этой плоскости. Тогда,

$$\vec{AD}_1 \perp \vec{n} \text{ значит, } \vec{AD}_1 \cdot \vec{n} = 0$$

$$\vec{AB}_1 \perp \vec{n} \text{ значит, } \vec{AB}_1 \cdot \vec{n} = 0$$

Вектор нормали плоскости $AD_1 B_1$:

$$\vec{n} (1; -\frac{12}{5}; \frac{12}{5})$$

$$\begin{cases} 0x - 5y + 5z = 0 \\ 12x + 0y + 5z = 0 \end{cases}$$

Выразим через x переменные y и z

$$\begin{cases} -5y + 5z = 0 & \text{Из (2): } 5z = -12x \\ \quad \quad \quad \leftarrow \quad \quad \quad \leftarrow \\ 12x + 5z = 0 & z = -\frac{12}{5}x \\ -5y - 12x = 0 \\ -5y = 12x \\ y = -\frac{12}{5}x \end{cases}$$

Эта система имеет бесконечное множество решений, так как векторы, перпендикулярных плоскости CD_1B_1 , бесконечно много. Выберем из данного множества ненулевой вектор \vec{s} , положив $x = 1$, тогда $y = -\frac{12}{5}$ $z = -\frac{12}{5}$



найдем вектор нормали плоскости CD_1B_1 . Рассмотрим два вектора этой плоскости:

$$\vec{CD}_1(0; -5; 5) \quad \vec{CB}_1(12; 0; 5)$$

Пусть вектор нормали $\vec{s} \{x; y; z\}$. Вектор, перпендикулярный плоскости, будет перпендикулярен любой прямой, лежащей в этой плоскости. Тогда,

$$\begin{aligned} \vec{CD}_1 \perp \vec{s} & \text{ значит, } \vec{CD}_1 \cdot \vec{s} = 0 \\ \vec{CB}_1 \perp \vec{s} & \text{ значит, } \vec{CB}_1 \cdot \vec{s} = 0 \end{aligned}$$

Вектор нормали плоскости CD_1B_1 :

$$\vec{s} \left(1; -\frac{12}{5}; -\frac{12}{5}\right)$$

$$\vec{n} \left(1; -\frac{12}{5}; \frac{12}{5} \right)$$

$$\vec{s} \left(1; -\frac{12}{5}; -\frac{12}{5} \right)$$

$$\cos \varphi = \frac{|x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

$$\cos \varphi = \frac{\left| 1 \cdot 1 + \left(-\frac{12}{5} \right) \cdot \left(-\frac{12}{5} \right) + \frac{12}{5} \cdot \left(-\frac{12}{5} \right) \right|}{\sqrt{1^2 + \left(-\frac{12}{5} \right)^2 + \left(\frac{12}{5} \right)^2} \cdot \sqrt{1^2 + \left(-\frac{12}{5} \right)^2 + \left(-\frac{12}{5} \right)^2}}$$

$$\cos \varphi = \frac{\left| 1 + \frac{144}{25} + \left(-\frac{144}{25} \right) \right|}{\sqrt{1 + \frac{144}{25} + \frac{144}{25}} \cdot \sqrt{1 + \frac{144}{25} + \frac{144}{25}}}$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{\frac{313}{25}} \cdot \sqrt{\frac{313}{25}}}$$

$$\cos \varphi = 1 : \frac{313}{25}$$

$$\cos \varphi = \frac{25}{313}$$

$$\varphi = \arccos \frac{25}{313}$$

7. В правильной четырехугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ диагональ основания в два раза больше бокового ребра. Найдите угол между плоскостью

$$\begin{cases} -\sqrt{2}x + \sqrt{2}y + 0z = 0 \\ 0x + \sqrt{2}y + z = 0 \end{cases}$$

Выразим через x переменные y и z

$$\begin{cases} -\sqrt{2}x + \sqrt{2}y = 0 \quad /: \sqrt{2} & \text{Из (1) } y = x \\ \sqrt{2}y + z = 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{2}x + z = 0$$

$$z = -\sqrt{2}x$$

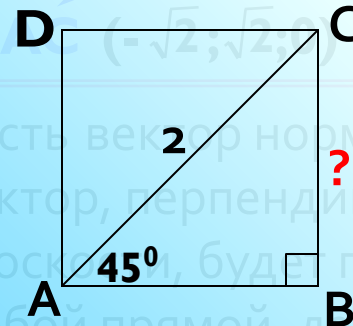
Эта система имеет бесконечное множество решений, так как векторов, перпендикулярных плоскости ACB_1 , бесконечно много. Выберем из данного множества ненулевой вектор \vec{n} ,

$$\begin{cases} y = x \\ z = -\sqrt{2}x \end{cases}$$

положив $x = 1$,
тогда $y = 1$, $z = -\sqrt{2}$ ❌

Этот угол не столь очевидно. Поэтому

Если в задаче не дано числовое значение, то можем обозначить боковое ребро «1», тогда диагональ основания равна 2. Найдём сторону основания. Основание – квадрат.



$$\sin 45^\circ = \frac{CD}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{CD}{2}$$

$$CD = \sqrt{2}$$



$$\vec{AC} \perp \vec{n} \quad \text{значит,} \quad \vec{AC} \cdot \vec{n} = 0$$

$$\vec{AB_1} \perp \vec{n} \quad \text{значит,} \quad \vec{AB_1} \cdot \vec{n} = 0$$

Вектор нормали плоскости ACB_1 :

$$\vec{n} (1; 1; -\sqrt{2})$$

$$\vec{p} (0; \sqrt{2}; 0)$$

$$\vec{n} (1; 1; -\sqrt{2})$$

$$\cos \varphi = \frac{|x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

$$\cos \varphi = \frac{|0 \cdot 1 + \sqrt{2} \cdot 1 + 0 \cdot (-\sqrt{2})|}{\sqrt{0^2 + (\sqrt{2})^2 + 0^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + (-\sqrt{2})^2}}$$

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{4}}$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{2}$$

$$\varphi = 60^\circ$$

Домашнее задание

1. Основание прямой четырехугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ прямоугольник $ABCD$, в котором $AB = 5$, $AD =$. Найдите тангенс угла между плоскостью $BA_1 D_1$ и плоскостью, проходящей через середину ребра CD перпендикулярно прямой $B_1 D$, если расстояние между прямыми $A_1 C_1$ и BD равно .
2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $AB = 3$, $BC = 4$, $AA_1 = 12$. Через середину ребра AB перпендикулярно диагонали BD_1 проведена плоскость. Найдите угол образованный этой плоскостью боковыми плоскостями параллелепипеда.
3. Основание прямой четырехугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ прямоугольник $ABCD$, в котором $AB = 12$, $AD =$. Найдите косинус угла между плоскостью основания и плоскостью, проходящей через середину ребра $A_1 D_1$ перпендикулярно прямой $B_1 D$, если расстояние между прямыми AC и $B_1 D_1$ равно 5.
4. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны ребра: $AB = 5$, $AD = 12$, $CC_1 = 5$. Найдите угол между плоскостями $CD_1 B_1$ и $AD_1 B_1$.
5. В правильной четырехугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ диагональ основания в 2 раза больше бокового ребра. Найдите угол между плоскостью DCB_1 и боковой гранью $BB_1 C_1 C$.