Сысуев В.В.
доктор географических наук, профессор

ОПТИМИЗАЦИЯ ПРИРОДОПОЛЬЗОВАНИЯ

Введение в теорию оптимизации

Географический факультет
Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова
v.v.syss@mail.ru

Москва, 2016

Введение в учение о природно-антропогенных ландшафтах

[Николаев, и др., 2008, с. 7]

Основаниями классификации (выделения) природно-антропогенных ландшафтов являются три критерия: «…***а) степень антропогенной трансформации природных ландшафтов…; б) наличие или отсутствие антропогенной регуляции; в) социально-экономические функции, выполняемые ландшафтами***».

В соответствии с основными *видами природопользования* среди природно-антропогенных обоснованно выделяются ландшафты:
«…*целенаправленно созданные, антропогенно регулируемые:*
1) сельскохозяйственные, 2) лесохозяйственные,
3) водохозяйственные, 4) городские и другие селитебные,
5)…»

«…для перехода земной цивилизации к устойчивому развитию необходимо решить две взаимосвязанные *ландшафтно-экологические задачи* планетарного масштаба. Первая состоит в *оптимизации* всех существующих *природно-антропогенных ландшафтов с целью преобразования* их *в истинно культурные* (ноосферные). Вторая – в сбережении, уходе и восстановлении естественных природных комплексов, наиболее надежно гарантирующих относительную стабильность природной среды за счет гомеостазиса…

Важнейшим *инструментом проектирования культурного ландшафта* признано *ландшафтное планирование*. Его суть в научном обеспечении *оптимальной природно-хозяйственной организации* ландшафтного пространства на принципах геоэкологической адаптивности»

[Николаев, 2013, с. 284].

I. ОБ ОПТИМИЗАЦИИ ПРИРОДНО-АНТРОПОГЕННЫХ ЛАНДШАФТОВ

«Проектирование - это начало изменений в окружающей человека искусственной среде»
Дж. К. Джонс

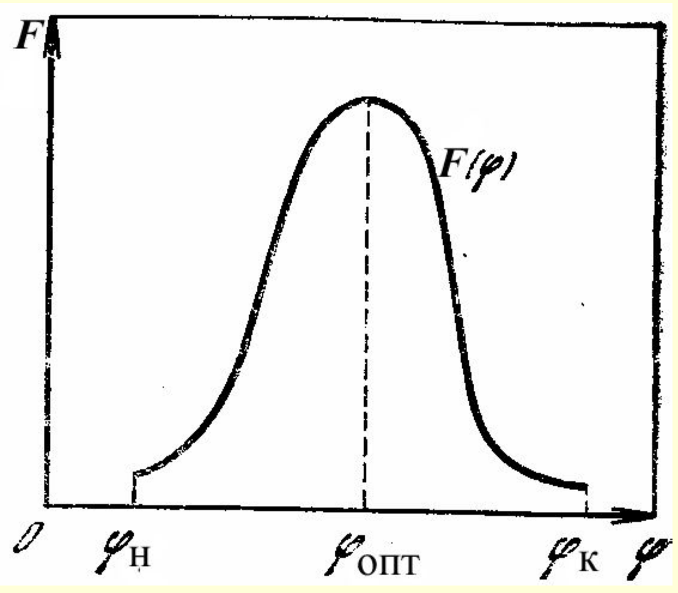
Планирование, проектирование и управление устойчивым ***природопользованием и задачи*** условной ***оптимизации*** предполагают наличие одинаковых предпосылок: ***имеется цель, которую нужно достичь***, ***учитывая всевозможные ограничения***.

Мощный аппарат решения этих проблем имеет теория оптимизации (оптимального управления).

Выражения, связывающее цель со средствами ее достижения: критерий функционирования, критерий или показатель эффективности, целевая или критериальная функция, **функция цели**

Логический пример оптимизация:

настраивая радиоприемник, мы добиваемся максимальной громкости некоторой радиостанции:



Допустимой областью X **является интервал углов** ϕ **поворота ручки настройки между начальными** $\phi_{н}$ **и конечными значениями** $\phi_{к}$**.** ***Целевая функция*** **— зависимость громкости** F **от угла** ϕ**. Путем измерений получим значения целевой функции** $F(\phi)$ **и начертим ее график. Из графика видно, что наибольшему значению целевой функции соответствует** ***оптимальный угол*** **(**$\phi_{опт}$**). Математическое выражение (или алгоритм вычисления) целевой функции** $F(\phi)$**, график которой хорошо совпадает с экспериментальной кривой, и называют** ***математической моделью***.

Оптимизация **- нахождение max (min) целевой функции**

Если множество всех вариантов X, а его элементы – x, то сопоставив каждому варианту x из множества X ($x \in X$) число — критерий оптимальности, получим функцию $F(x)$, определенную в области X. Эта функцию, показывающая «качество» выбираемых вариантов, *целевая функция*, а область X — *допустимая область*

Задача оптимизации - поиск минимума целевой функции:

$$F(x) \to \min$$
$$x \in X$$

Для решения задач оптимизации необходимо:

А) Составить математическую модель объекта оптимизации

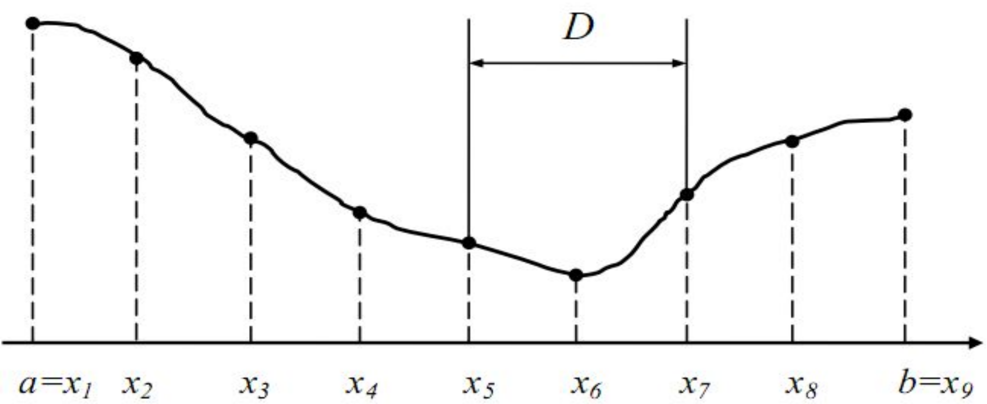
Б) Выбрать критерий оптимальности и составить целевую функцию $F(X)$

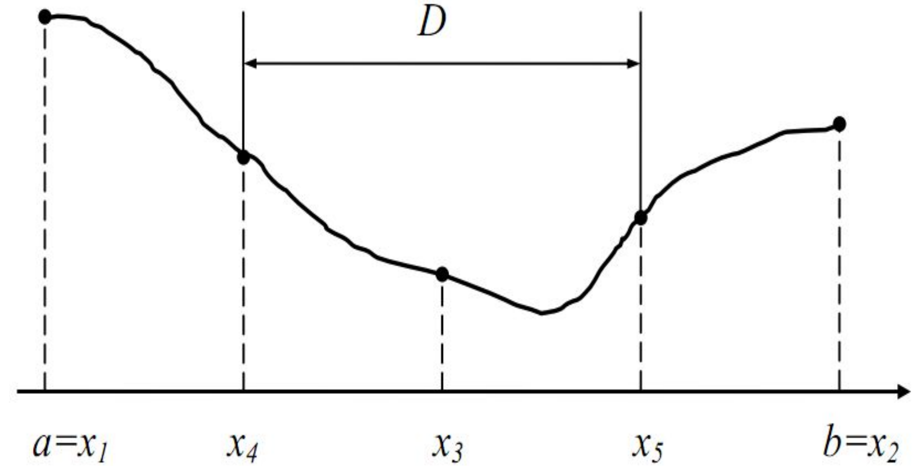
В) Установить возможные ограничения, которые должны накладываться на переменные

Г) Выбрать метод оптимизации, который позволит найти экстремальные значения искомых величин

Одномерная оптимизация: 1). Сужение интервала неопределенности

Метод перебора (общего поиска)





Метод деления интервала пополам

Метод «золотого сечения» и др.

2). Методы с использованием производных

Дважды дифференцируемая функция $f(x)$ достигает минимума при $f'(x)=0$, если $f''(x)>0$

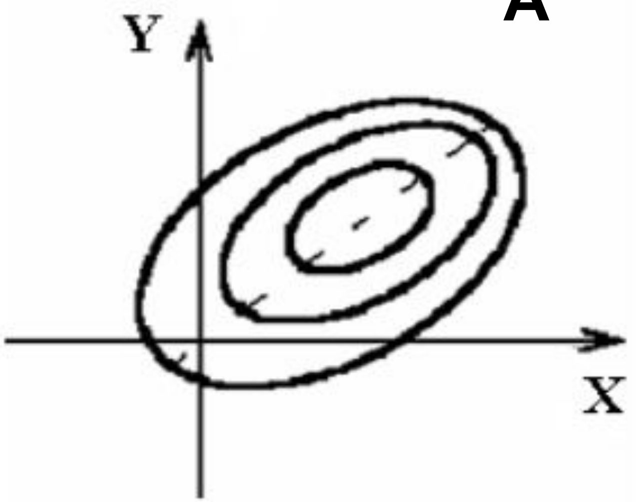
Метод Ньютона-Рафсона

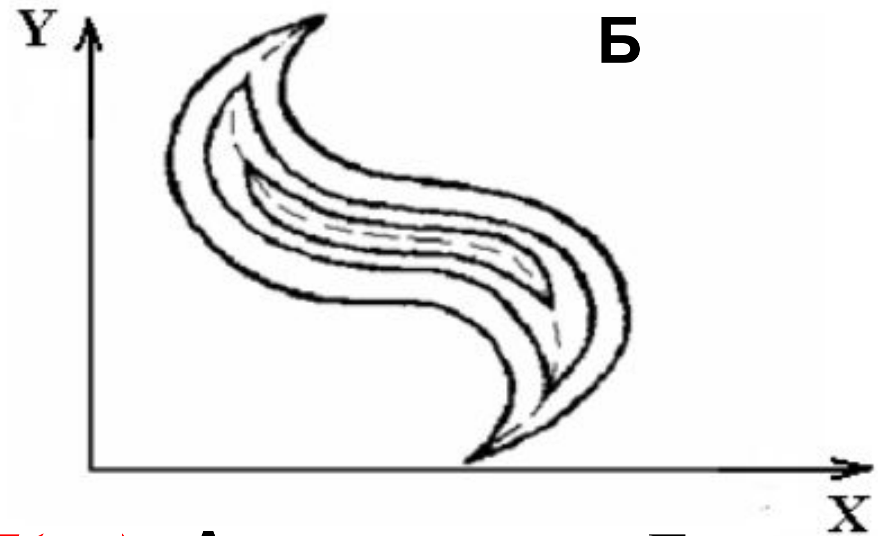
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}$$

Критерий прекращения итераций

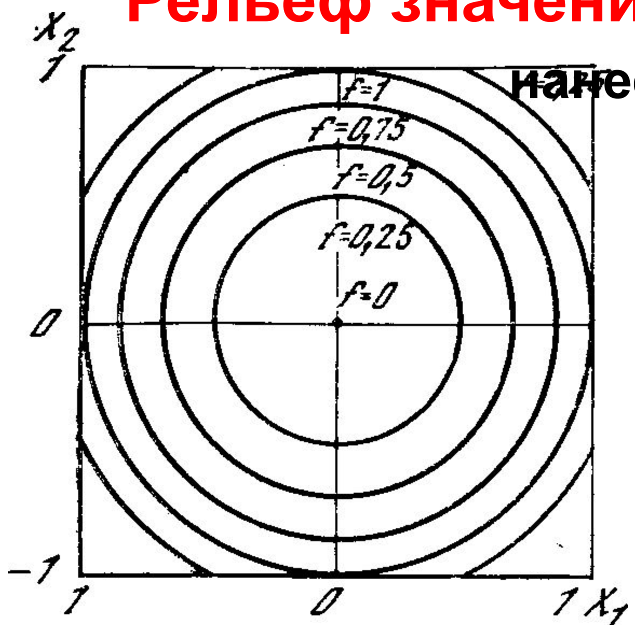
$$\left|\frac{f'(x_{k+1})}{f(x_{k+1})}\right| < \varepsilon$$

Минимум функции нескольких переменных

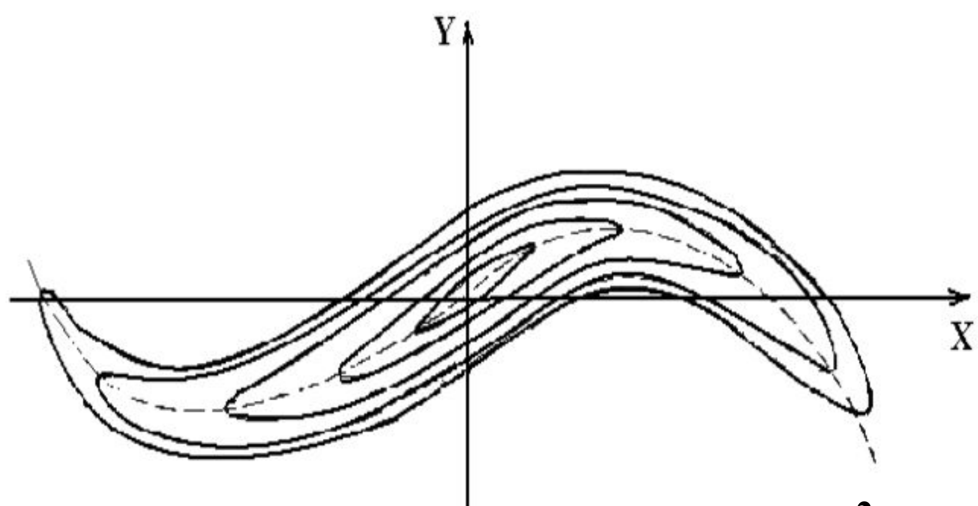




Рельеф значений *F(x,y)*: А- котловинный, Б – овражный, нанесены *линии уровня z=F(x,y)*



Рельеф функции $F(x,y)= x^2 + y^2$

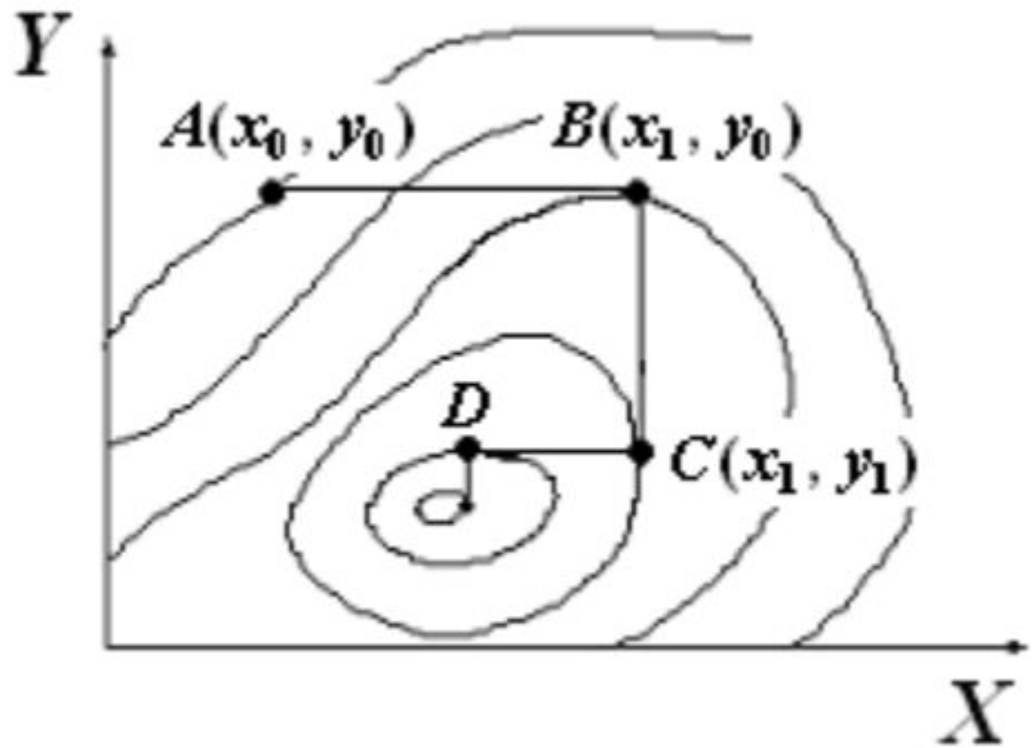


Рельеф функции $F(x,y)=10(y\text{-}\sin x)^2+0.1x^2$

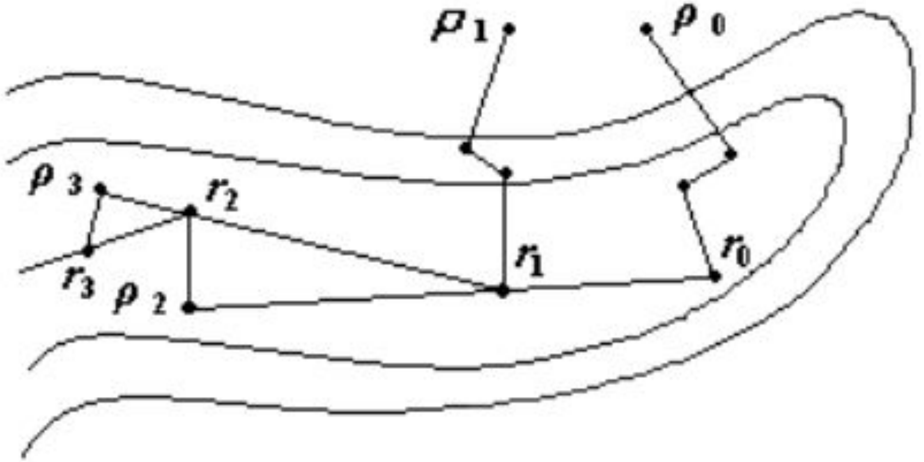
Метод координатного спуска (метод Гаусса)

F(x,y,z) - функция 3-х переменных. Пусть нулевое приближение x_0, y_0, z_0.

1. Фиксируем значение двух координат $y = y_0$, $z = z_0$. Функция $f_1 = F(x, y_0, z_0)$ только одной переменной – отыщем ее минимум и обозначим его x_1.
   т.е. сделали шаг из т. (x_0, y_0, z_0) в т. (x_1, y_0, z_0), и значение *F(x,y,z)* уменьшилось
2. Из новой точки сделаем спуск по оси *y*, т.е. найдем минимум $f_2 = F(x_1, y, z_0)$ → попадем в точку (x_1, y_1, z_0)
3. Третий шаг – спуск по оси *z* из т. (x_1, y_1, z_0) в т. (x_1, y_1, z_1) – цикл или первая итерация завершена



Метод оврагов



ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ [Канторович, 1939]

1. Задача об использовании сырья

Виды сырья	Запасы сырья	Виды продукции	
		Π_1	Π_2
S_1	b_1	a_{11}	a_{12}
S_2	b_2	a_{21}	a_{22}
S_3	b_3	a_{31}	a_{32}
S_4	b_4	a_{41}	a_{42}
Доход		c_1	c_2

Виды сырья	Запасы сырья	Виды прордукции	
		Π_1	Π_2
S_1	19	2	3
S_2	13	2	1
S_3	15	0	3
S_4	18	3	0
Доход		7	5

Если предприятие выпускает x_1 единиц продукции вида Π_1 и x_2 единиц вида Π_2

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 19 \\ 2x_1 + x_2 \le 13 \\ 3x_2 \le 15 \\ 3x_1 \le 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le 19 - 2x_1 - 3x_2 \\ 0 \le 13 - 2x_1 - x_2 \\ 0 \le 15 - 3x_2 \\ 0 \le 18 - 3x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 19 - 2x_1 - 3x_2 \\ x_4 = 13 - 2x_1 - x_2 \\ x_5 = 15 - 3x_2 \\ x_6 = 18 - 3x_1 \end{cases}$$

$$F = 7x_1 + 5x_2$$

Найти min $F = -7x_1 - 5x_2$

основная задача линейного программирования

Геометрический смысл основной задачи линейного программирования

Требуя неотрицательности всех неизвестных приходим к системе неравенств

$$\begin{cases} x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \\ 19 - 2x_1 - 3x_2 \ge 0 \\ 13 - 2x_1 - x_2 \ge 0 \\ 15 - 3x_2 \ge 0 \\ 18 - 3x_1 \ge 0 \end{cases}$$

$$F = -7x_1 - 5x_2$$

многоугольник решений системы неравенств

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 & \text{(I)} \\ x_2 = 0 & \text{(II)} \\ 19 - 2x_1 - 3x_2 = 0 & \text{(III)} \\ 13 - 2x_1 - x_2 = 0 & \text{(IV)} \\ 15 - 3x_2 = 0 & \text{(V)} \\ 18 - 3x_1 = 0 & \text{(VI)} \end{cases}$$

$$C = -7x_1 - 5x_2$$

$$P_0\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}\right)$$

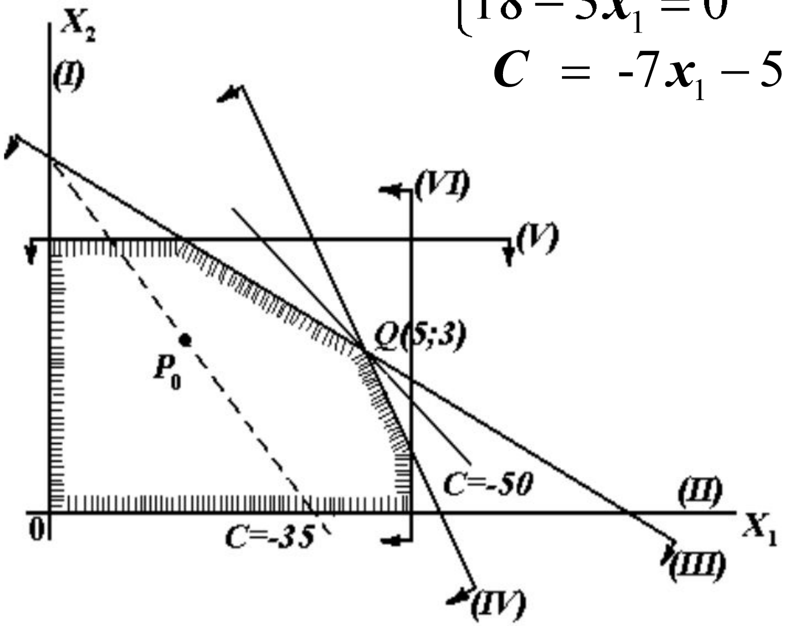
$$C_0 = -7x_1^{(0)} - 5x_2^{(0)}$$

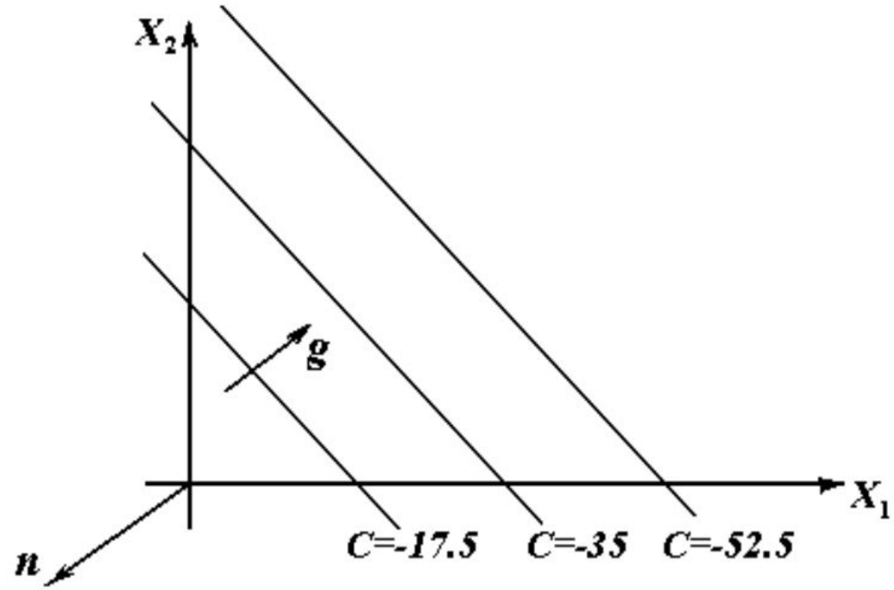
Оптимальная точка *Q*(5, 3)

$$F_{1\min} = -7 \cdot 5 - 5 \cdot 3 = -50$$

Оптимальное решение задачи

$x_1 = 5$, $x_2 = 3$.





ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

2. Транспортная задача

Пункты отправле-ния	Пункты назначения			Запасы груза
	B_1	B_2	B_3	
A_1	c_{11}	c_{12}	c_{13}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	c_{23}	a_2
Потребность в грузе	b_1	b_2	b_3	$\sum a_i = \sum b_j$

a_1, a_2 - ед. груза на станциях отправления,
b_1, b_2, b_3 груза на станциях назначения,
c_{ij} - стоимость перевозки единицы груза
x_{ij} количество ед. груза, предназначенного к отправке

ОСНОВНАЯ ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ

Пункты отправле-ния	Пункты назначения			Запасы груза
	B_1	B_2	B_3	
A_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	a_1
A_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	a_2
Потребность в грузе	b_1	b_2	b_3	$\sum a_i = \sum b_j$

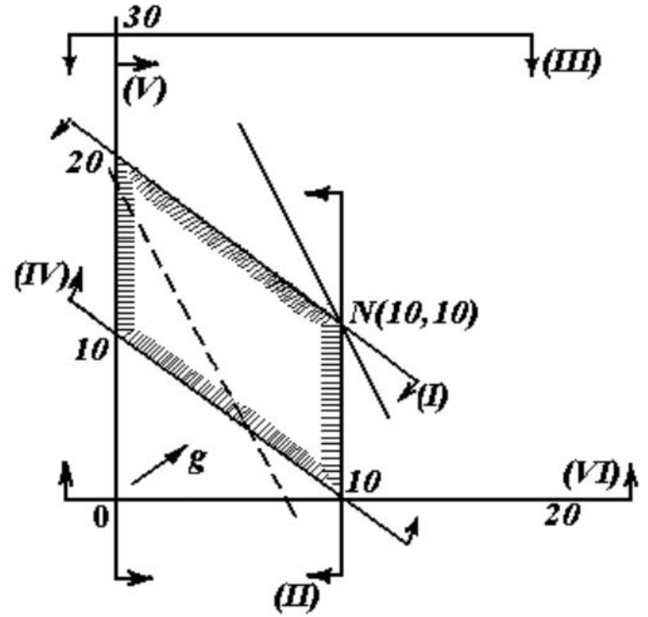
$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} = b_1 \\ x_{12} + x_{22} = b_2 \\ x_{13} + x_{23} = b_3 \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} = a_1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = a_2 \end{cases}$$

$$F = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + c_{23}x_{23} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} c_{ij}x_{ij} = \sum_{i,j} c_{ij}x_{ij}$$

Численный пример транспортной задачи

Пункты отправления	Пункты назначения			Запасы груза
	B_1	B_2	B_3	
A_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	$20=a_1$
A_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	$30=a_2$
Потребность в грузе	$10=b_1$	$30=b_2$	$10=b_3$	$\sum a_i = \sum b_j$

Многоугольник решений



$$\begin{cases} 20 - x_{11} - x_{12} \geq 0 & \text{(I)} \\ 10 - x_{11} \geq 0 & \text{(II)} \\ 30 - x_{12} \geq 0 & \text{(III)} \\ -10 + x_{11} + x_{12} \geq 0 & \text{(IV)} \\ x_{11} \geq 0 & \text{(V)} \\ x_{12} \geq 0 & \text{(VI)} \end{cases}$$

$$F = 330 - 2x_{11} - x_{12}$$

Оптимальное решение в точке N**(10, 10)**

x_{11} **= 10,** x_{12} **= 10,** $F_{\min}$ **= 300**.

$$\begin{cases} x_{13} = 20 - x_{11} - x_{12} = 0 \\ x_{21} = 10 - x_{11} = 0 \\ x_{22} = 30 - x_{12} = 20 \\ x_{23} = -10 + x_{11} + x_{12} = 10 \end{cases}$$

Задача рационального распределения пород деревьев

по соответствующим им ТУМ [].

Основная задача линейного программирования

Найти максимум целевой функции

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j(\omega) x_j \Rightarrow \max \qquad (1)$$

при условиях:

ограничения на имеющиеся природные ресурсы

$$\sum_{j=1}^{n} a_{pj}(\omega) x_j \le b_p(\omega) \qquad (2)$$

выполнения предъявляемых к насаждениям требований

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}(\omega) x_j \ge b_k(\omega)$$

и неотрицательности переменных:

$c_j(\omega)$ – запас, прирост или другая специфическая функция *j*-ой породы в возрасте количественной спелости;

x_j – доля участия *j*-ой породы в данных ТУМ $x_j \ge 0$, $j = 1,\dots, n$,

$a_{pj}(\omega)$ – норма потребности *j*-ой породы в *p*-ом ресурсе;

$b_p(\omega)$ – количество имеющихся *p*-ых ресурсов;

$a_{kj}(\omega)$ – нормы требуемых от насаждения дополнительных специфических функций (средообразующих, биоразнообразия, защитных и др);

$b_k(\omega)$ – оценки требований к этим функциям;

ω - количество выделов.

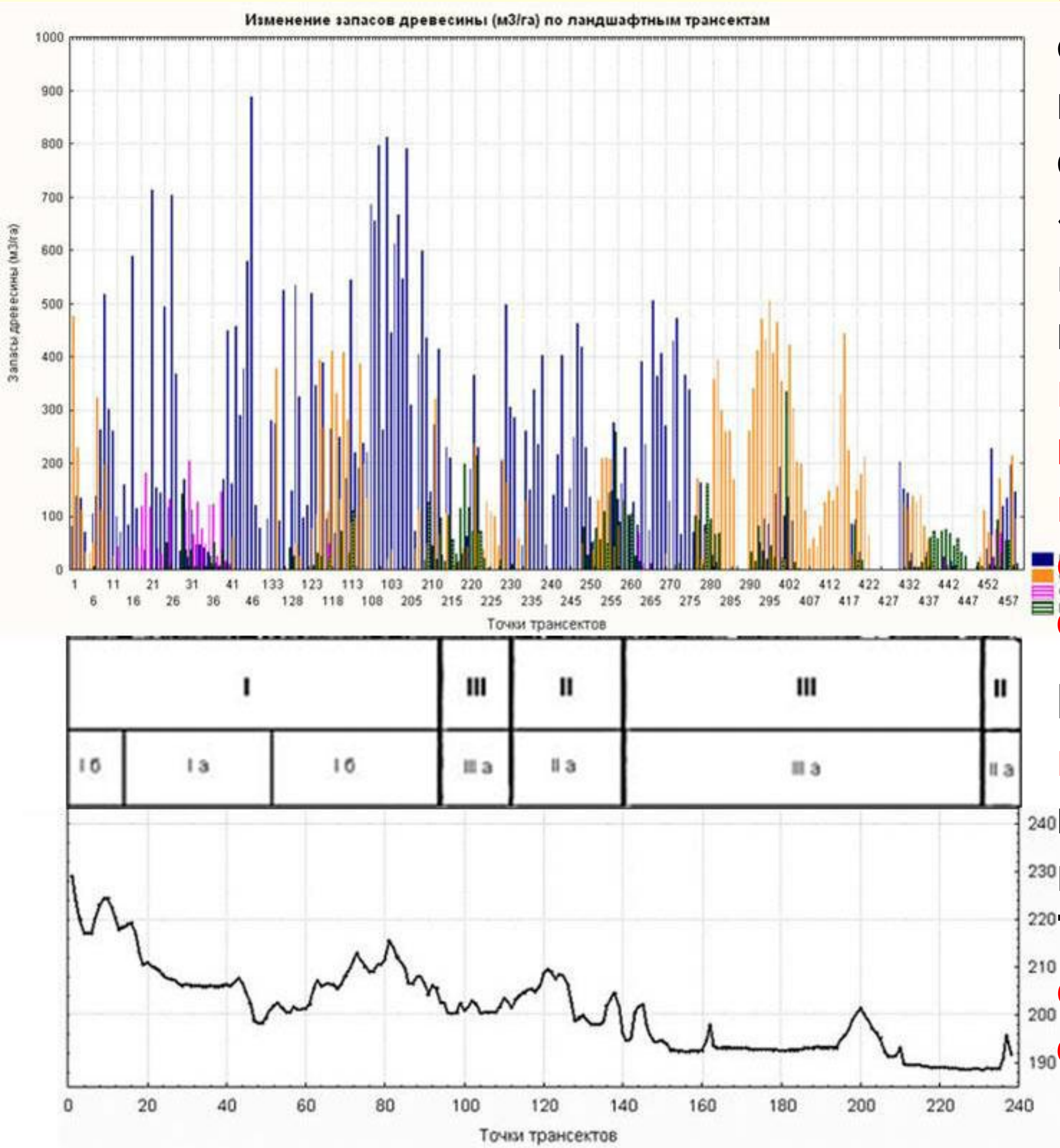
Географические ограничения по ресурсам в задачах оптимизации продукционных процессов

[Нестеров, Бредихин, 1970]

№	Наименование	Номера районов			
		1	2	3	4
1	**Солнечная радиация, ккал/см^2 вегет. период**	**60**	**65**	**80**	**90**
2	**Доступная вода, сотни тонн/га**	**340**	**300**	**250**	**115**
3	**Азот, кг/га**	**54**	**60**	**100**	**50**
4	**Фосфор, кг/га**	**12**	**15**	**27**	**16**
5	**Калий, кг/га**	**50**	**54**	**60**	**60**
6	**Почвы**	**дерново-подзолист. супесчаная**	**дерново-подзолист среднесугл**	**чернозем выщелоч. легкосугл**	**Темнокаштановая среднесугл**
7	**$\sum t^o$**	**2150**	**2200**	**2750**	**3000**
8	**pH**	**5,2**	**5,5**	**6,3**	**7,5**

Биоэкологические коэффициенты a_{pj} и коэффициенты c_j функционала максимальной продуктивности для оптимизации состава древесных пород на дерново-среднеподзолистых почв на покровных суглинках [Нестеров, Бредихин, 1970]

Наименования ресурсов и условий		**Древесные породы (переменные)**							Ограничения b_p
		Сосна x_1	Ель x_2	Бер. x_3	Дуб x_4	Осина x_5	Липа x_6	Листв. x_7	
1	Солнечная радиация	6,8	3,1	7,2	28,8	2,9	8,7	8,4	≤82
2	Доступная влага	31,5	13,0	54,1	78,4	30,0	55,4	22,7	≤300
3	Азот	3,7	2,1	7,2	9,4	3,8	8,2	2,7	≤46,4
4	Фосфор	1,3	1,1	1,9	2,0	1,0	1,1	2,4	≤21,0
5	Калий	2,4	1,8	3,4	6,2	2,2	4,8	1,7	≤49,8
6	Стоимость лесокультур	1,3	1,3	1,0	2,0	0,9	1,0	1,3	≤20
7	Энтомоустойчивость	1,0	0,9	0,9	0,8	0,6	0,6	0,9	≥5,2
8	Пожароустойчивость	0,7	0,7	1,0	1,0	1,0	1,0	0,8	≥4,2
9	Газоустойчивость	0,3	0,3	0,4	0,4	0.4	0,5	0,5	≥1,8
10	Фитонцидность	3,2	3,0	5,0	4,0	3,0	5,5	5,5	≥18
11	Ландшафтно-эстетические свойства	4,5	4,0	4,5	4,0	3,0	4,0	4,5	≥24
Коэф-ты c_j функционала максимального прироста		1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	



При решении задачи (1)-(2) с условиями ограничения на ресурсы и коэффициентами функционала цели «достижение максимального прироста» из таблиц получена максимальная продуктивность 19,3 м^3/га в год при оптимальном составе древостоя 85% ели и 15% осины.

Решая ту же задачу на максимальный доход получили максимальную валовую продукцию на 77,8 у.е. при наличие состава древостоя 94,5% ели и 5,5% дуба.

Оптимизация лесопользования [В.Г. Нестеров, М.А. Бредихин, 1971]. Основная задача линейного программирования в вероятностной постановке

Найти максимум математического ожидания целевой функции

$$M\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{\ln} c_{ks}(\omega) x_{ks}\right) \Rightarrow \max$$

неотрицательных переменных $x_{ks} \geq 0, k, K, s, S;$

$C_{ks}(\omega)$ - **чистый доход** с дисконтированием затрат с помощью нормы эффективности вложений:

$$c_{ks}(\omega) = \sum_{t=u}^{T_{ks}} \frac{D_{ks}^{t}}{(1+E)^{t-u}} - \sum_{t=u}^{T_{ks}} \frac{Z_{ks}^{t}}{(1+E)^{t-u}}$$

$D^{t}_{ks}(\omega)$ - доход от реализации s-го варианта в k-м участке в t году; $Z^{t}_{ks}(\omega)$ - затраты на проведение s-го варианта в k-м участке в t-м году; E - норма эффективности вложений; u - год, к которому приводится значение показателя; t - рассматриваемый год; T_{ks} - время, в течение которого будет получен эффект от проведения s-го варианта в k-м участке.

Условия ограничения:

1. По удовлетворению потребностей экономики в лесной продукции

$$P\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{\ln} a_{rks}(\omega) x_{ks} \geq b_r(\omega)\right) \geq a_r, r, R;$$

2. По распределению лимитированных ресурсов

$$P\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{\ln} a_{iks}(\omega) x_{ks} \geq L_i(\omega)\right) \geq a_i, i, I_i;$$

3. По использованию других ресурсов

$$P\left(\sum_{s=1}^{\ln} a_{iks}(\omega) x_{ks} \geq b_{ik}(\omega)\right) \geq a_i, i, I - I_1, k, K$$

где: x_{ks} - доля использования s-го варианта в k-м участке;
$a_{rks}(\omega)$ - объем получения r-го вида лесной продукции в k-м участке при s-м варианте;
$b_r(\omega)$ - потребности экономики в r-м виде лесной продукции;
$a_{iks}(\omega)$- норма затрат i-го ресурса на проведение s-го варианта в k-м участке;
$L_i(\omega)$ - объем i-го вида лимитированных ресурсов;
$b_{ik}(\omega)$ - объем i-го вида ресурсов в k-м участке;
I - множество всех ресурсов;
I_1 - множество лимитированных ресурсов;
R - множество видов лесной продукции;
a_r, a_i - заданные вероятности соблюдения ограничений по удовлетворению потребностей и наличию ресурсов;
$c_{ks}(\omega)$ - чистый доход от проведения s-го варианта в k-м участке.

2. Задачи оптимального управления природопользованием

Система, точнее - ***динамическая система*** (которая развивается, эволюционирует во времени) в каждый момент времени ***пребывает*** *в одном* ***из некоторого числа*** возможных ***состояний***.

Смена состояний системы с течением времени и составляет её ***развитие или функционирование***.

Предполагается, что ***состояние*** динамической системы в каждый момент времени может быть ***однозначно охарактеризовано*** определенным конечным ***набором n числовых параметров или функций состояния*****.**

Управление – это есть ***воздействие, способное изменить текущее состояние***, а значит и все последующее развитие системы.

Функционированием многих ***природно-антропогенных систем*** можно (необходимо) управлять.

Постановка задачи оптимального управления включает:

1. Системy дифференциальных уравнений, описывающих поведение (функционирование) данного объекта и
2. Критерий оптимальности (функционал), который следует максимизировать или минимизировать,
3. Выбор управляющих переменных.
4. Введение ограничений на переменные и граничные условия
5. Формулировка принципа максимума Л.С. Понтрягина. Этот принцип - необходимое условие существования оптимального управления динамическими системами, принимает разный вид в зависимости от задачи. В его формулировке участвуют функции специального вида – гамильтониан и сопряженные переменные. Существует схема применения принципа максимума, в общем случае его использование требует высокой математической квалификации.

Решением задачи оптимального управления является ***оптимальный процесс***, т.е. оптимальное управление ***и*** соответствующая ему ***оптимальная траектория функционирования системы***.

Оптимальное управление лесопользованием. Простейшая модель

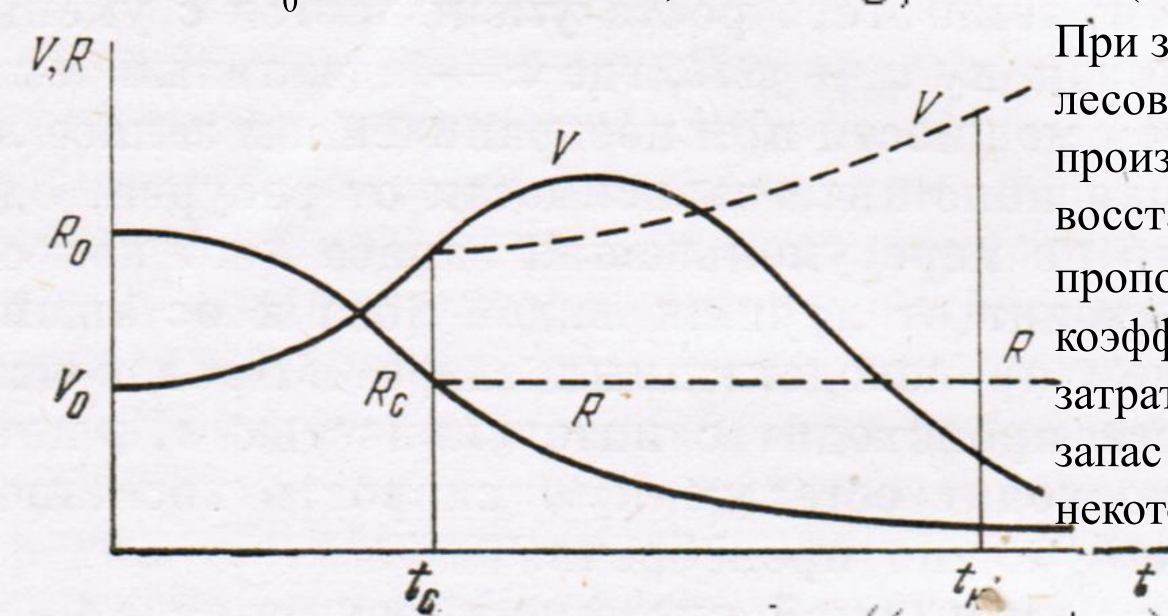
$$\begin{cases} \dot{V} = (a - g/R)V, \\ \dot{R} = -cV \end{cases}$$

с начальными условиями

$$V(0) = V_0, \quad R(0) = R_0$$

V – мощность лесоперерабатывающего предприятия, R – запас леса на выделенной территории. Доля доходов тратится на рост производства; темп этого роста уменьшается с уменьшением запаса леса: $a–g/R$, a – максимальный темп роста производственной мощности при неограниченном запасе леса $R=\infty$, g – некоторая константа зависимости от ресурса. cV - интенсивность потребления леса, которая значительно превосходит естественную скорость лесовосстановления

Если запас R_0 достаточно велик, так что $g/R \ll a$ (Решение сплошные линии)



При затрате доли средств, на лесовосстановление, снижается рост производства на величину u. Скорость восстановления леса считаем пропорциональной u с коэффициентом α (эффективность затрат). Если u удастся задать так, что запас стабилизируется $\dot{R} = 0$ на некотором уровне Rc тогда:

$$\dot{V} = \left(\left(a - g/R_c\right) - \left(c/\alpha\right)\right)V, \quad u = (c/\alpha)V,$$

Решение – пунктирные линии

Оптимальное управление вырубкой плакорных пихтовых лесов Приангарья

$$\dot{S}_i = \sum_j \alpha_{ji} S_j - \sum_j \alpha_{ij} S_i - u_i - u_{Ni} - u_{vi} - u_{pi}$$

S_i, площади занятые i –м типом леса; $\alpha_{ji} = \left(\Delta\tau_{ji}\right)^{-1}$ интенсивность перехода из j-го состояния в i-е состояние (тип леса), определяется по времени $\Delta\tau_{ji}$ необходимому для смены типа леса; u_i, u_{Ni} – интенсивность изменения площади вырубки и потери лесных площадей в результате пожаров; u_v, u_p – потери лесной площади на расширение мощности предприятия и инфраструктуры

Оптимальное управление рубками:

$$\dot{S} = AS - Bu - DSV - LSu_v\ ,$$

$$\dot{V} = u_v\ ,$$

$$V(0) = V_0\ , \quad S(0) = S_0\ , \quad S(t) \geq 0\ ,$$

$$0 \leq \sum_i u_i w_i \leq V\ , \quad u_v \geq 0\ ,$$

$$I_1 = \int_0^T \left(\gamma' u - bu_v - cV - \beta\left|S - S^*\right|^2\right) dt \to \max\ .$$

V - мощность лесозаготовительного предприятия, v - выпуск продукции, u_i – площадь, вырубаемая в каждом типе леса. стоимости древостоев, вырубаемых с площади u, входят потери прибыли на увеличение мощности предприятия u_v и на штрафы за нарушение экологических условий (равновесия) $\beta\left|S - S^*\right|^2$

Блок-схема динамической системы лесопользования разновозрастным древостоем

Постановка задачи оптимального управления лесопользованием

[Андреева, Шилова, 2014]

$$\begin{cases} \dot{x} = p(y,z) - \gamma(z)x - fx, \\ \dot{y} = fx - (q+d)y - u_1, \\ \dot{z} = qy - hz - u_2, \end{cases}$$

с краевыми условиями:

$$x(0) = X_0, \quad y(0) = Y_0, \quad z(0) = Z_0;$$
$$x(T) \ge X_T, \quad y(T) \ge Y_T, \quad z(T) \ge Z_T.$$

Функции управления $u_1(t)$, $u_2(t)$ - **скорость вырубки деревьев среднего и старшего возрастов:**

$$0 \le u_k(t) \le \alpha_k, \; k = 1,2, \; t \in [0,T];$$

$$0 \le \sum_{k=1}^{2} u_k(t) \le \alpha_k, \; t \in [0,T],$$

Цель управления - максимизация функционала $J(u)$ **- прибыль, полученную от продажи вырубленного леса:**

$$J(u) = \int_0^T \sum_{i=2}^{3} \left[\rho_i(y,z) - c_i(y,z) \right] u_i dt + b_1 y(T) + b_2 z(T) \to \max,$$

где: $\rho_i(y,z)$, $c_i(y,z)$ **- стоимость реализованной древесины и себестоимость затрат на выращивание и рубки**

Решение задачи оптимального управления лесопользованием

Задача минимизации функционала с критериями выполнения конечных условий:

$$J(u) = -\int_0^T \sum_{i=2}^{3} \left[\rho_i(y,z) - c_i(y,z)\right] u_i\,dt - b_1 y(T) - b_2 z(T) + {}_1\left(\max\left(0, {}_T - (\quad)\right)\right)^2 +$$

$$+ M_2\left(\max\left(0, Y_T - y(T)\right)\right)^2 + M_3\left(\max\left(0, Z_T - z(T)\right)\right)^2 \to \min.$$

Строится функция Понтрягина из функций специального вида (гамильтониана H и сопряженных переменных p_i) **и функция переключения**

$$H\left(t, x, y, z, u, p(t), \lambda_0\right) = -\lambda_0\left(\sum_{i=2}^{3}\left[\rho_i(y,z) - c_i(y,z)\right]u_i\right) +$$

$$+\left(p_1(t), \rho z - \gamma(z)x - fx\right) + \left(p_2(t), fx - (q+d)y - u_1\right) + \left(p_3(t), qy - hz - u_2\right);$$

$$\varphi_k(t) = \rho_k + c_k(y,z) + p_{k+1}(t),\ k = 1,2.$$

Пусть $\left(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{u}_1, \bar{u}_2\right)$ локально-оптимальный процесс сформулированной задачи, тогда оптимальное управление определяется условием:

$$\bar{u}_k = \begin{cases} 0, & \varphi_k(t) < 0 \\ \alpha_k, & \varphi_k(t) > 0 \\ \left[0, \alpha_k\right], & \varphi_k(t) = 0, \quad k = 2,3, \end{cases}$$

Сопряженные функции $p_k, k = 1,2,3$ являются решением системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{p}_1(t) = p_1(t)\left(az^4 + b - f\right) - p_2(t) f; \\ \dot{p}_2(t) = -\mu_1 u_1 + p_2(t)\left(q + d\right) - p_3(t) q; \\ \dot{p}_3(t) = -\mu_2 u_2 - p_1(t)\left(\rho - 4az^3 x\right) - p_3(t) h \end{cases}$$