

ТЮРИНГ

МА

А

Ш

И

Н

А



CAFÉ - THÉ - INFUSION	
CAFÉ TURC	900
CAFÉ EXPRESS	800
CAPUCIN	1400
CAPUCINO	1500
THÉ À LA MENTHE	1900
THÉ AUX AMANDES	1800
THÉ AUX P. IGONS	
THÉ GLACE AU CITRON	1200
THÉ INFUSION	1200
HYPERVEINE	
CHOCOLAT AU LAIT	
BOISSON GAZEUX	
SODAS	1400
SCHWEP'S	1400
COCA BOTTE	1500
BIERE S.A	2000
SIROP	1200
A L'EAU MINERALE	1500
GARSI SOCL	
SAFIA	
EN BOUTEILLE	
JUS DE FRUITS	
SALADE FRAISE	3500
JUS D'ORANGE	1500
CITRON AUX AMANDES	2500
FRUITS PRESSES	3000
COCKTAIL DE FRUITS	3000
AU CHOIX 24CL	2500
GATEAUX	
CROISSON AUX AMANDES	700
GATEAU AU CHOIX	1800
CHICHÁ AU CHOIX	3000
PETIT DEJEUNER	5000



Одной из первых и весьма удачных попыток дать точный математический эквивалент интуитивного представления об алгоритме было введение понятия *машины Тьюринга* в 1937 году, за 9 лет до появления первой ЭВМ.

Машина Тьюринга – абстрактная машина. Это математическая модель идеализированного вычислительного устройства.

Машина Тьюринга состоит из ленты и управляющего устройства со считывающей и записывающей головки (каретки) (рис. 5.1).



Рис. 5.1

Лента жестко закреплена слева и бесконечна справа. Иногда считают, что лента не ограничена справа и слева. Лента разделена на ячейки, которые нумеруются натуральными числами 1, 2,

В каждую ячейку ленты заносятся символы *внешнего алфавита* машины Тьюринга

$$A = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}. \quad (5.1)$$

Один из символов (пробел) соответствует незаполненной, пустой ячейке.

Головка может передвигаться вдоль ленты влево и вправо. Когда она неподвижна, то стоит против некоторой ячейки ленты; говорят, что головка обозревает эту ячейку.

За единицу времени, которая называется шагом, головка может сдвинуться на одну ячейку влево или вправо. Кроме того, головка может также распознать содержимое обзриваемой ячейки, может заносить символ внешнего алфавита в текущую ячейку и может стирать содержимое текущей ячейки или, что то же самое, записывать туда пробел.

Управляющее устройство может находиться в одном из множества дискретных состояний:

$$Q = \{q_0, q_1, \dots, q_m\}. \quad (5.2)$$

Множество Q называется *внутренним алфавитом* машины Тьюринга или алфавитом внутренних состояний.

Словом называется последовательность $W = a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{is}$ символов, записанных в ячейках ленты, где a_{i1} – символ, находящийся в самой левой непустой ячейке, а a_{is} – символ, находящийся в самой правой непустой ячейке. Количество символов s в слове называется *длиной слова*.

Пусть в некоторый момент времени t на ленте записано слово W , управляющее устройство находится в состоянии q_i , а каретка – напротив символа a_{im} слова W . *Конфигурацией* машины в момент времени t называется последовательность $K = a_{i1}, \dots, a_{i(m-1)}, q_i, a_{im}, \dots, a_{is}$. Конфигурации в начале и в конце работы называют соответственно *начальной* и *заключительной*.

Пример 5.4.

Пусть на ленте записано слово $abcde$, управляющее устройство находится в состоянии q_i и каретка стоит против символа d . Конфигурация в этом случае запишется так:

$$abcq_ide.$$

Так как машина Тьюринга имеет конечный алфавит и конечное число внутренних состояний, то очевидно, что она может выполнять конечное число действий.

Если управляющее устройство в некоторый момент времени находится в состоянии q_i , обозревается символ a_j , в следующий момент времени записывается символ a_r , управляющее устройство переходит в состояние q_k , и каретка сдвигается, то говорят, что машина выполняет команду

$$a_jq_i \rightarrow a_rSq_k, \quad (5.3)$$

где S – сдвиг, $S = L$, если сдвиг влево, $S = R$, если сдвиг вправо, $S = C$, если каретка остается на месте.

Совокупность всех команд, которые может выполнить машина, называется ее программой. Условие однозначности требует, чтобы для любого j и любого i имеется только одна команда вида (5.3).

Каждая машина Тьюринга полностью определяется своим алфавитом, внутренними состояниями и программой.

Итак, машина Тьюринга есть совокупность

$$M = \langle A, Q, P \rangle, \quad (5.4)$$

где A – *внешний алфавит* (5.1), Q – *алфавит внутренних состояний* (5.2), P – *программа* (5.3).

Пример 5.5.

Машина с внешним алфавитом $A = \{1, a\}$, алфавитом внутренних состояний $Q = \{q_1, q_2\}$ и программой

$$1q_1 \rightarrow 1Rq_1,$$

$$aq_1 \rightarrow 1Rq_1,$$

из любой начальной конфигурации будет работать бесконечно, заполняя единицами всю ленту вправо от начальной точки.

Порядок работы машины Тьюринга часто задается в виде таблицы.

В каждый столбец верхней строчки заносятся символы внутреннего алфавита, в каждую строчку первого столбца – символы внешнего алфавита. В ячейках на пересечении других столбцов и строчек помещаются команды.

Если на пересечении какой-либо строки и какого-либо столбца мы получим пустую клетку, то это означает, что в данном внутреннем состоянии данный символ встретиться не может.

A/Q	q_0	q_1	...	q_i	q_n
a_0					
a_1					
...					
a_j				a_jKq_i	
...					
a_m					

Формат команды: aKq , где:

a – новое содержание текущей ячейки (новый символ внешнего алфавита, который заносится в текущую ячейку);

K – команда лентопротяжного механизма машины Тьюринга (влево, вправо, стоп);

q – новое внутренне состояние машины Тьюринга.

Работа машины на основании заданной программы происходит следующим образом.

Предположим, что в данный момент времени машина Тьюринга находится во внутреннем состоянии q_i , а в обозреваемой кареткой ячейке ленты находится символ a_j .

Тогда машина переходит к выполнению команды $a_j K q_i$ в ячейке, на пересечении столбца q_i и строки a_j :

1) в текущую ячейку ленты заносится новый символ a_j (возможно, тот же самый).

2) происходит сдвиг головки влево ($K =$ влево), или сдвиг головки вправо ($K =$ вправо), или головка остается на месте, т. е. происходит остановка машины ($K =$ стоп).

3) машины переходит в новое внутреннее состояние q_i .

Возможные случаи останова машины Тьюринга:

1) в ходе выполнения программы машина дойдет до выполнения команды останова; программа в этом случае считается выполненной, машина останавливается – происходит результативная остановка.

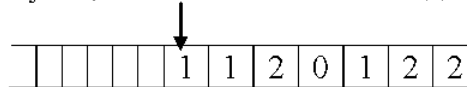
2) машина никогда не останавливается, происходит зацикливание.

Пример 5.6.

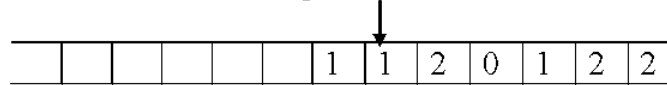
Пусть внешний алфавит $A = \{0, 1, 2\}$, а множество внутренних состояний состоит лишь из одного состояния $Q = \{q_0\}$. Необходимо построить МТ, которая в произвольной записи, начиная из любой ячейки, двигаясь вправо, находит первый нуль и останавливается. Такая машина может быть задана таблицей:

a	q_0
0	$0Cq_0$
1	$1Rq_0$
2	$2Rq_0$

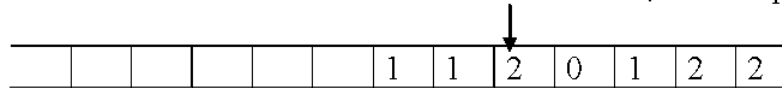
Действительно, пусть, вначале машина находится в состоянии



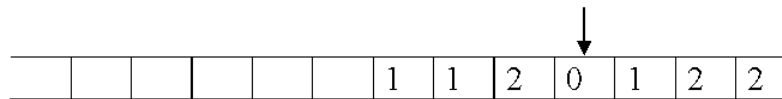
Головка обозревает символ 1. В соответствии с табл. выполняется команда $1Rq_0$, т. е. в обозреваемую ячейку записывается тот же самый символ 1 и головка смещается вправо.



Теперь головка снова обозревает символ 1 и в соответствии с табл. 5.2 выполняется команда $1Rq_0$, т. е. в обозреваемую ячейку записывается тот же самый символ 1 и головка смещается вправо



Теперь головка обозревает символ 2 и в соответствии с табл. 5.2 выполняется команда $2Rq_0$, т. е. в обозреваемую ячейку записывается тот же самый символ 2 и головка смещается вправо.



Теперь головка обозревает символ 0 и в соответствии с табл. 5.2 выполняется команда $0Cq_0$ т. е. в обозреваемую ячейку записывается тот же самый символ 0 и машина останавливается.

Пример 5.7.

Построим машину Тьюринга, которая слово $\neg(AVB)$ преобразует в слово $\neg A \& \neg B$, а слово $\neg(A \& B)$ преобразует в слово $\neg A \vee \neg B$, что соответствует законам де Моргана. Такая машина может быть задана таблицей 5.2.

Внешний алфавит $A = \{\neg, A, B, \vee, \&, (,), _ \}$ (символ $_$ соответствует пустой ячейке), а множество внутренних состояний состоит лишь из одного состояния $Q = \{q_0\}$.

A	q_0
\neg	$_Rq_0$
A	ARq_0
B	$\neg Rq_0$
\vee	$\&Rq_0$
$\&$	$\vee Rq_0$
$($	$\neg Rq_0$
$)$	BRq_0
$_$	$_Cq_0$

Данные машины Тьюринга – это слова во внешнем алфавите ленты. На ленте записывается и исходные данные и конечный результат. На ленте могут быть записаны слова, а также последовательности слов. В последнем случае между словами ставится специальный символ-разделитель, им может быть пробел или символ *. Натуральное число a представляется словом $1\dots 1 = 1^a$, состоящим из a единиц. Например, числу 3 соответствует слово 111.

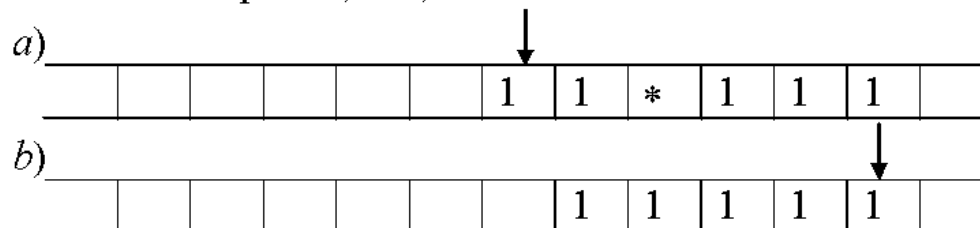
Пример 5.8.

Построим машину Тьюринга, которая производит сложение двух натуральных чисел a и b . Сложить два числа a и b – это значит слово $1^a * 1^b$ преобразовать в слово 1^{a+b} .

Это можно сделать, удалив в записи $a*b$ символ разделителя * и сдвинув первое слагаемое ко второму. Такая машина может быть задана таблицей. Внешний алфавит $A = \{1, *, _ \}$, где * – символ разделителя, а _ – символ пустой ячейки (пробел). Множество внутренних состояний состоит из трех состояний $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$.

a	q_0	q_1	q_2
1	$_Rq_1$	$1Rq_1$	$1Lq_2$
*	$_Rq_1$	$1Lq_2$	
$_$		Cq_1	$_Rq_1$

Начальное и конечное состояния ленты для случая $a = 2, b = 3$ представлено на рис. а) и б)



Вычислимые по Тьюрингу функции

Будем рассматривать функции f от одной или нескольких переменных, заданных на множестве $N = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$ натуральных чисел или его подмножествах (частичные функции) и принимающие значения на множестве N .

Определение 5.8. Функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется *вычислимой*, если существует алгоритм, позволяющий вычислять ее значения для тех переменных, для которых она определена, и работающий бесконечно, если функция для данного набора переменных не определена.

Определение 5.9. Функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется *вычислимой по Тьюрингу*, если существует машина Тьюринга, вычисляющая эту функцию.

Переменные можно располагать в виде слов с разделителями

11...1 11...1*.....*11...1*

Пример 5.9.

Запись *111* 11*1* соответствует трем переменным x_1, x_2, x_3 , равным, соответственно, 3, 2 и 1.

Функция также записывается словом, состоящим из единиц.

Пример 5.8 представляет функцию двух переменных $f(a, b) = a + b$.

Тезис Тьюринга. Всякий алгоритм можно реализовать машиной Тьюринга.

Тезис Тьюринга доказать нельзя. Это утверждение означает, что математическое понятие вычислимой по Тьюрингу функции является идеальной моделью интуитивного понятия алгоритма. Этот тезис подтверждается опытом.

По своему характеру тезис Тьюринга напоминает математические законы механики, которые точно так же не могут быть доказаны, но, открытые Ньютоном, многократно подтверждены опытом.

В силу тезиса Тьюринга невозможность построения машины Тьюринга означает отсутствие алгоритма решения данной проблемы.

Изучение машин Тьюринга закладывает фундамент алгоритмического мышления, сущность которого состоит в том, что нужно уметь разделять процесс вычисления на простые составляющие шаги.

В машине Тьюринга такое разделение доведено до предельной простоты. В современной ЭВМ алгоритмический процесс разделяется не на столь мелкие составляющие, как в машине Тьюринга. Наоборот, есть стремление укрупнить выполняемые машиной процедуры. Например, операция сложения в машине Тьюринга – целая программа, а в ЭВМ это простейшая функция.

"Ум — это зеркало и на
зеркале ума собирается
пыль желаний... Сотрите
пыль и Истина предстанет
пред вами...»