



# ЭЛЕМЕНТЫ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ  
ИНФОРМАТИКИ

8 класс

# Ключевые слова

- алгебра логики
- высказывание
- логическая операция
- конъюнкция
- дизъюнкция
- отрицание
- логическое выражение
- таблица истинности
- законы логики



# Логика



**Аристотель** (384-322 до н.э.).  
Основоположник формальной логики (понятие, суждение, умозаключение).



**Джордж Буль** (1815-1864). Создал новую область науки - Математическую логику (Булеву алгебру или Алгебру высказываний).



**Клод Шеннон** (1916-2001). Его исследования позволили применить алгебру логики в вычислительной технике

# Алгебра логики

**Алгебра логики** определяет правила записи, вычисления значений, упрощения и преобразования высказываний.

В алгебре логики высказывания обозначают буквами и называют **логическими переменными**.

Если высказывание истинно, то значение соответствующей ему логической переменной обозначают единицей ( **$A = 1$** ), а если ложно - нулём ( **$B = 0$** ).

**0** и **1** называются **логическими значениями**.

# Простые и сложные высказывания

Высказывания бывают простые и сложные.

Высказывание называется **простым**, если никакая его часть сама не является высказыванием.

**Сложные** (составные) высказывания строятся из простых с помощью логических операций.

| Название логической операции | Логическая связка      |
|------------------------------|------------------------|
| Конъюнкция                   | «и»; «а»; «но»; «хотя» |
| Дизъюнкция                   | «или»                  |
| Инверсия                     | «не»; «неверно, что»   |

# Логические операции

**Конъюнкция** - логическая операция, ставящая в соответствие каждому двум высказываниям новое высказывание, являющееся истинным тогда и только тогда, когда оба исходных высказывания истинны.

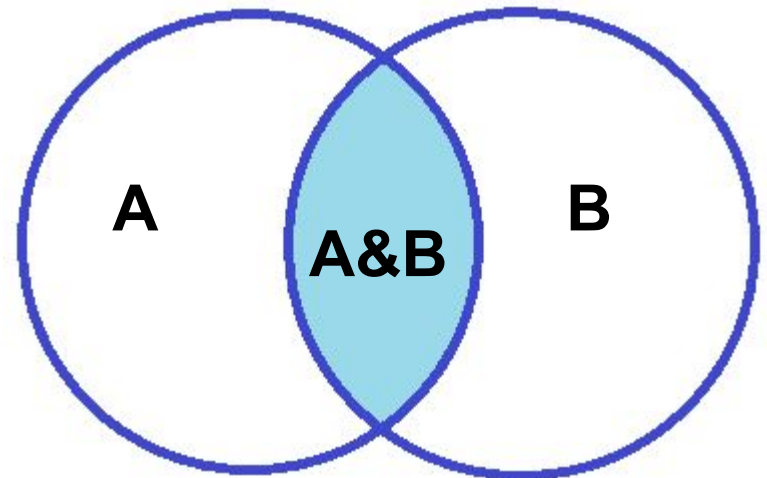
Другое название: **логическое умножение**.

Обозначения:  $\wedge$ ,  $\times$ ,  $\&$ , И.

Таблица истинности:

| A | B | A&B |
|---|---|-----|
| 0 | 0 | 0   |
| 0 | 1 | 0   |
| 1 | 0 | 0   |
| 1 | 1 | 1   |

Графическое представление



# Логические операции

**Дизъюнкция** - логическая операция, которая каждому двум высказываниям ставит в соответствие новое высказывание, являющееся ложным тогда и только тогда, когда оба исходных высказывания ложны.

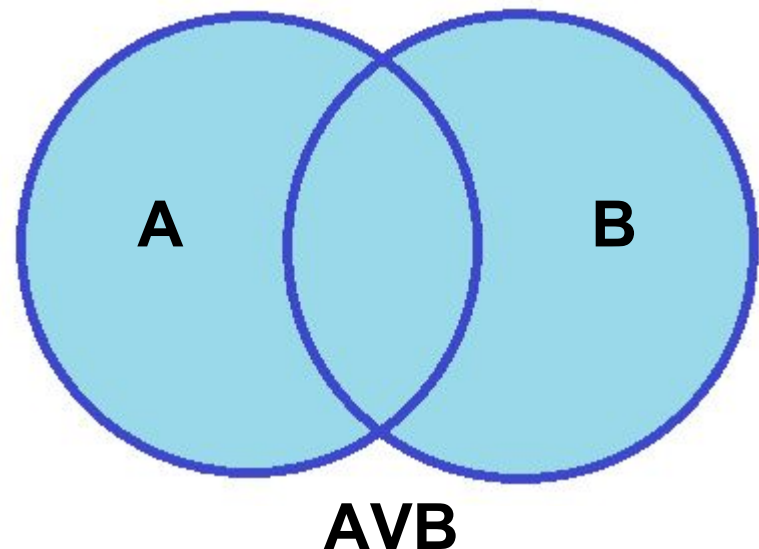
Другое название: **логическое сложение**.

Обозначения:  **$\vee$ , |, ИЛИ, +**.

Таблица истинности:

| A | B | $A \vee B$ |
|---|---|------------|
| 0 | 0 | 0          |
| 0 | 1 | 1          |
| 1 | 0 | 1          |
| 1 | 1 | 1          |

Графическое представление



# Логические операции

**Инверсия** - логическая операция, которая каждому высказыванию ставит в соответствие новое высказывание, значение которого противоположно исходному.

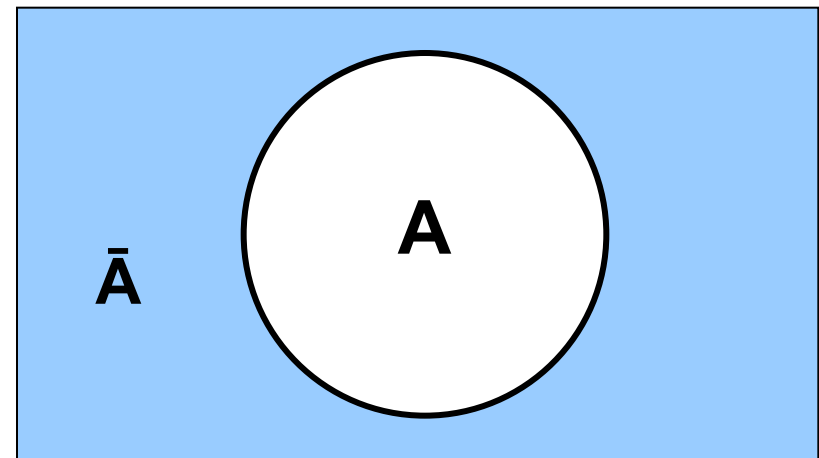
Другое название: **логическое отрицание**.

Обозначения: **НЕ**,  $\neg$ ,  $\bar{\phantom{A}}$ .

Таблица истинности:

| A | $\bar{A}$ |
|---|-----------|
| 0 | 1         |
| 1 | 0         |

Графическое представление



Логические операции имеют следующий приоритет:  
**инверсия, конъюнкция, дизъюнкция.**



# Решаем задачу

Пусть  $A$  = «На Web-странице встречается слово "крейсер"»,  $B$  = «На Web-странице встречается слово "линкор"».

В некотором сегменте сети Интернет 5000000 Web-страниц. В нём высказывание  $A$  истинно для 4800 страниц, высказывание  $B$  - для 4500 страниц, а высказывание  $AVB$  - для 7000 страниц.

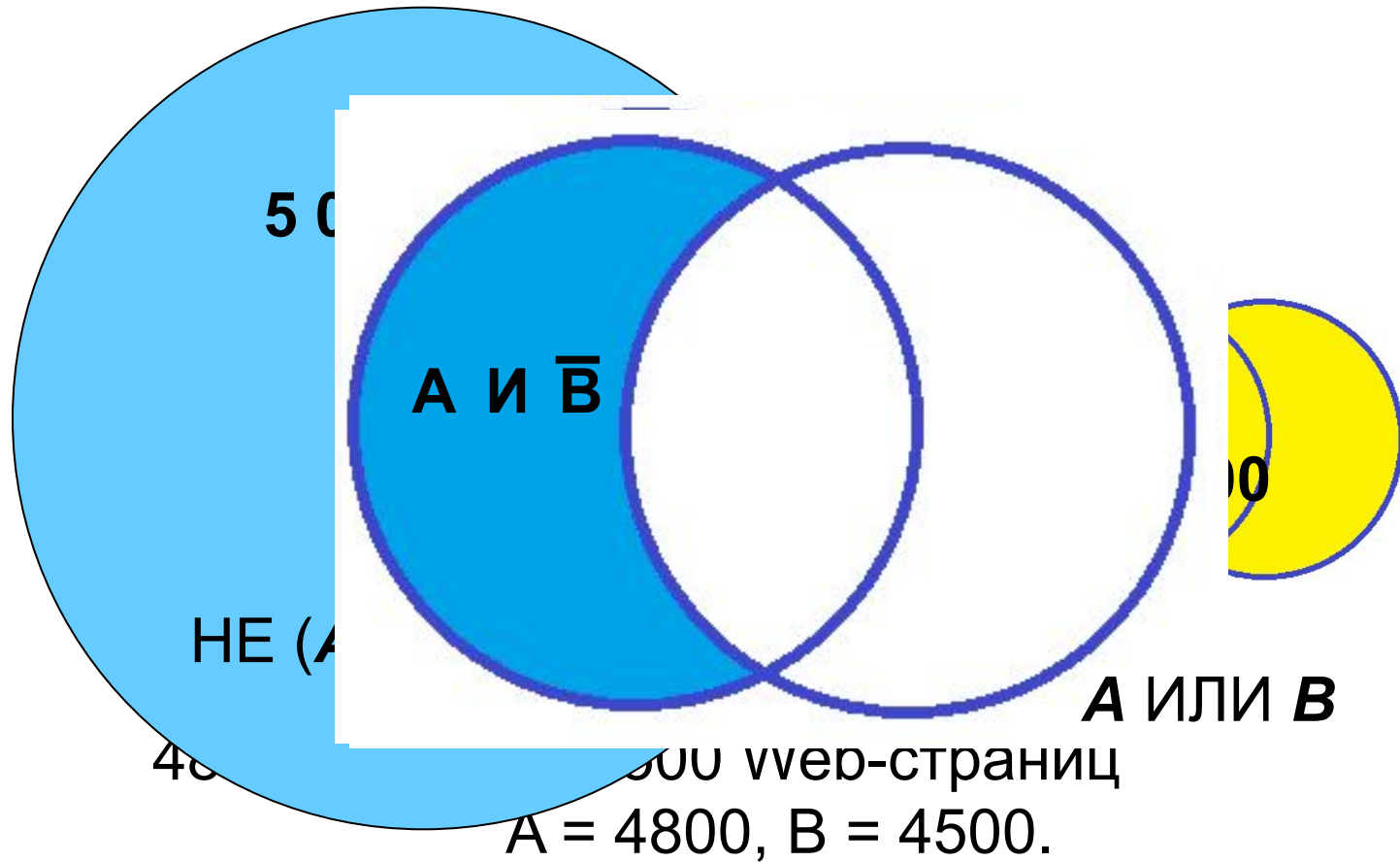
Для какого количества Web-страниц в этом случае будут истинны следующие выражения и высказывание?

а) **НЕ (A ИЛИ B)**;

б) **A & B**;

в) *На Web-странице встречается слово "крейсер" И НЕ встречается слово "линкор"*.

Представим условие задачи графически:



Сегмент Web-страниц  
 На 2500 Web-страницах встречается слово "пинкор" и НЕ (A или B)  
 И НЕ встречается слово "пинкор"  
 $9300 - 7000 = 2300$  Web-страниц A&B

# Построение таблиц истинности для логических выражений

подсчитать  $n$  - число переменных в выражении

подсчитать общее число логических операций в выражении

установить последовательность выполнения логических операций

определить число столбцов в таблице

заполнить шапку таблицы, включив в неё переменные и операции

определить число строк в таблице без шапки:  $m = 2^n$

выписать наборы входных переменных

провести заполнение таблицы по столбцам, выполняя логические операции в соответствии с установленной последовательностью

# Пример построения таблицы ИСТИННОСТИ

$$A \vee A \& B$$

$$n = 2, m = 2^2 = 4.$$

Приоритет операций:  $\&$ ,  $\vee$

| $A$ | $B$ | $A \& B$ | $A \vee A \& B$ |
|-----|-----|----------|-----------------|
| 0   | 0   | 0        | 0               |
| 0   | 1   | 0        | 0               |
| 1   | 0   | 0        | 1               |
| 1   | 1   | 1        | 1               |

# Свойства логических операций

## Законы алгебры-логики

Закон исключения  
третьего

$$A \& \bar{A} = 0$$

$$A \vee \bar{A} = 1$$

Закон повторения

$$A \& A = A$$

$$A \vee A = A$$

Законы операций  
с 0 и 1

$$A \& 0 = 0; A \& 1 = A$$

$$A \vee 0 = A; A \vee 1 = 1$$

Законы общей  
инверсии

$$\overline{A \& B} = \bar{A} \vee \bar{B}$$

$$\overline{A \vee B} = \bar{A} \& \bar{B}$$

# Доказательство закона

Распределительный закон для логического сложения:

$$A \vee (B \& C) = (A \vee B) \& (A \vee C).$$

| A | B | C | B&C | $A \vee (B \& C)$ | $A \vee B$ | $A \vee C$ | $(A \vee B) \& (A \vee C)$ |
|---|---|---|-----|-------------------|------------|------------|----------------------------|
| 0 | 0 | 0 | 0   | 0                 | 0          | 0          | 0                          |
| 0 | 0 | 1 | 0   | 0                 | 0          | 1          | 0                          |
| 0 | 1 | 0 | 0   | 0                 | 1          | 0          | 0                          |
| 0 | 1 | 1 | 1   | 1                 | 1          | 1          | 1                          |
| 1 | 0 | 0 | 0   | 1                 | 1          | 1          | 1                          |
| 1 | 0 | 1 | 0   | 1                 | 1          | 1          | 1                          |
| 1 | 1 | 0 | 0   | 1                 | 1          | 1          | 1                          |
| 1 | 1 | 1 | 1   | 1                 | 1          | 1          | 1                          |

Сопоставив значения  $(A \vee (B \& C))$  и  $((A \vee B) \& (A \vee C))$  для всех комбинаций значений переменных, мы увидим, что они совпадают. Это доказывает распределительный закон.

# Решение логических задач

**Задача.** Коля, Вася и Серёжа гостили летом у бабушки. Однажды один из мальчиков нечаянно разбил любимую бабушкину вазу.

На вопрос, кто разбил вазу, они дали такие ответы:

**Серёжа:** 1) Я не разбивал. 2) Вася не разбивал.

**Вася:** 3) Серёжа не разбивал. 4) Вазу разбил Коля.

**Коля:** 5) Я не разбивал. 6) Вазу разбил Серёжа.

Бабушка знала, что один из её внуков (правдивый), оба раза сказал правду; второй (шутник) оба раза сказал неправду; третий (хитрец) один раз сказал правду, а другой раз - неправду. Назовите имена правдивого, шутника и хитреца.

Кто из внуков разбил вазу?



**Решение.** Пусть  $K$  = «Коля разбил вазу»,  
 $V$  = «Вася разбил вазу»,  
 $C$  = «Серёжа разбил вазу».

Представим в таблице истинности высказывания каждого мальчика. Так как ваза разбита одним внуком, составим не всю таблицу, а только её фрагмент, содержащий наборы входных переменных: 001, 010, 100.

| K | V | C | Утверждение Серёжи |                | Утверждение Васи |   | Утверждение Коли |   |
|---|---|---|--------------------|----------------|------------------|---|------------------|---|
|   |   |   | $\overline{C}$     | $\overline{V}$ | $\overline{C}$   | K | $\overline{K}$   | C |
| 0 | 0 | 1 | 0                  | 1              | 0                | 0 | 1                | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1                  | 0              | 1                | 0 | 1                | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1                  | 1              | 1                | 1 | 0                | 0 |

Исходя из того, что знает о внуках бабушка, следует искать в таблице строки, содержащие в каком-либо порядке три комбинации значений: 00, 11, 01 (или 10). Это первая строка.

Вазу разбил Серёжа, он - хитрец. Шутником оказался Вася. Имя правдивого внука - Коля.





# Вопросы и задания

Алёша, Боря и Гриша нашли в земле старинный сосуд. Разбирается дело Джона Брауна и Смита. Известно, что один из них нашёл и утаил клад. На следствии высказал по два предположения: каждый из подозреваемых сделал два заявления:

1) **Алёша:** «Не делал этого Браун и делал это Смит в V веке».  
**Джон:** «Браун не виновен. Смит сделал это».

2) **Боря:** «Этот сосуд финикийский и изготовлен в III веке».  
**Браун:** «Я не делал этого. Джон не делал этого».

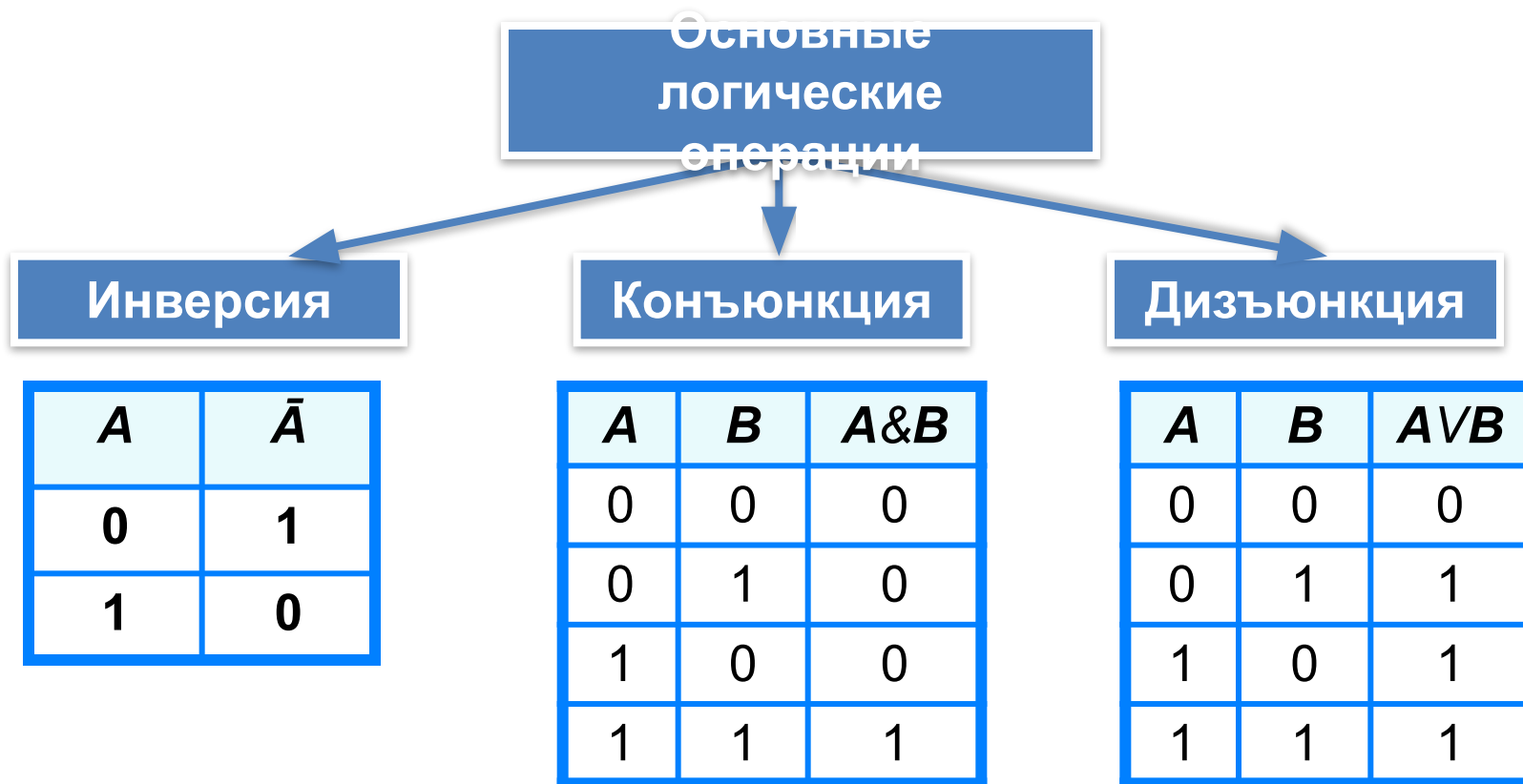
Суд установил, что один из них дважды солгал, другой дважды сказал правду, третий один раз солгал, один раз сказал правду.

3) **Гриша:** «Это сосуд не греческий и изготовлен в IV веке».

Учитель истории сказал ребятам, что каждый из них прав только в одном из двух предположений. Где и в каком веке изготовлен сосуд?

# Опорный конспект

*Высказывание – это предложение на любом языке, содержание которого можно однозначно определить как истинное или ложное.*



*Приоритет выполнения логических операций:  $\neg$ ,  $\&$ ,  $\vee$ .*

# Электронные образовательные ресурсы

1. <http://school-collection.edu.ru/catalog/res/9e997f40-f285-4369-aa7d-88b892beca45/?interface=catalog&class=51&subject=19> – Элементарные логические операции