

# Выпуклые и правильные многогранники

Выполнили работу ученики 9-ых классов: Колесов Даниил,  
Константинов Тимур, Пархоменко Ян, Михайлов Сергей и  
Илларионов Тимур

---

- Фигура в пространстве называется *выпуклой*, если вместе с любыми двумя точками она содержит соединяющий их отрезок.
- Многогранник называется *выпуклой*, если он является выпуклой фигурой.

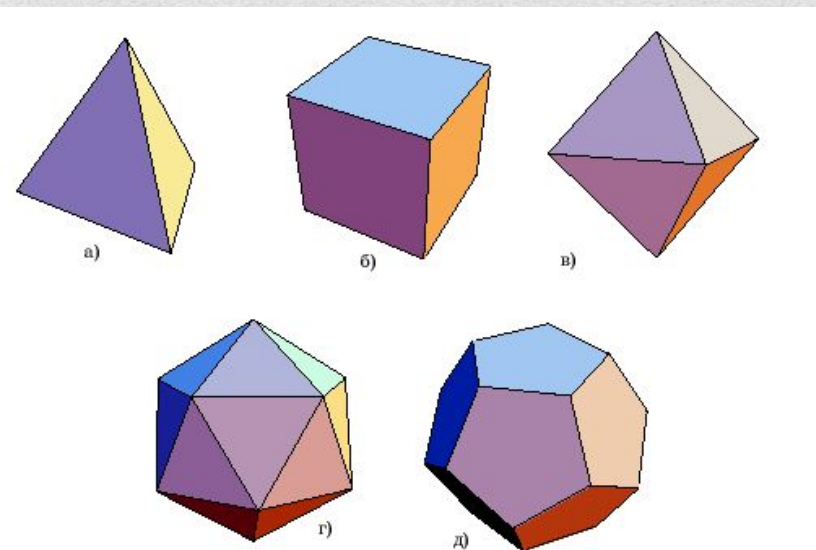


Рис. 1

# Выпуклость

## Теорема

В выпуклом многограннике все грани являются выпуклыми многоугольниками.

### Доказательство

Пусть  $F$  – какая-нибудь грань многогранника  $M$ , и точки  $A$ ,  $B$  – точки, принадлежащие грани  $F$ . Из условия выпуклости многогранника  $M$  следует, что отрезок  $AB$  целиком содержится в многограннике  $M$ . Поскольку этот отрезок лежит в плоскости многоугольника  $F$ , он будет целиком содержаться и в этом многоугольнике, т. е.  $F$  – выпуклый многоугольник

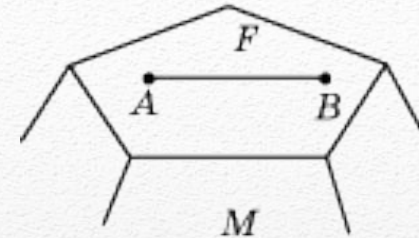


Рис. 2

## Теорема

Выпуклый многогранник может быть составлен из пирамид с общей вершиной, основания которых образуют поверхность многогранника. (рис. 3)

## Доказательство

Пусть  $M$  – выпуклый многогранник. Возьмем какую-нибудь внутреннюю точку  $S$  многогранника  $M$ , т.е. такую его точку, которая не принадлежит ни одной грани многогранника  $M$ . Соединим точку  $S$  с вершинами многогранника  $M$  отрезками. Рассмотрим пирамиды с вершиной  $S$ , основаниями которых являются грани многогранника  $M$ . Эти пирамиды целиком содержатся в  $M$  и все вместе составляют многогранник.

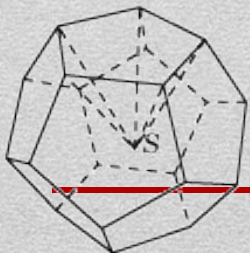


Рис. 3



Рис. 4



# Теорема Эйлера

---

Название	Вершины (В)	Ребра (Р)	Грани (Г)
Треугольная пирамида	4	6	4
Четырехугольная пирамида	5	8	5
Треугольная призма	6	9	5
Четырехугольная призма	8	12	6
N-угольная пирамида	N+1	2N	N+1
N-угольная призма	2N	3N	N+2

### Доказательство

Для доказательства представим, что многогранник сделан из эластичного материала. Вырежем одну из его граней и оставшуюся поверхность ~~растянем на плоскости. Получим сетку, содержащую  $\Gamma' = \Gamma - 1$~~  многоугольников, В вершин и Р ребер.

Справедливо  $B - P + \Gamma' = 1$ .

Выпуклый многогранник называется *правильным*, если его гранями являются равные правильные многоугольники и в каждой вершине сходится одинаковое число граней.

Существует пять видов правильных многогранников:

1. Тетраэдр
2. Октаэдр
3. Икосаэдр
4. Гексаэдр
5. Додекаэдр



# Правильные многогранники

---

Правильные многогранники можно вписывать друг в друга так, что вершины одного многогранника будут находиться в центрах граней другого. Такие многогранники называются **двойственными**.

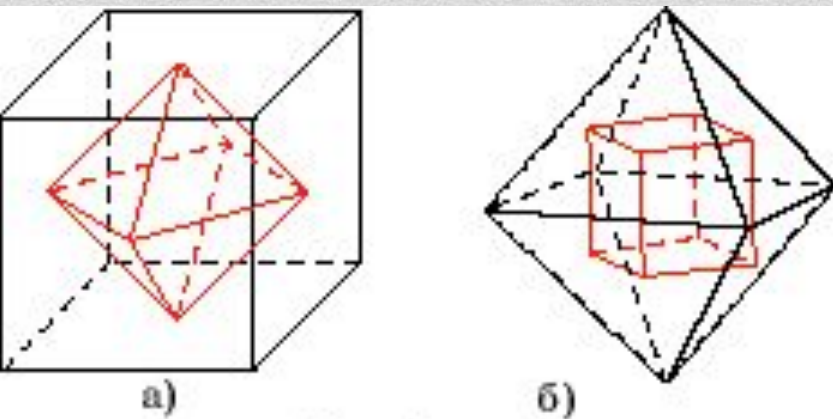


Рис. 1



Выпуклый многогранник называется *топологически правильным*, если его гранями являются многоугольники с одним и тем же числом сторон и в каждой вершине сходится одинаковое число граней. Например: треугольные пирамиды являются ими, а четырехугольные – нет.

Число ребер (горизонталь) Число сторон (вертикаль)	3	4	5
3	V=4 P=6 Г=4 Тетраэдр	V=6 P=12 Г=8 Октаэдр	V=12 P=30 Г=20 Икосаэдр
4	V=8 P=12 Г=4 Куб	-	-
5	V=20 P=30 Г=12 Додекаэдр	-	-

**Спасибо за внимание**

---