Задачи математического и линейного программирования

Общая задача математического программирования формулируется следующим образом: найти экстремум целевой функции

$$Z(X) = f(x_1, x_2, ..., x_n) \rightarrow max(min)$$

(1)

при системе ограничений на переменные

$$\begin{cases} \varphi_i(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, & i = 1,2,...,k, \\ \varphi_j(x_1, x_2, ..., x_n) \le (\ge) 0, & j = k+1, k+2, ..., m. \end{cases}$$

(2)

Итак, математическое программирование – это раздел математики, посвящённый решению задач, связанных с нахождением экстремумов функций нескольких переменных при наличии ограничений на переменные.

Если целевая функция

(1) $$Z(X) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to max(min)$$

и система ограничений

(2) $$\begin{cases} \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, & i = 1, 2, \ldots, k, \\ \varphi_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le (\ge) 0, & j = k+1, k+2, \ldots, m. \end{cases}$$

линейны, то задача математического программирования называется **задачей**

В общем случае задача ЛП может быть записана в виде:

$$Z(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \rightarrow max(min) \qquad (3)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i \\ a_{(i+1)1}x_1 + a_{(i+1)2}x_2 + \ldots + a_{(i+1)n}x_n \le (\ge) b_{i+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le (\ge) b_m \end{cases} \qquad (4)$$

$x_j \ge 0$ $\quad j = 1,2,\ldots,t,$ $\quad t \le n$

т.е. требуется найти экстремум целевой функции (3) и соответствующие ему значения переменных при условии, что переменные удовлетворяют системе ограничений (4) и условию

Задача использования ресурсов

Для изготовления нескольких видов продукци P_1 и P_2 , . P_n используют видов рес S_1 о S_2 S_m ,..., (например, различные материалы, электроэнергию и т.д.).

Объём каждого вида ресурсов ограничен и известен: $\left(b_1, b_2, \ldots, b_m\right)$

a_{ij} $\left(i = 1,2,\ldots m; \quad j = 1,2,\ldots n\right) -$

Известно также количество каждого вида ресурса, расходуемого на производство единицы j-го вида продукции.

Кроме того, известна пр $\left(c_1, c_2, \ldots, c_n\right)$ лучаемая от реализации единицы каждого вида продукции

Табл. 1

Вид ресурсов	Объём ресурсов	a_{ij}			
		P_1	P_2	....	P_n
S_1	b_1	a_{11}	a_{12}	....	a_{1n}
S_2	b_2	a_{21}	a_{22}	....	a_{2n}
.	.	.	.	....	.
.	.	.	.	....	.
.	.	.	.	....	.
S_m	b_m	a_{m1}	a_{m2}	....	a_{mn}
Прибыль		c_1	c_2	....	c_n

Пусть x_j $(j=1,2,\ldots n)-$ количество каждого вида продукции, которое необходимо произвести.

Для первого ресурса имеет место неравенство-ограничение

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1$$

Аналогичные неравенства будут и для остальных

$x_j \ge 0$ в р $j=1,2,\ldots,n$ Следует учитывать, что все значения

,

Общая прибыль, получаемая от реал $Z(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ продукции может быть представлена как функция для которой нужно найти максимальное значение.

Таким образом, математичес $Z(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to max$

исп ов запишется в виде:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m; \end{cases}$$

, $x_j \ge 0$ $j=1,2,\ldots,n$ (5)

Каноническая форма задачи линейного программирования

- В случае, когда все ограничения являются уравнениями и все переменные удовлетворяют условию неотрицательности, задачу линейного программирования называют канонической. Она может быть представлена в координатной, векторной или матричной форме записи.

- *а)* **каноническая задача ЛП <u>в координатной форме</u> имеет вид:**

$$Z(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to max(min) \qquad (6)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \qquad j = 1,2,\ldots,n$$

<u>Данную задачу можно записать, используя знак суммирования:</u>

$$Z(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max(min)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$$

$$i = 1,2,\ldots,m \qquad x_j \geq 0 \qquad j = 1,2,\ldots,n$$

- *б)* каноническая задача ЛП <u>в векторной форме </u>имеет вид:

$$Z(X) = C \cdot X \rightarrow max(min) \qquad (7)$$

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n = B$$

$$X \geq \Theta$$

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

где

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \quad j = 1,2,\ldots,n \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad \Theta = (0,0,\ldots,0)$$

- в) каноническая задача ЛП <u>в матричной форме</u> имеет вид:

$$Z(X) = CX \rightarrow max(min)$$

$$AX = B \qquad X \geq \Theta$$

- где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Приведение общей задачи линейного программирования к канонической форме

При составлении математических моделей экономических задач ограничения в основном формируются в системы неравенств. Поэтому необходимо уметь переходить от них к системам уравнений. Напр $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b$ йное неравенство (8) x_{n+1}

и прибавим к его левой части некоторую величину

$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + x_{n+1} = b$ ство превра $x_{n+1} = b - a_1x_1 - a_2x_2 - \ldots - a_nx_n$

(9) , $x_{n+1} \ge 0$

Неотрицательная переменная называется дополнительной переменной.

Следующая теорема даёт основание для возможности такого преобразования.

Теорема 1.

Каждому решению $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ неравенства (8) соответствует единственное реше $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \beta_{n+1})$ уравнения (9) и неравенств $x_{n+1} \geq 0$, и, наоборот, каждому решению уравнения (9)

$(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \beta_{n+1})$ $\beta_{n+1} \geq 0$ соответствует

р $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$

неравенства (8).

Доказ $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)-$ о.

$a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + \ldots + a_n\beta_n \leq b$ шение неравенства (8).

Тогда $\beta_{n+1} = b - (a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + \ldots + a_n\beta_n)$ $\beta_{n+1} \geq 0$

.

Возьмём число Ясно, что

$$a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + \ldots + a_n\beta_n + \beta_{n+1} = a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + \ldots + a_n\beta_n + b - (a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + \ldots + a_n\beta_n) = b$$

Подставив в уравнение (9), получим

Пусть теперь векто $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \beta_{n+1})$

удовлетворяет $\beta_{n+1} \ge 0$ ению (9) $a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + \dots + a_n\beta_n + \beta_{n+1} = b$

Отбрасывая в левой части последнего равенства неотрицательную величин β_{n+1} , получаем

$a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + \dots + a_n\beta_n \le b$, и т.д.

Таким образом, доказанная теорема фактически устанавливает возможность приведения всякой задачи ЛП к каноническому виду. Для этого достаточно в каждое ограничение, имеющее вид неравенства, ввести свою дополнительную неотрицательную переменную.

Замечание. В дальнейшем мы будем излагать симплекс-метод для канонической задачи ЛП при исследовании целевой функции на минимум. В тех задачах, где $Z(X)$ требуется найти максимум $-Z(X)$, достаточно рассмотреть функцию , найти её минимальное значение, а затем, меняя знак на противоположный, определить $Z(X)$ искомое максимальное значение .