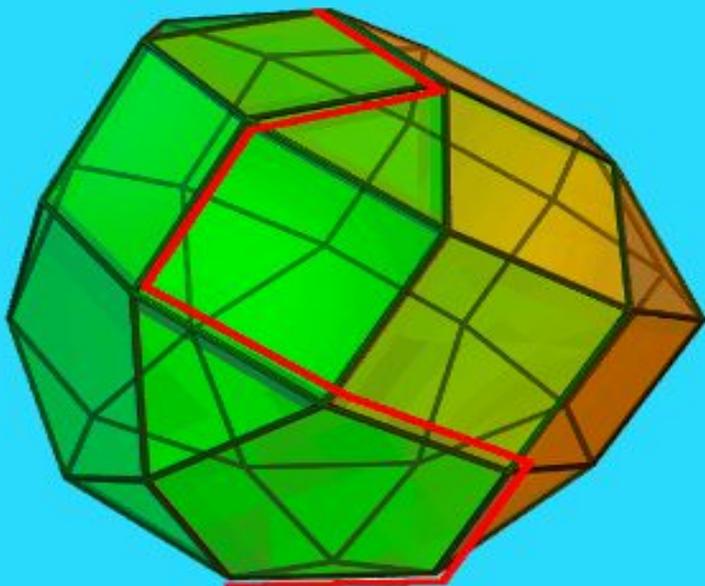


Государственное казенное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Российская таможенная академия»

Ростовский филиал
Кафедра информатики и информационных таможенных технологий

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ



Часть II

Автор: **М.М. Цвиль**, доцент,
кандидат физико-
математических наук, доцент

Ростов- на -Дону
2014г.

Лекция 2. Теория двойственности

2.1. Построение двойственной задачи

Любой задаче ЛП (исходной) можно поставить в соответствие другую, которая называется двойственной или сопряжённой. Они образуют пару двойственных (или сопряжённых) задач ЛП.

Составим двойственную к задаче использования сырья (1.2).

Имеется m видов сырья в количестве b_1, b_2, \dots, b_m , которые используются для изготовления n видов продукции. Известно: a_{ij} – расход i -го вида сырья на единицу j -й продукции; C_j – прибыль от реализации единицы j -го вида продукции. Составить план выпуска продукции, обеспечивающий максимальную прибыль. Математическая модель данной задачи имеет вид (в матричной форме):

$$\begin{aligned} Z(X) &= CX \rightarrow \max; \\ AX &\leq B; \\ X &\geq \Theta. \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

Здесь $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, x_j – объём производства j -го вида продукции.

Предположим, что второй потребитель хочет перекупить сырьё. Составим двойственную задачу, решение которой позволит определить условия продажи сырья. Введём вектор оценок (цен) видов сырья $Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$. Тогда затраты на приобретение сырья в количестве b_i равны $b_i y_j$. Второму

производителю выгодно минимизировать суммарные затраты на приобретение всех видов сырья, поэтому целевая функция имеет вид

$$F(Y) = b_1 y_1 + \dots + b_m y_m \rightarrow \min.$$

Первому производителю невыгодно продавать сырьё, если суммарная стоимость всех видов сырья, расходуемых на каждое изделие j -й продукции меньше прибыли c_j , получаемой при реализации этого изделия, т.е.

$$a_{1j} y_1 + a_{2j} y_2 + \dots + a_{mj} y_m \geq c_j, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

В матричной форме задача имеет следующий вид:

$$F(Y) = BY \rightarrow \min;$$

$$A^T Y \geq C;$$

$$Y \geq \Theta.$$

(2.1.2)

Таким образом, связь между исходной и двойственной задачами состоит в том, что:

- коэффициенты целевой функции исходной задачи являются свободными членами системы ограничений двойственной задачи,
- свободные члены системы ограничений исходной задачи служат коэффициентами целевой функции двойственной задачи,
- матрица коэффициентов системы ограничений двойственной задачи является транспонированной матрицей коэффициентов системы ограничений исходной задачи.

В теории двойственности используются 4 пары двойственных задач:

Исходная задача

Двойственная задача

Симметричные пары

$$1. Z(X) = CX \rightarrow \max$$

$$AX \leq A_0$$

$$X \geq \theta$$

$$2. Z(X) = CX \rightarrow \min$$

$$AX \geq A_0$$

$$X \geq \theta$$

$$1. F(Y) = YA_0 \rightarrow \min$$

$$YA \geq C$$

$$Y \geq \theta$$

$$2. F(Y) = YA_0 \rightarrow \max$$

$$YA \leq C$$

$$Y \geq \theta$$

Несимметричные пары

$$3. Z(X) = CX \rightarrow \max$$

$$AX = A_0$$

$$X \geq \theta$$

$$4. Z(X) = CX \rightarrow \min$$

$$AX = A_0$$

$$X \geq \theta$$

$$3. F(Y) = YA_0 \rightarrow \min$$

$$YA \geq C$$

$$4. F(Y) = YA_0 \rightarrow \max$$

$$YA \leq C,$$

где

$$C = (c_1, c_2, \dots, c_n); Y = (y_1, y_2, \dots, y_m);$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Общие правила составления двойственных задач

Правило 1. Во всех ограничениях исходной задачи свободные члены должны находиться в правой части, а члены с неизвестными — в левой.

Правило 3. Если знаки неравенств в ограничениях исходной задачи « \leq », то целевая функция $Z(X) \rightarrow \max$, а если « \geq », то $Z(X) \rightarrow \min$.

Правило 2. Ограничения-неравенства исходной задачи должны быть записаны так, чтобы знаки неравенств у них были направлены в одну сторону.

Правило 4. Каждому ограничению исходной задачи соответствует неизвестное в двойственной задаче, при этом неизвестное, отвечающее ограничению-неравенству, должно удовлетворять условию неотрицательности, а неизвестное, отвечающее ограничению-равенству, может быть любого знака.

Правило 5. Целевая функция двойственной задачи имеет вид

$$F(Y) = b_1 y_1 + \dots + b_m y_m,$$

где b_1, b_2, \dots, b_m – свободные члены в ограничениях исходной задачи.

Правило 6. Целевая функция $F(Y)$ должна оптимизироваться противоположным по сравнению с $Z(X)$ образом.

Правило 7. Каждому неизвестному x_j , $j = 1, 2, \dots, n$ исходной задачи соответствует ограничение в двойственной задаче. Совокупность этих n ограничений (вместе с условиями неотрицательности неизвестных y_i , соответствующих ограничениям-неравенствам исходной задачи) образует систему ограничений двойственной задачи. Все ограничения двойственной задачи имеют вид неравенств, свободные члены которых находятся в правых частях, а члены с неизвестными y_1, y_2, \dots, y_m – в левых.

2.2. Одновременное решение прямой и двойственной задач

Одновременное решение прямой и двойственной задач основано на использовании теорем двойственности. Теоремы двойственности позволяют установить взаимосвязь между оптимальными решениями пары двойственных задач. Решив одну из пары двойственных задач, можно или найти оптимальное решение другой задачи, не решая ее, или установить его отсутствие. Возможны следующие случаи:

- обе задачи из пары двойственных имеют оптимальные решения;
- одна из задач не имеет решения в виду неограниченности целевой функции, а другая не имеет решения ввиду несовместности системы ограничений.

Теорема 2.2.1 (1-я теорема двойственности). Если одна из задач взаимно двойственной пары разрешима, то разрешима и другая задача, при этом оптимальные значения целевых функций совпадают. Если целевая функция одной из задач не ограничена (сверху – для задачи максимизации, снизу – для задачи минимизации), то множество допустимых планов другой задачи пусто.

Следствие. Для того, чтобы допустимые решения \bar{X} и \bar{Y} двойственной пары задач были оптимальны, необходимо и достаточно, чтобы значения целевых функций на этих планах совпадали: $Z(\bar{X}) = F(\bar{Y})$.

Теорема 2.2.2 (2-я теорема двойственности). Пусть имеется симметричная пара двойственных задач

$$\begin{aligned}
 Z(X) &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max, & F(Y) &= \sum_{i=1}^m b_i y_i \rightarrow \min, \\
 \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, & \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i &\geq c_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \\
 x_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n; & y_i &\geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.
 \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Для того чтобы допустимые решения $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ являлись оптимальными решениями пары двойственных задач, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие равенства:

$$x_j \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i - c_j \right) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n; \tag{2.2.2}$$

$$y_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i \right) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \tag{2.2.3}$$

Иначе, если при подстановке оптимального решения в систему ограничений i -е ограничение исходной задачи выполняется как строгое неравенство, то i -я координата оптимального решения двойственной задачи равна нулю, и, наоборот, если i -я координата оптимального решения двойственной задачи отлична от нуля, то i -е ограничение исходной задачи удовлетворяется оптимальным решением как равенство.

Пример 2.2. Для данной задачи составить двойственную, решить ее графическим методом и, используя вторую теорему двойственности, найти решение исходной задачи:

$$Z(X) = -2x_1 + 4x_2 + 14x_3 + 2x_4 \rightarrow \min;$$

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 6 & | y_1; \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 30 & | y_2; \end{cases}$$

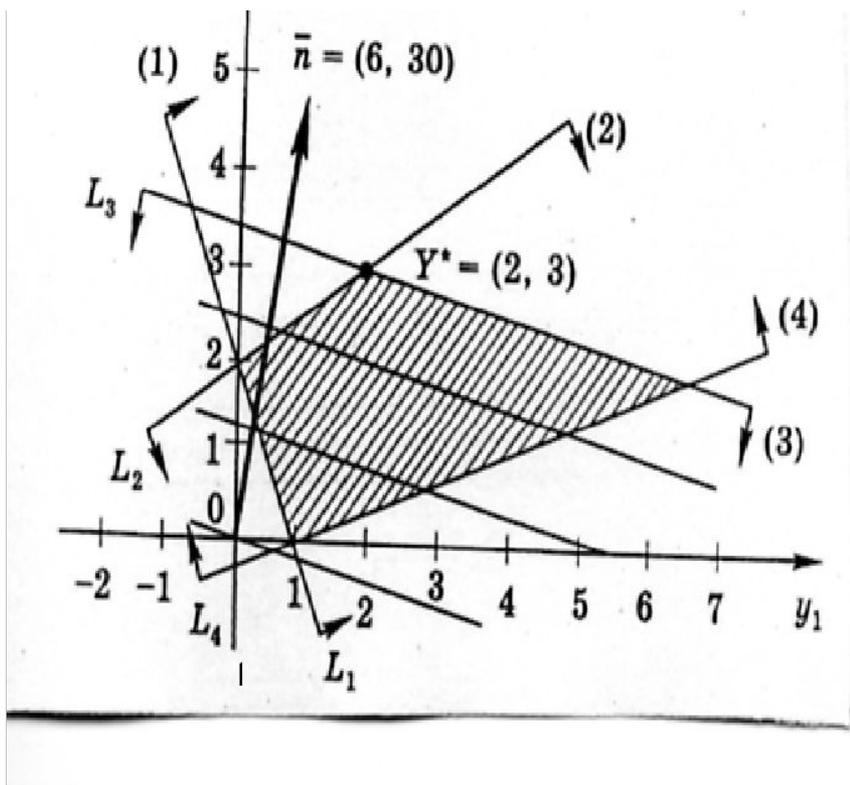
$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Решение. Составим двойственную задачу

$$F(Y) = 6y_1 + 30y_2 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} -2y_1 - y_2 \leq -2; & (1) \\ -y_1 + 2y_2 \leq 4; & (2) \\ y_1 + 4y_2 \leq 14; & (3) \\ 2y_1 - 5y_2 \leq 2. & (4) \end{cases}$$

Решим эту задачу графическим методом. На рис. 6 изображены область допустимых решений задачи, нормаль $\bar{n} = (6, 30)$ линий уровня, линии уровня и оптимальное решение задачи $Y^* = (2, 3)$.



$$Y^* = L_2 \cap L_3,$$

$$+ \begin{cases} -y_1 + 2y_2 = 4, & (L_2); \\ y_1 + 4y_2 = 14, & (L_3); \end{cases}$$

$$6y_2 = 18;$$

$$y_2 = 3, \quad y_1 = 2;$$

$$Y^* = (2, 3);$$

Рис. 6

$$F(Y^*) = 6 \cdot 2 + 30 \cdot 3 = 102.$$

Подставим оптимальное решение $Y^* = (2, 3)$ в систему ограничений.

Получим, что ограничения (1) и (4) выполняются как строгие неравенства:

$$\begin{cases} -2 \cdot 2 - 3 < -2 \Rightarrow x_1 = 0; \\ -2 + 2 \cdot 3 = 4; \\ 2 + 4 \cdot 3 = 14; \\ 2 \cdot 2 - 5 \cdot 3 < 2 \Rightarrow x_4 = 0. \end{cases}$$

Согласно второй теореме двойственности соответствующие координаты оптимального решения двойственной, т.е. исходной задачи, равны нулю: $x_1 = x_4 = 0$. Учитывая это, из системы ограничений исходной задачи получим

$$+ \begin{cases} -x_2 + x_3 = 6, & | \times 2; \\ 2x_2 + 4x_3 = 30; \end{cases}$$

$$6x_3 = 42;$$

$$x_3 = 7, x_2 = 1; X^* = (0, 1, 7, 0).$$

Ответ: $\min Z(X) = 102$ при $X^* = (0, 1, 7, 0)$.

Лекция 3. Транспортная задача линейного программирования

3.1. Постановка задачи и её математическая модель

Некоторый однородный продукт, сосредоточенный у m поставщиков A_i в количестве a_i ($i = 1, 2, \dots, m$) единиц соответственно, необходимо доставить n потребителям B_j в количестве b_j ($j = 1, 2, \dots, n$). Известна стоимость c_{ij} перевозки единицы груза i -го поставщика к j -му потребителю. Необходимо составить план перевозок, позволяющий вывезти все грузы, полностью удовлетворить потребности, и имеющий минимальную стоимость.

Обозначим через x_{ij} количество единиц груза, запланированного к перевозке от i -го поставщика к j -му потребителю, тогда условие задачи можно записать в виде табл. 3.1, которую также называют матрицей планирования.

Таблица 3.1

Поставщики	Потребители				Запасы
	B_1	B_2		B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	...	c_{2n} x_{2n}	a_2
...
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	...	c_{mn} x_{mn}	a_m
Запросы	b_1	b_2	...	b_n	$\sum a_j = \sum b_i$

Составим математическую модель задачи. Так как от i -го поставщика к j -му потребителю запланировано x_{ij} единиц груза, то стоимость этой перевозки составит $c_{ij}x_{ij}$. Стоимость всего плана выразится двойной суммой

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}x_{ij}.$$

Систему ограничений получаем из следующих условий:

а) все грузы должны быть вывезены, т.е. $\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i$ (эти уравнения

получаются из строк);

б) все потребности должны быть удовлетворены, т.е. $\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j$.

Таким образом, математическая модель транспортной задачи может быть записана следующим образом:

– найти минимум линейной функции

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad (3.1)$$

при ограничениях

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \\ x_{ij} \geq 0. \end{array} \right. \quad (3.2)$$

$$(3.3)$$

В рассматриваемой модели предполагается, что суммарные запасы равны суммарным запросам потребителей:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j. \quad (3.4)$$

Такая задача называется задачей с правильным балансом, а её модель – закрытой. Если же равенство (3.4) не выполняется, то задача называется задачей с неправильным балансом, а её модель – открытой.

Теорема 3.1. Для того чтобы транспортная задача ЛП имела решение, необходимо и достаточно, чтобы суммарные запасы поставщиков равнялись суммарным запросам потребителей (см. (3.4)).

Доказательство теоремы опускается.

Особенности решения транспортных задач с неправильным балансом:

1. Если суммарные запасы поставщиков превосходят суммарные запросы потребителей, т.е.

$$\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j,$$

то необходимо ввести фиктивного $(n + 1)$ -го потребителя с запросами

$b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j$, равными разности суммарных запасов поставщиков и

запросов потребителей, и нулевыми стоимостями перевозок единиц груза

$$c_{i(n+1)} = 0 \quad \forall i.$$

2. Если суммарные запросы потребителей превосходят суммарные запасы поставщиков, т.е.

$$\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j,$$

то необходимо ввести фиктивного $(m+1)$ -го поставщика с запасами $a_{m+1} =$

$\sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i$, равными разности суммарных запросов потребителей и

запасов поставщиков, и нулевыми стоимостями перевозок единиц груза

$$c_{(m+1)j} = 0 \quad \forall j.$$

2.2. Построение первоначального опорного плана

Метод минимальной стоимости. Данный метод позволяет построить решение, которое достаточно близко к оптимальному, так как при его применении используются стоимости транспортной задачи c_{ij} $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$. Он состоит из ряда однотипных шагов, на каждом из которых заполняется только одна клетка, соответствующая $\min_{i,j} \left\{ c_{ij} \right\}$ (в отличие от метода северо-западного угла).

Также на каждом шаге исключается из рассмотрения только одна строка (поставщик, если его запасы заканчиваются) или только один столбец (потребитель, если его запросы выполнены).

Затем переходят к клетке, соответствующей $\min_{i,j} \left\{ c_{ij} \right\}$ из неисключённых клеток и т.д. При этом, если поставщик ещё не исключён, но его запасы равны нулю, то на том шаге, когда от него требуется поставить груз, в соответствующую клетку таблицы заносится базисный нуль и лишь потом поставщик исключается из рассмотрения. Аналогично поступают и с потребителем.

2.3 Метод потенциалов

Из-за громоздкости симплексных таблиц, содержащих m n неизвестных, и большого объёма вычислительных работ для получения оптимального плана используются более простые методы. Самым распространённым является метод потенциалов.

Теорема 2.3.1 (признак оптимальности опорного решения). Если план опорный X^* транспортной задачи является оптимальным, то ему соответствует совокупность m чисел U_i^* и n чисел V_j^* , удовлетворяющих условиям

$$U_i^* + V_j^* = c_{ij} \quad (2.3.1)$$

для занятых клеток;

$$U_i^* + V_j^* \leq c_{ij} \quad (2.3.2)$$

для свободных клеток.

Числа U_i называются потенциалами поставщиков, а V_j – потенциалами потребителей.

Замечание. Если хотя бы одна незанятая клетка не удовлетворяет условию (2.3.2), то опорный план не является оптимальным, и его можно улучшить, вводя в базис вектор, соответствующий клетке, для которой нарушается условие оптимальности (т.е. в эту клетку надо переместить некоторое количество груза).

Рассмотрим алгоритм решения транспортных задач методом потенциалов:

1. Проверить выполнение необходимого и достаточного условия разрешимости задачи. Если задача имеет неправильный баланс, то вводится фиктивный поставщик или потребитель с недостающими запасами или запросами и нулевыми стоимостями перевозок.

2. Построить начальное опорное решение (методом минимальной стоимости или каким-либо другим методом), проверить правильность его построения по количеству занятых клеток (их должно быть $m + n - 1$) и убедиться в линейной независимости векторов условий.

3. Построить систему потенциалов, соответствующих опорному решению. Для этого решают систему уравнений

$$u_i + v_j = c_{ij} \text{ при } x_{ij} > 0,$$

которая имеет бесконечное множество решений. Для нахождения частного решения системы одному из потенциалов (обычно тому, которому соответствует большее число занятых клеток) задают произвольно некоторое значение (чаще нуль). Остальные потенциалы однозначно определяются по формулам

$$u_i = c_{ij} - v_j \text{ при } x_{ij} > 0,$$

если известен потенциал v_i , и

$$v_j = c_{ij} - u_i \text{ при } x_{ij} > 0,$$

если известен потенциал u_j .

4. Проверить выполнение условия оптимальности для свободных клеток таблицы. Для этого вычисляют оценки для всех свободных клеток по формулам

$$\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$$

и те из них, которые больше нуля, записывают в левые нижние углы клеток. Если для всех свободных клеток $\Delta_{ij} \leq 0$, то вычисляют значение целевой функции и решение задачи заканчивается, так как полученное решение является оптимальным. Если же имеется хотя бы одна клетка с положительной оценкой, опорное решение не является оптимальным.

5. Перейти к новому опорному решению, на котором значение целевой функции будет меньше. Для этого находят клетку таблицы задачи, которой соответствует наибольшая положительная оценка

$$\max\{\Delta_{ij}\} = \Delta_{lk}.$$

Строят цикл, включающий в свой состав данную клетку и часть клеток, занятых опорным решением. В клетках цикла расставляют поочередно знаки «+» и «-», начиная с «+» в клетке с наибольшей положительной оценкой. Осуществляют сдвиг (перераспределение груза) по циклу на величину $\theta = \min_{\text{"_"}}\{x_{ij}\}$. Клетка со знаком «-», в которой достигается $\min_{\text{"_"}}\{x_{ij}\}$, остается пустой. Если минимум достигается в нескольких клетках, то одна из них остается пустой, а в остальных проставляют базисные нули, чтобы число занятых клеток оставалось равным $m + n - 1$.