# ЛЕКЦИЯ № 7-9

## *Дифференциальные уравнения высших порядков. Уравнения, допускающие понижение порядка. Линейные дифференциальные уравнения, однородные и неоднородные*

Дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнения вида

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

или, если его можно разделить относительно старшей производной

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right)$$

Решением уравнения n-го порядка является всякая n раз дифференцируемая функция y = y(x), которая обращает это уравнение в тождество.

Задача Коши для уравнения n-го порядка состоит в том, чтобы найти такое решение, которое удовлетворяет условиям $y = y_0, y' = y'_0, \ldots y^{(n-1)} = y^{(n-1)}{}_0$ при $x = x_0$, где $x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$ - заданные числа, которые называются начальными функциями или начальными условиями.

Общим решением дифференциального уравнения n-го порядка называется функция $y = \varphi\left(x, C_1, C_2, \ldots C_n\right)$, зависящая от n произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots C_n$ и такая, что:

1) она удовлетворяет уравнение при любых значениях постоянных $C_1, C_2, \ldots C_n$

2) при заданных начальных условиях

$$y_{x=x_0} = y_0 \quad , \quad y'_{x=x_0} = y'_0 \quad , \ldots, \quad y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$$

постоянные $C_1, C_2, \ldots C_n$ можно подобрать так, что функция $y = \varphi\left(x, C_1 \ldots C_n\right)$ будет удовлетворять этим условиям.

## *Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка*

Простейшими уравнением n-го порядка, допускающие понижение порядка является уравнение вида: $y^{(n)} = f(x)$

Решение такого уравнения находится n-кратным интегрированием, а именно:

$$y = \iint \dots \int f(x)dx + \frac{C_1 x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{C_2 x^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + C_{n-1}x + C_n$$

<u>Пример.</u> Найти общее решение уравнения : $y''' = 6x - 5$

<u>Решение.</u> Интегрируя один раз получим:

$$y'' = 3x^2 - 5x + C_1$$

Далее получим:

$$y' = x^3 - \frac{5x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

Окончательно:

$$y = \frac{x^4}{4} - \frac{5x^3}{6} + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

Это и есть общее решение уравнения.

Уравнение вида

$$y'' = f(x, y')$$

не содержит явным образом искомой функции.

Для решения этого уравнения можно понизить порядок. Обозначим

$y' = p$ тогда $y'' = p'$

Подставим эти выражения в исходное уравнение получим уравнение первого порядка

$$p' = f(x, p)$$

Проинтегрировав это уравнение получим:

$$p = p(x_1, C_1)$$

Затем из формулы $y' = p$ получим общий интеграл

$$y = \int p(x_1, C_1)dx + C_2$$

Пример. Решить дифференциальное уравнение

$$y'' - \frac{y'}{1+x} = 0$$

Решение. Подстановка $y' = p$, $y'' = p'$.

Тогда из данного уравнения второго порядка получим уравнение первого порядка с разделяющимися переменными

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p}{1+x} \quad \text{или} \quad \frac{dp}{p} = \frac{dx}{1+x}$$
,

Откуда

$$\ln p = \ln(1+x) + \ln C_1$$
,

тогда $p = C_1(1+x)$

Так как $p = y' = \frac{dy}{dx}$, то $y' = C_1(1+x)$

Интегрируя последнее уравнение , получаем общее решение исходного уравнения:

$$y = C_1 \int (1+x)dx = C_1\left(x + \frac{x^2}{2}\right) + C_2$$

Уравнение вида: $y'' = f(y, y')$

не содержит явным образом независимую переменную x.

Для его решения снова $y' = \frac{dy}{dx} = p$ , но теперь мы будем считать p функцией от y. Тогда

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$$

В результате получим уравнение первого порядка относительно вспомогательной функции p(y)

$$p\frac{dp}{dy} = f(y, p)$$

Решив это уравнение, найденную функцию p(y) подставим в исходную подстановку. В результате получим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = p(y_1, C_1)$$

Интегрируя это уравнение, получаем общее решение

$$\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0$$

<u>Пример.</u> Решить дифференциальное уравнение

$$1 + y'^2 = y\,y''$$

<u>Решение.</u> Сделаем замену $y' = \dfrac{dy}{dx}$, $y'' = \dfrac{d^2 y}{dx^2} = p\dfrac{dp}{dy}$

Получим $yp\dfrac{dp}{dy} = 1 + p^2$ или $\dfrac{pdp}{1+p^2} = \dfrac{dy}{y}$

Интегрируя это выражение, получим: $\dfrac{1}{2}\ln\left(1 + p^2\right) = \ln y + \ln C_1$

$\ln\left(1 + p^2\right) = 2\ln y + 2\ln C_1$ или $1 + p^2 = C_1{}^2 y^2$

Возвращаясь к переменной у, получим $1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = C_1{}^2 y^2$

или $\dfrac{dy}{dx} = \pm\sqrt{C_1{}^2 y^2 - 1}$ ,

Интегрируя, получим $\dfrac{dy}{\sqrt{C_1{}^2 y^2 - 1}} = \pm dx$

$$\frac{1}{C_1}\ln\left(C_1 y_1 + \sqrt{C_1{}^2 y^2 - 1}\right) = \pm\left(x + C_2\right)$$

# *Линейные дифференциальные уравнения*

Многие задачи математики, механики, электротехники и других технических наук приводят к линейным дифференциальным уравнениям.

Уравнение вида $a_0 y \quad + a_2 y' + a_2 y = f(x)$ , где $a_0, a_1, a_2,$ функции от x или постоянные числа, называется линейным дифференциальным уравнением второго порядка.

$a_0, a_1, a_2,$ называются коэффициентами уравнения , а функция $f(x)$ - его свободным членом.

Если свободный член равен нулю, т.е. $f(x) = 0$ , то уравнение называется *линейным однородным* уравнением, в противном случае – *линейным неоднородным.*

## *Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами*

Уравнение вида: $ay'' + by' + cy = f(x)$

где a, b, c постоянные , называются *дифференциальными уравнениями второго порядка с постоянными коэффициентами.*

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение вида

$$ay'' + by' + cy = 0$$

Это уравнение может быть приведено к виду

$$y'' + py' + qy = 0$$

Две функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ называются линейно независимыми решениями линейного однородного уравнения, если их отношение отлично от нуля, т.е. $\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq 0$

<u>Теорема.</u> Если $y_1$ и $y_2$ два линейно независимых решения уравнения , то

$$y = C_1 y_2 + C_2 y_2$$

есть его общее решение, где $C_1$ и $C_2$ - постоянные.

Найдем решение уравнения $y'' + py' + qy = 0$

Частные решения этого уравнения будем искать в виде

$y = e^{kx}$, где $k = const$

Тогда $y' = k\,e^{kx}$, $y'' = k^2\,e^{kx}$

Подставляя $y, \; y' \; и \; y''$ в исходное уравнение, получим

$$e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0$$

Так как $e^{kx} \neq 0$, то $k^2 + pk + q = 0$

Это уравнение называется *характеристическим уравнением* по отношению к линейному однородному уравнению с постоянными коэффициентами.

При решении этого уравнения возможны три случая:

1) $k_1$ и $k_2$ действительные и различные числа. Тогда общее решение уравнения будет иметь вид $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$

2) $k_1$ и $k_2$ действительные равные корни. Тогда общее решение имеет вид

$$y = e^{k_1 x}(C_1 + C_2 x)$$

3) $k_1$ и $k_2$ комплексные корни: $k_1 = \alpha + \beta\, i$, $k_2 = \alpha - \beta . i$ Тогда общее решение имеет вид:

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$$

Пример 1. Решить уравнение $y'' - 4y' + 3y = 0$ .

Составляем характеристическое уравнение $k^2 - 4k + 3 = 0$ .

Его корни равны $k_1 = 1,\ k_2 = 3$ .

Записываем общее решение: $y = c_1 e^x + C_2 e^{3x}$

Пример 2. Решить уравнение $y'' + 25y = 0$

Характеристическое уравнение имеет вид: $k^2 + 25 = 0$

Корни этого уравнения равны: $k_1 = 5i,\ k_2 = -5i$

Тогда общее решение примет вид:

$$y = C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x$$

Пример 3. Решить уравнение $y'' - 6y' + 9y = 0$

Характеристическое уравнение: $k^2 - 6k + 9 = 0$

Находим корни этого уравнения: $k_1 = k_2 = 3$

Значит общее решение будет иметь вид

$$y = e^{3x}(C_1 + C_2 x)$$

## *Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами*

Пусть дано неоднородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

Структура общего решения этого уравнения определяется следующей теоремой:

Теорема. Общее решение неоднородного уравнения равно сумме решения $y_0$ однородного дифференциального уравнения $y'' + py' + qy = 0$ и какого-нибудь частного решения $\overline{y}$ неоднородного уравнения, т.е.

$$y = y_0 + \overline{y}$$

Для нахождения частного решения используют два метода:

1) метод неопределенных коэффициентов;

2) метод вариации произвольной постоянной

## *Метод неопределенных коэффициентов*

1) Пусть правая часть уравнения представляет собой произведение показательной функции на многочлен:

$$f(x) = B_n(x)e^{\alpha x} = (B_0x^n + B_1x^{n-1} + \ldots + B_n)e^{\alpha x}$$

где $B_n(x)$ -многочлен n-й степени.

Тогда возможны следующие случаи:

а) Число α не является корнем характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$
В этом случае частное решение нужно искать в виде

$$\overline{y} = P_n(x)e^{\alpha x} = (A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_n)e^{\alpha x}$$

б) Число α является однородным корнем характеристического уравнения. В этом случае частное решение нужно искать в виде :

$$\underline{y} = x P_n(x) e^{\alpha x}$$

в) Число α есть двукратный корень характеристического уравнения. Тогда частное решение следует искать в виде

$$\overline{y} = x^2 P_n(x) e^{\alpha x}$$

Пример 1. Решить уравнение $y'' + 5y' - 6y = x$

Решение. Найдем общее решение однородного дифференциального уравнения $y'' + 5y' - 6y = 0$. Составим характеристическое уравнение и найдем его корни $k^2 + 5k - 6 = 0, \qquad k_1 = 1, \quad k_2 = -6$

Общее решение однородного уравнения имеет вид $y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{-6x}$

Так как в правой части $\alpha = 0$, то правую часть можно представить в виде $f(x) = x e^{0x}$, причем 0 не является корнем характеристического уравнения, поэтому частное решение будем искать в виде

$$\overline{y} = A_0 x + B \quad \text{, тогда} \quad y' = A, \quad y'' = 0$$

Подставляя эти выражения в исходное уравнение, получим

$$5A_0 - 6(A_0 x + B) = x$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x, получим

$$-6A_0 = 1, \quad 5A_0 - 6B = 0 \quad \text{или} \quad A_0 = -\frac{1}{6}, \quad B = \frac{5}{36}$$

Следовательно, частное решение примет вид $\overline{y} = -\frac{1}{6}x + \frac{5}{36}$

Общее решение $y = y_0 + \overline{y}$ получится в виде

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-6x} - \frac{1}{6}x + \frac{5}{36}$$

Пример 2. Решить дифференциальное уравнение $y'' - 2y' + y = e^x$

Решение. Найдем решения однородного уравнения $y'' - 2y' + y = 0$. Здесь характеристическое уравнение имеет вид $k^2 - 2k + 1 = 0$. Его корни $k_1 = k_2 = 1$. Общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y_0 = (C_1 + C_2 x)e^x$$

$\alpha = 1$ является двукратным корнем характеристического уравнения, значит частное решение уравнения имеет вид

$\bar{y} = Ax^2 e^x$, тогда $\bar{y}' = A(2x + x^2)e^x$, $\bar{y}'' = A(2 + 4x + x^2)e^x$

Подставляя $\bar{y}, \bar{y}', \bar{y}''$ в заданное дифференциальное уравнение, получим

$$A\left[(2 + 4x + x^2) - 2(2x + x^2) + x^2\right] = 1$$

Откуда $2A = 1,\quad A = \frac{1}{2}$

Следовательно, частное решение имеет вид $\bar{y} = \frac{1}{2}x^2 e^x$

Общее решение уравнения равно

$$y = (C_1 + C_2 x)e^x + \frac{1}{2}x^2 e^x$$

2) Пусть правая часть уравнения имеет вид

$$f(x) = e^{\alpha x}(A_n(x)\cos\beta x + B_m(x)\sin\beta x)$$

где $A_n(x)$ и $B_m(x)$ многочлены.

а) если $\alpha \pm i\beta$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решения уравнения следует искать в виде

$$\overline{y} = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x)$$

где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ - многочлены, степень которых равна наивысшими степенями многочленов $A_n(x)$ и $B_m(x)$.

б) Если $\alpha \pm i\beta$ есть корень характеристического уравнения, то частное решение имеет вид

$$\overline{y} = x\,e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x)$$

Пример. Решить уравнение $y'' + 2y' + 5y = 2\cos x$

Решение. Корни характеристического уравнения $k^2 + 2k + 5 = 0$ равны $k_1 = -1 + 2i, \quad k_2 = -1 - 2i$ . Поэтому общий интеграл соответствующего однородного уравнения $y'' + 2y' + 5y = 0$ является функция $y_0 = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$

Частное решение ищем в виде $\overline{y} = P\cos x + Q\sin x$

Тогда $\overline{y}' = -P\sin x + Q\cos x$ , $\overline{y}'' = -P\cos x - Q\sin x$ , где P и Q постоянные числа.

Подставляя $\overline{y}, \overline{y}', \overline{y}''$ в данное уравнение, получим

$$4P + 2Q = 2 \qquad \text{и} \qquad -2P + 4Q = 0$$

Откуда $P = \frac{2}{5}, \ Q = \frac{1}{5}$

Частное решение: $\overline{y} = \frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x$

Окончательно, общее решение примет вид

$$y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + \frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x$$