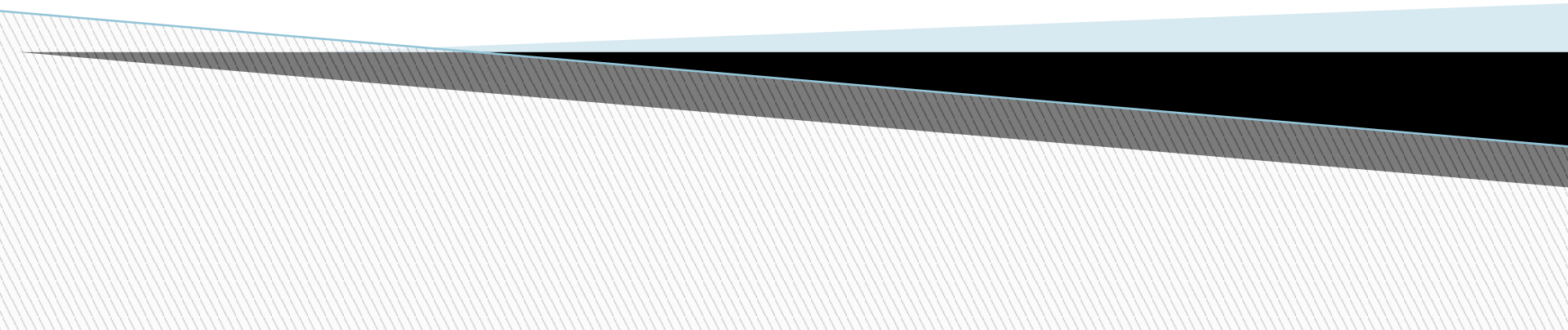


# О некоторых особенностях использования численных методов приближения функций

Янченко К.А.- АИМ103, Нигаматов Р.Ф.-АИМ101  
Руководитель: Лукманов Р.Л.



# Задача интерполяции

□ Построить многочлен

$$\square L_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad (1)$$

□ принимающий в заданных узлах заданные значения:

$$\square \begin{cases} L_n(x) = f(x_i) \\ i = 0, 1, \dots, n \end{cases} \quad (2)$$

□ Получается система линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$$

# Интерполяционные многочлены Лагранжа и Ньютона

## 1. Интерполяционный многочлен Лагранжа

строится в виде:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n c_i(x) f(x_i), \quad \text{где } c_i(x) = \frac{\prod_{k \neq i} (x - x_k)}{\prod_{k \neq i} (x_k - x_i)}$$

## 2. Интерполяционный многочлен Ньютона имеет

вид:

$$L_n(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + c_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

Коэффициенты  $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$  могут быть найдены последовательно из условий интерполяции (2).

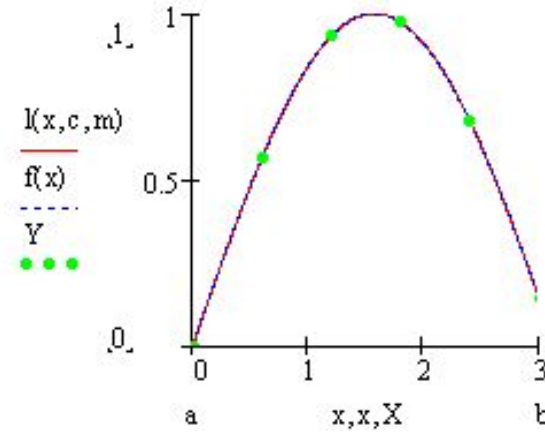
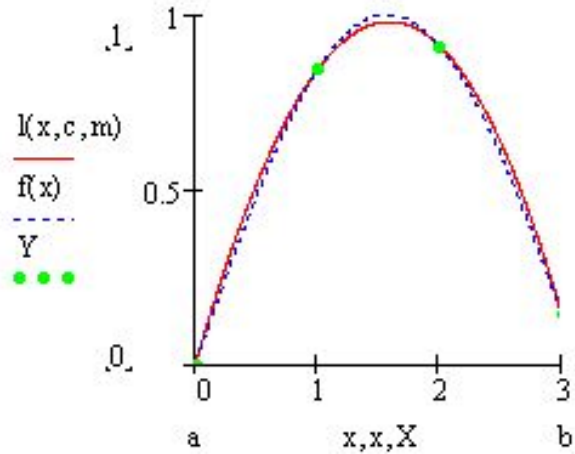
# О погрешностях интерполяционных формул

$$\square |f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega(x)|$$

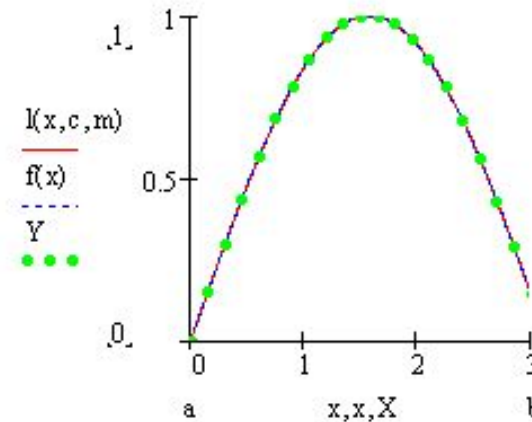
$$\square \text{ где } M_{n+1} = \sup_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)|, \quad \omega(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

□ Если  $f(x)$  достаточно гладкая, то погрешность стремится к нулю с увеличением  $n$ :

# Случай гладкой функции

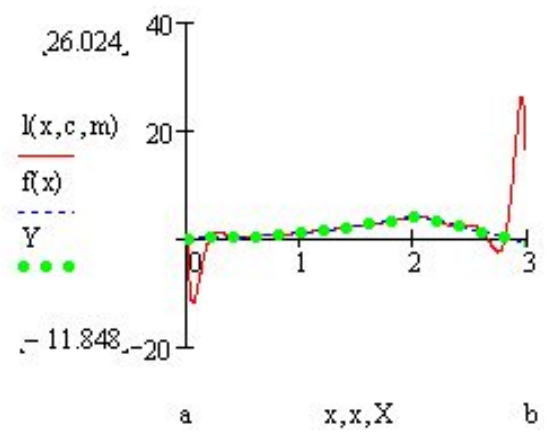
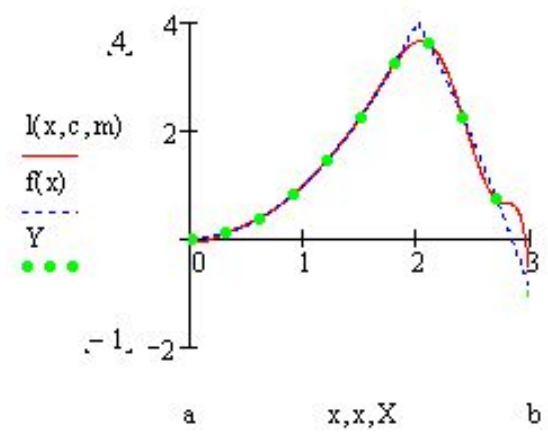
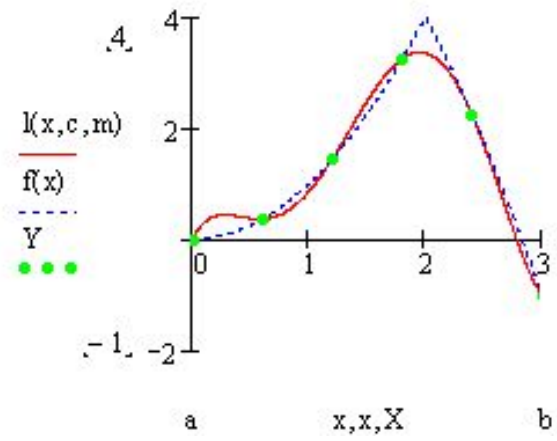


$$f(x) = \sin x$$

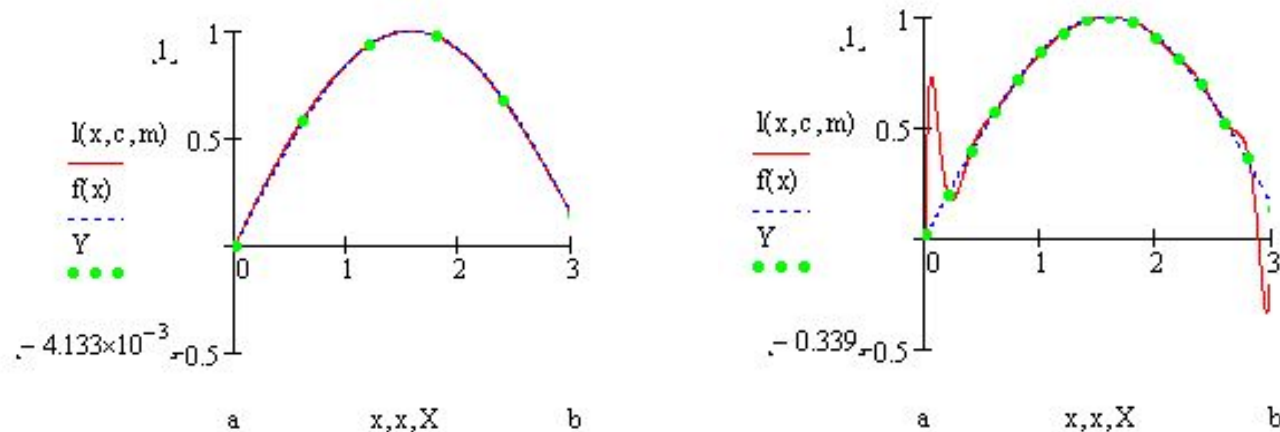


# Случай негладкой функции

$$f(x) := \begin{cases} x^2 & \text{if } x < 2 \\ 8 - x^2 & \text{otherwise} \end{cases}$$



# Наличие случайных погрешностей эксперимента



Вывод: при построении интерполяционных формул для данных, полученных экспериментально, из-за наличия даже небольших случайных погрешностей с увеличением числа узлов может сильно ухудшаться качество приближения.

# Сплайн-интерполяция

- На каждом промежутке  $x_{i-1} \leq x \leq x_i$   $i = 1, 2, \dots, n$  строится многочлен третьей степени

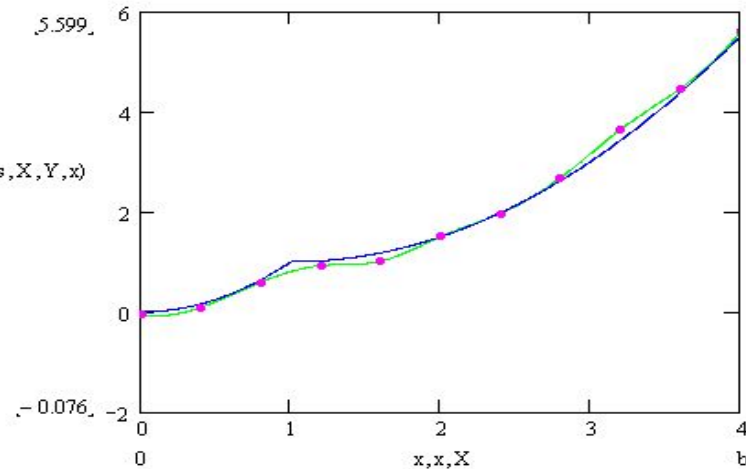
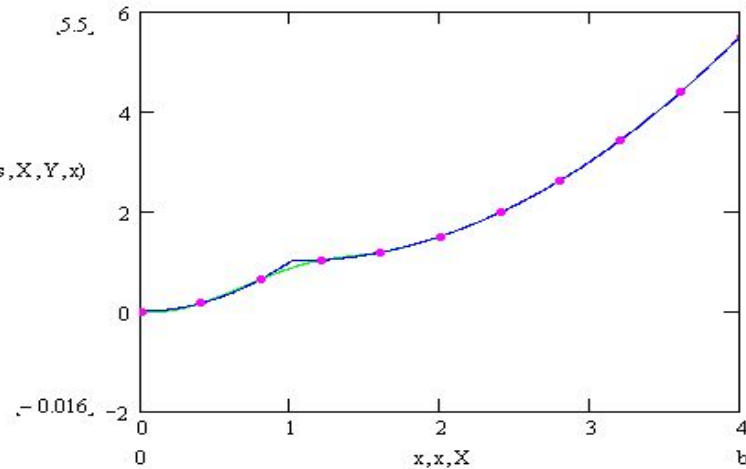
$$s_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + \frac{c_i}{2}(x - x_i)^2 + \frac{d_i}{6}(x - x_i)^3$$

коэффициенты которого находятся из условий интерполяции и условий непрерывности первой и второй производных. При этом получается система линейных уравнений с трехдиагональной матрицей, которая эффективно решается методом прогонки.



$$f(x) := \begin{cases} x^2 & \text{if } x < c \\ 0.5 \cdot (x - c)^2 + c^2 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Добавлены случайные отклонения



Выводы: 1) качество приближения может ухудшаться только в промежутках негладкости функции;  
2) сплайн-интерполяция устойчива к случайным погрешностям измерения.

# Метод наименьших квадратов

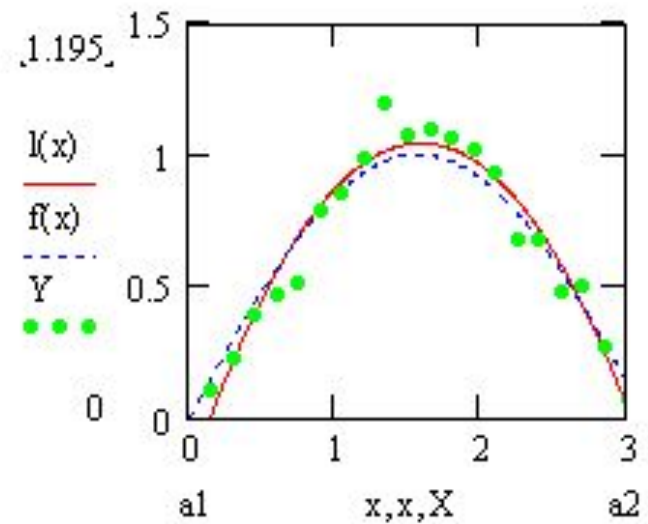
Задача: требуется приблизить функцию  $y = f(x)$ , заданную таблицей своих значений в точках  $x_i, i = 1, 2, \dots, n$ , в некотором классе функций  $y = F(a_0, a_1, \dots, a_m, x)$

Метод наименьших квадратов состоит в таком подборе параметров  $a_0, a_1, \dots, a_m$ , при котором сумма квадратов отклонений значений функции  $F(a_0, a_1, \dots, a_m, x)$  от  $y_i$  в точках  $x_i$  минимальна.

В качестве функции  $F(a_0, a_1, \dots, a_m, x)$  часто берут многочлены, причем невысокой степени. Например при  $m=2$  МНК приводит к следующей системе линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_0 n + a_1 \sum_{i=1}^n x_i + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^3 = \sum_{i=1}^n y_i x_i \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^4 = \sum_{i=1}^n y_i x_i^2 \end{cases}$$

Пример, иллюстрирующий устойчивость  
метода наименьших квадратов  
к случайным отклонениям.



# Выводы

1. Не следует применять интерполяционные многочлены Лагранжа и Ньютона высокой степени (с большим количеством узлов) в случаях негладкой функции и при наличии даже небольших случайных ошибок измерения.
2. Сплайн-интерполяцию и метод наименьших квадратов можно использовать для большого количества узлов, в том числе в случаях негладкой функции и при наличии случайных ошибок измерения.