.
Сведение матричной игры к задаче линейного программирования. Решение матричных игр $2 \times m$ и $n \times 2$

Определение: Задачей линейного программирования (ЗЛП) назовем детерминированную задачу ИО, в которой математические соотношения, задающие область допустимых значений контролируемого фактора X и целевую функцию W(x), линейны.

Общий вид ЗЛП: $W(x)=(c,x)\rightarrow extr$

$$x\subseteq X=\{x\subseteq R^n:\ x_k \geq 0,\ k\subseteq N,\ Ax \leq b,\ \bar{A}x = \underline{b}\}$$

где $x = (x_1, x_2,\ldots,x_n)$ – контролируемые факторы,

$c = (c_1,c_2,\ldots,c_n)$ – весовые коэффициенты,

$b = (b_1 ,b_2 ,\ldots,b_m)$ – матрица строка свободных членов из связей типа неравенств

$\underline{b} = (b_{m+1} ,b_{m+2} ,\ldots,b_s)$ - матрица строка свободных членов из связей типа равенств

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

- матрица числовых коэффициентов при переменных из связей типа неравенств .

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} a_{m+1,1} & \ldots & a_{m+1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{s,1} & \ldots & a_{s,n} \end{bmatrix}$$

- матрица числовых коэффициентов при переменных из связей типа равенств.

В силу теоремы об аффинных преобразованиях всегда можно преобразовать платежную так, чтобы все a_{ij} были положительны. Тогда и цена игры $v > 0$.

Пусть $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ – произвольная стратегия первого игрока. $v(X)$ - минимальный выигрыш первого игрока при использовании стратегии X. Очевидно $v(X) > 0$ и для любой стратегии X выполняется $v(X) \leq v$. Равенство $v(X^*) = v$ означает, что X^* является оптимальной стратегией. Предполагая, что первый игрок использует смешанную стратегию, а второй чистую ($Y=(0,0,..,1,\ldots,0)$ где $y_j=1$, $y_k=0$, для всех $k\neq j$) и соответственно можно записать цену игры как:

$$v=X^*H_j \quad (1)$$

где H_j – j-й столбец платежной марицы

Делим обе части (1) на v получим: $$1=(X^*H_j)/v = X'^*H_j \quad (2)$$

(где $X'^*=X^*/v$) для оптимальной стратегии первого игрока

и $$1\leq X'H_j \quad (3)$$

для любой другой произвольной стратегии первого игрока.

Из того, что X – стратегия следует, что для $X' =(x'_1,x'_2,\ldots,x'_n)$ все $x'_i \geq 0$.

Введем обозначение: J^*_m - матрица столбец размера $(m\times 1)$ все элементы которой единицы.

Тогда $X' J^*_m = x'_1+x'_2+\ldots+x'_n = 1/v$ и из того, что $v(X)\rightarrow max$ следует,

что $X' J^*_m = x'_1+x'_2+\ldots+x'_n = 1/v \rightarrow min$

Таким образом задачу определения оптимальной стратегии первого игрока мы свели к задаче

$$x'_1+x'_2+\ldots+x'_n \rightarrow min$$

при условии

$$a_{11}x'_1+a_{12}x'_2+\ldots+a_{1n}x'_n\le 1$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{m1}x'_1+a_{m2}x'_2+\ldots+a_{mn}x'_n\le 1$$

$$x'_1\ge 0, x'_2\ge 0, \ \ldots\ , x'_n\ge 0$$

Аналогично к ЗЛП сводится задача нахождения оптимальной стратегии для второго игрока.

Для простоты записи переобозначим $x_j' = x_i$

Рассмотрим задачи линейного программирования

$$\begin{cases} T = x_1+x_2+ \ \dots \ +x_n \to \min \\ a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n \geq 1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n \geq 1 \\ x_1\geq 0, x_2\geq 0, \ \dots \ , x_n \geq 0 \end{cases} \qquad (4)$$

$$\begin{cases} L = y_1+y_2+ \ \dots \ +y_m \to \max \\ a_{11}y_1+a_{21}y_2+\dots+a_{m1}y_m \leq 1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}y_1+a_{2n}y_2+\dots+a_{mn}y_m \leq 1 \\ y_1\geq 0, y_2\geq 0, \ \dots \ , y_m \geq 0 \end{cases} \qquad (5)$$

Будем считать, что все $a_{ij} > 0$ тогда многогранник задаваемый неравенствами из системы (5) является ограниченным. Следовательно ЗЛП (5)имеет оптимальное решение y_i^*, $i=1,\dots,m$ причем $\sum y_i^* > 0$.

Задача (4) является двойственной к задаче (5) следовательно задача (4) имеет оптимальное решение x_j^*, $j=1,\dots,n$ и значения целевой функции на оптимальных решениях совпадают, т.е. $\sum y_j^* = \sum x_j^*$

Решив эти задачи найдем соответственно X'^*, Y'^*, v из соотношений:

$v = 1/T_{min} = 1/L_{max}$; $x^*_j = v x_j'^*$, $j=1,\ldots,n$; $y_i^* = v y_i'^*$, $i=1,\ldots,m$;

Решение матричной игры размера 2×n

Пусть матрица игры имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2n} \end{pmatrix}$$

Тогда:

$\max\min \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{2} a_{ij}\, x_j\, y_i = \max\min (a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2) = \max\min (a_{1j}x + a_{2j}(1-x))$, где $0 \le j \le n$, $x = x_1$, $x_2 = 1-x$, $0 \le x \le 1$,

На плоскости (x,v) нарисуем прямые

$$v = a_{1j}\,x + a_{2j}\,(1-x)\ ,\ j = 1,\ldots,n \qquad (6)$$

Затем для каждого $x \in [0;1]$, путем визуального сравнения выбирается минимальное значение v. Получается ломаная, которая является графиком функции $v = \min(a_{1j}\,x + a_{2j}\,(1-x))$, $j = 1,\ldots,n$.Она является нижней огибающей семейства прямых (6). Верхняя точка этой кривой дает значение цены игры, а соответствующие ей x_1, x_2 оптимальную стратегию первого игрока.

Решение матричной игры размера m×2

Пусть матрица игры имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \end{pmatrix}$$

Положим, что $y = y_1$, $y_2 = 1 - y$, $0 \le y \le 1$,

$\min \max \sum^{n}_{i=1} \sum^{2}_{j=1} a_{ij}\, x_j\, y_i = \min \max\, (a_{i1} y + a_{i2}(1-y))$, $0 \le i \le m$

На плоскости (y, v) нарисуем прямые

$$v = a_{i1}\, y + a_{i2}\,(1-y),\ i = 1,\dots,m \qquad (7)$$

Затем для каждого $y \in [0;1]$, путем визуального сравнения выбирается максимальное значение v. Получается ломаная, которая является графиком функции $v = \max\, (a_{i1} y + a_{i2}(1-y))$.

Она является верхней огибающей семейства прямых (7). Нижняя точка этой кривой дает значение цены игры, а соответствующие ей y_1, y_2 оптимальную стратегию второго игрока.

Примеры с решениями см. В.И. Ухоботов "Введение в теорию принятия решений при неопределенностях." (стр. 77-81) (http://tuio.math.csu.ru/index.php/page/81.html)