

# **Оптимизация плана перевозок: транспортная задача**

Тема 5

# План лекции

---

- I Постановка задачи
- II Метод потенциалов решения ТЗ
- III Пример решения

# Транспортная задача линейного программирования

---

**Общая постановка транспортной задачи:** состоит в определении оптимального плана перевозок однородного груза из  $m$  пунктов отправления  $A_1, \dots, A_m$  в  $n$  пунктов потребления  $B_1, B_2, \dots, B_n$ .

**Критерий оптимальности** - минимальная стоимость перевозок всего груза.

Мощности поставщиков и запросы потребителей, а также затраты на перевозку единицы груза для каждой пары «поставщик-потребитель» будем сводить в таблицу поставок.

# Табличная форма записи исходных данных транспортной задачи

Пункт отправления	Пункт назначения				Запасы груза $a_i$
	1	2	J ...	n	
1	$c_{11}$ $x_{11}$	$c_{12}$ $x_{12}$	$c_{1j}$ $x_{1j}$	$c_{1n}$ $x_{1n}$	$a_1$
2	$c_{21}$ $x_{21}$	$c_{22}$ $x_{22}$	$c_{2j}$ $x_{2j}$	$c_{2n}$ $x_{2n}$	$a_2$
i	$c_{i1}$ $x_{i1}$	$c_{i2}$ $x_{i2}$	$c_{ij}$ $x_{ij}$	$c_{in}$ $x_{in}$	$a_i$
...					
m	$c_{m1}$ $x_{m1}$	$c_{m2}$ $x_{m2}$	$c_{mj}$ $x_{mj}$	$c_{mn}$ $x_{mn}$	$a_m$
Потребность в грузах, $b_j$	$b_1$	$b_2$	$b_j$	$b_n$	$\sum a_i = \sum b_j$

где

$a_i$  – запас груза у  $i$ -го поставщика,  $i=1..m$ ;

$b_j$  – потребность в грузе у  $j$ -го потребителя,  $j=1..n$ ;

$c_{ij}$  – затраты на перевозку 1 ед. груза от  $i$ -го поставщика к  $j$ -му потребителю,  $i=1..m$   $j=1..n$

$x_{ij}$  – количество груза, перевозимого от  $i$ -го поставщика к  $j$ -му потребителю,  $i=1..m$   $j=1..n$  (искомые переменные)

# Математическая модель транспортной задачи закрытого типа

---

**Целевая функция:**

$$f(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

**Ограничения по строкам:**

количество перевозимых грузов из  $i$ -го пункта отправления в  $j$ -е пункты назначения равно запасу  $i$ -го пункта отправления.

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, (i = 1 \dots m).$$

**Ограничения по столбцам:**

количество перевозимых грузов из  $i$ -х пунктов отправления в  $j$ -й пункт назначения должно равняться потребности в  $j$ -м пункте назначения.

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, (j = 1 \dots n).$$

Условие неотрицательности переменных:

$$x_{ij} \geq 0.$$

Балансовое условие: Количество всех распределяемых грузов и количество всех потребностей в грузах должны быть равны:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j.$$

# Закрытая и открытая ТЗ

---

Если  $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$ , то модель задачи **закрытая**; в противном случае открытая.

Если  $\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j$ , то для решения **открытую модель задачи** приводят к закрытому виду

путем введения фиктивного пункта отправления с запасом, равным:

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i .$$

Стоимости перевозок грузов по фиктивному пункту полагают равными 0.

$$C_{m+1,j} = 0, (j=1,2,\dots,n).$$

Если  $\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$ , то для решения модель задачи приводят к закрытому виду путем введения

фиктивного пункта назначения с потребностью, равной:

$$C_{i,n+1} = 0, (i=1,2,\dots,m) .$$

# Идея решения ТЗ

---

- **Теорема:** ТЗ всегда имеет оптимальное решение т.т. т. когда она закрытого типа
- I Построение начального опорного любым известным методом
- II Улучшение начального плана методом потенциалов

# Метод потенциалов решения транспортной задачи

---

Величина  $v_j, j = \overline{1, n}$  – потенциал  $j$ -го потребителя, который при данном опорном плане характеризует затраты на размещение одной единицы поставляемой продукции указанному потребителю.

Величина  $u_i, i = \overline{1, m}$  – потенциал  $i$ -го поставщика, который при данном опорном плане характеризует затраты на поставку одной единицы продукции от указанного поставщика.

## Критерий оптимальности в методе потенциалов

**ТЕОРЕМА.** Если для некоторого опорного плана транспортной задачи будет выполняться  $(v_j + u_i) - c_{ij} = 0$  для клеток с  $x_{ij} > 0$  и  $(v_j + u_i) - c_{ij} \leq 0$  для клеток с  $x_{ij} = 0$ , то этот план является оптимальным.



# Поиск начального опорного плана. Метод северо-западного угла

---

В верхнюю левую клетку (северо-западный угол) таблицы поставок записываем наименьшее из чисел  $b_1$  и  $a_1$ , пересчитываем запасы и потребности и столбец, с исчерпанным запасом, или строку с удовлетворенной потребностью исключаем из дальнейшего расчета.

В оставшейся части таблицы снова находим северо-западный угол, заполняем эту клетку, вычеркиваем строку или столбец и опять обращаемся к северо-западному углу и так далее.

Важнейшим условием построения опорного плана является назначение в выбранной клетке наибольшего возможного плана перевозки.

# Поиск начального опорного плана. Метод минимальных цен

---

В клетку с минимальным тарифом таблицы поставок записываем наименьшее из чисел  $b_j$  и  $a_i$ , пересчитываем запасы и потребности и столбец, с исчерпанным запасом, или строку с удовлетворенной потребностью исключаем из дальнейшего расчета.

В оставшейся части таблицы снова находим клетку с наименьшим тарифом, заполняем эту клетку, вычеркиваем строку или столбец и опять обращаемся к северо-западному углу и так далее.

Если есть несколько клеток с равным тарифом, построение плана можно начинать с любой из них.



# Алгоритм решения транспортной задачи методом потенциалов

---

1. Находим первоначальный "невырожденный" опорный план одним из известных методов.
2. Вычисляем потенциалы  $u_i$  и  $v_j$  решая систему для всех заполненных клеток:  $u_i + v_j = c_{ij} \quad \forall x_{ij} > 0$
3. Проверяем **критерий оптимальности**. Рассчитываем значения оценок для свободных клеток:

$$d_{ij} = u_i + v_j - c_{ij} \quad \forall x_{ij} = 0.$$

Если все оценки неположительные  $d_{ij} \leq 0$  текущий опорный план оптимален, конец алгоритма. Иначе переходим к следующему шагу.

## 4. Построение цикла пересчета.

- а) в качестве клетки пересчета выбираем свободную клетку с максимальной положительной оценкой;
  - б) строим цикл пересчета – замкнутая ломанная линия, вершины которой лежат в заполненных клетках, начало и конец в клетке пересчета, звенья вдоль строк и столбцов таблицы;
  - в) отмечаем клетку пересчета знаком (+) и строим цикл пересчета, последовательно присваивая клеткам цикла знаки (-) и (+), начиная с клетки пересчета;
  - г) в клетках, помеченных знаком (-), находим наименьшую поставку и отнимаем ее от клеток (-), а к клеткам (+) прибавляем. При этом клетка, содержащая наименьшую поставку, освобождается;
5. Возвращаемся к п. 2.

# Пример решения транспортной задачи

- Три песчано-гравийных карьера добывают в сутки 140, 180 и 160 условных единиц гравия. Для строительства пяти дорог необходимо гравия в количестве 60, 70, 120, 130 и 100 условных единиц соответственно, стоимость перевозок (тарифов) из одного карьера на один объект (строящуюся дорогу) приведена в таблице I в условных денежных единицах (например, чтобы перевезти 1 условную единицу гравия с карьера I на дорогу № I надо затратить две условные денежные единицы).

Дороги	№1	№2	№3	№4	№5	Запасы
Карьер						
Карьер 1	2	3	4	2	4	140
Карьер 2	8	5	1	4	1	180
Карьер 3	9	8	4	7	2	160
Потребности	60	70	120	130	100	
						480/480

Сумма запасов поставщиков совпадает с суммарным спросом потребителей.  $140+180+160=60+70+120+130+100=480$ , таким образом, имеем задачу **закрытого типа**.

# Начальный план по методу северо-западного угла

Дороги		№1	№2	№3	№4	№5	Запасы				
Карьер											
Карьер 1	2	60	3	70	4	10	2	4	140/00/10/0		
Карьер 2	8		5		1	110	4	70	1	180/70/0	
Карьер 3	9		8		4		7	60	2	100	160/100/0
Потребности		60/0		70/0		120/110/0		130/60/0		100/0	480

Найдем затраты на перевозки при составленном плане:

$$F = 2 \cdot 60 + 8 \cdot 0 + 9 \cdot 0 + 3 \cdot 70 + 5 \cdot 0 + 8 \cdot 0 + 4 \cdot 10 + 1 \cdot 110 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 4 \cdot 70 + 7 \cdot 60 + 4 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 100 = 1380$$

у.д.е.

# Начальный план по методу минимальных цен

Дороги Карьер		№1	№2	№3	№4	№5	Запасы		
Карьер 1	2	60	3	4	2	80	4	140/80/0	
Карьер 2	8		5	1	120	4	1	180/60/0	
Карьер 3	9		8	70	4	7	50	2	160 /120/70/0
Потребности		60/0	70 /0	120/0	130/50/0	100/40 /0	480		

Найдем затраты на перевозки при составленном плане:

$$F=2 \cdot 60+2 \cdot 80+1 \cdot 120+1 \cdot 60+8 \cdot 70+7 \cdot 50+2 \cdot 40=1450 \text{ у. д. е.}$$

# Метод потенциалов: расчет потенциалов

- Выберем план, полученный по методу северо-западного угла
- **!** В опорном плане должно быть  $(n+m-1)$  положительная координата

	B1	B2	B3	B4	B5
A1	2 /60	3 /70	4 /10	2	4
A2	8	5	1 /110	4 /70	1
A3	9	8	4	7 /60	2 /100

- Составим систему для нахождения потенциалов, используя заполненные клетки

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = c_{11} \\ u_1 + v_2 = c_{12} \\ u_1 + v_3 = c_{13} \\ u_2 + v_3 = c_{21} \\ u_2 + v_4 = c_{24} \\ u_3 + v_4 = c_{34} \\ u_3 + v_5 = c_{35} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 + v_1 = 2 \\ u_1 + v_2 = 3 \\ u_1 + v_3 = 4 \\ u_2 + v_3 = 1 \\ u_2 + v_4 = 4 \\ u_3 + v_4 = 7 \\ u_3 + v_5 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 0 \\ v_1 = 2 \\ v_2 = 3 \\ v_3 = 4 \\ u_2 = -3 \\ v_4 = 7 \\ u_3 = 0 \\ v_5 = 2 \end{cases}$$

# Метод потенциалов: оценка полученного плана

□ Рассчитаем оценки для всех свободных клеток

	B1	B2	B3	B4	B5	Потенциалы поставщиков
A1	2 /60	3 /70	4 /10	2	4	$u_1=0$
A2	8	5	1 /110	4 /70	1	$u_2=-3$
A3	9	8	4	7 /60	2 /100	$u_3=0$
Потенциалы потребителей	$v_1=2$	$v_2=3$	$v_3=3$	$v_4=7$	$v_5=2$	

$$\left\{ \begin{array}{l} d_{14} = u_1 + v_1 - c_{14} = 0 + 7 - 2 = 5 \\ d_{15} = u_1 + v_5 - c_{15} = 0 + 2 - 4 = -2 \\ d_{21} = u_2 + v_1 - c_{21} = -3 + 2 - 8 = -9 \\ d_{22} = u_2 + v_2 - c_{22} = -3 + 3 - 5 = -5 \\ d_{25} = u_2 + v_5 - c_{25} = -3 + 2 - 1 = -2 \\ d_{31} = u_3 + v_1 - c_{31} = 0 + 2 - 9 = -7 \\ d_{32} = u_3 + v_2 - c_{32} = 0 + 3 - 8 = -5 \\ d_{33} = u_1 + v_5 - c_{15} = 0 + 3 - 7 = -4 \end{array} \right.$$

$\Rightarrow$  (1,4) – клетка пересчета



# Метод потенциалов: цикл пересчета

□ Построим цикл пересчета

	B1	B2	B3	B4	B5	Потенциалы поставщиков
A1	2 /60	3 /70	- 4 /10	2 +	4	$u_1 = 0$
A2	8	5	+ 1 /10	4 /70	1	$u_2 = -3$
A3	9	8	4	7 /60	- 2 /100	$u_3 = 0$
Потенциалы потребителя	$v_1 = 2$	$v_2 = 3$	$v_3 = 3$	$v_4 = 7$	$v_5 = 2$	

□ Определим наименьшую поставку, стоящую в отрицательных клетках, это величину будем перераспределять **10**

# Новый опорный план

- После перераспределения в цикле пересчета получили новый опорный план
- **!** Поставки вне цикла пересчета не меняются

	B1	B2	B3	B4	B5	Потенциалы поставщиков
A1	2 /60	3 /70	4	2 /10	4	$u_1 = 0$
A2	8	5	1 /120	4 /60	1	$u_2 =$
A3	9	8	4	7 /60	2 /100	$u_3 =$
Потенциалы потребителя	$v_1 =$	$v_2 =$	$v_3 =$	$v_4 =$	$v_5 =$	

Найдем затраты на перевозки при составленном плане:

$$F = 2 \cdot 60 + 3 \cdot 70 + 1 \cdot 120 + 2 \cdot 10 + 4 \cdot 60 + 7 \cdot 60 + 2 \cdot 100 = 1330 \text{ у.д.е.}$$

**Задание на практику:  
рассчитать  
потенциалы и оценки  
для полученного плана**