# ТРАНСПОРТНАЯ

# ЗАДАЧА

# Классическая транспортная задача

- задача об оптимальном плане перевозок продукта(-ов) из пунктов отправления в пункты потребления.

*Чаще всего встречается в практических приложениях линейного программирования.*

# Историческая справка


**Гаспар Монже**

**Канторович Л.В.**

# Постановка транспортной задачи

Однородный груз, имеющийся в *m* пунктах отправления (производства) $A_1, A_2, \ldots, A_m$ соответственно в количествах $a_1, a_2, \ldots, a_m$ единиц, требуется доставить в каждый из n пунктов назначения (потребления) $B_1, B_2, \ldots, B_n$ соответственно в количествах $b_1, b_2, \ldots, b_n$ единиц. Стоимость перевозки (тариф) единицы продукции из $A_i$ в $B_j$ известна для всех маршрутов $A_i, B_j$ и равна $c_{ij}$ ($i = 1, m$; $j = 1, n$). Требуется составить такой план перевозок, при котором весь груз из пунктов отправления вывозится, и запросы всех пунктов потребления удовлетворяются, а суммарные транспортные расходы минимальны.

**Замечание:**

Задача в данной формулировке называется **закрытой**:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

# Математическая модель транспортной задачи

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} = a1 \\ x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} = a2 \\ \ldots \\ x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mn} = am \\ x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{m1} = b1 \\ x_{12} + x_{22} + \ldots + x_{m2} = b2 \\ \ldots \\ x_{1n} + x_{2n} + \ldots + x_{mn} = bn \\ x_{ij} \geq 0, i = 1, m; j = 1, n \end{cases}$$

**Определение**:

Построенный план называется ***опорным***, если в нем отличны от нуля не более **m+n-1** базисных перевозок, а остальные перевозки равны 0.

**Определение**:

Опорный план называется ***оптимальным***, если он приводит к минимальной суммарной стоимости перевозок.

# Математическая модель транспортной задачи

При решении условие задачи удобно располагать в таблице:

| Потребители / Поставщики | B1 | B2 | ... | Bn | Запасы |
|---|---|---|---|---|---|
| A1 | $X_{11}$ $C_{11}$ | $X_{12}$ $C_{12}$ | ... | $X_{1n}$ $C_{1n}$ | a1 |
| A2 | $X_{21}$ $C_{21}$ | $X_{22}$ $C_{22}$ | ... | $X_{2n}$ $C_{2n}$ | a2 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| Am | $X_{m1}$ $C_{m1}$ | $X_{m2}$ $C_{m2}$ | ... | $X_{mn}$ $C_{mn}$ | am |
| Потребности | b1 | b2 | ... | bn | |

# Решение транспортной задачи

1. Определение опорного плана.
2. Нахождение оптимального решения путем последовательных операций.

# Определение опорного плана

## 1. Метод северо-западного угла (диагональный)

***Сущность метода*** заключается в том, что на каждом шаге заполняется левая верхняя (северо-западная) клетка оставшейся части таблицы, причем максимально возможным числом: либо полностью выносится груз из $A_i$, либо полностью удовлетворяется потребность $B_j$.

Процедура продолжается до тех пор, пока на каком-то шаге не исчерпаются запасы $a_i$ и не удовлетворятся все потребности $b_j$.

# Пример

Фирма должна отправить некоторое количество компьютеров с трёх складов в пять магазинов. На складах имеется соответственно 15, 25 и 20 компьютеров, а для пяти магазинов требуется соответственно 20, 12, 5, 8 и 15 компьютеров. Стоимость перевозки одного компьютера со склада в магазин приведены в таблице.

| Склады | Магазины | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 |
| A1 | 1 | 0 | 3 | 4 | 2 |
| A2 | 5 | 1 | 2 | 3 | 3 |
| A3 | 4 | 8 | 1 | 4 | 3 |

таблица 1

# Определение опорного плана

## 2. Метод наименьшего элемента

***Сущность метода*** заключается в том, что на каждом шаге заполняется та клетка оставшейся части таблицы, которая имеет наименьший тариф; в случае наличия нескольких таких равных тарифов заполняется любая из них. В остальном действуют аналогично предыдущему способу.

таблица 1

# Нахождение оптимального плана

***Метод* потенциалов:**

Введем строку потенциалов $u_i$ и столбец потенциалов $v_j$.

Полагая, что $u_1=0$, а остальные $u_i$ и $v_j$ найдем так, чтобы :

а) *для заполненных клеток* выполнялись равенства

б) *для незаполненных клеток* выполнялись равенства

$$\Delta_{ij} = c_{ij} - \left(u_i + v_j\right)$$

# Нахождение оптимального плана

***Критерий оптимальности***

Если известны потенциалы решения $X_o$ транспортной задачи и для всех незаполненных клеток выполняются условия ,то $X_o$ является оптимальным планом.

Если план не оптимален, то необходимо перейти к следующему плану (таблице) так, чтобы транспортные расходы не увеличивались.

таблица 2

# Цикл перерасчёта таблицы

***Цикл перерасчёта таблицы*** – это последовательность клеток, удовлетворяющая условиям:

- Одна клетка пустая с отрицательной оценкой, все остальные заполненные.
- Любые две соседние клетки находятся в одной строке или в одном столбце.
- Пустой клетке присваивают знак "+", остальным – поочерёдно знаки "–" и "+".

# Цикл перерасчёта таблицы

Далее составляем новую таблицу по следующему правилу:

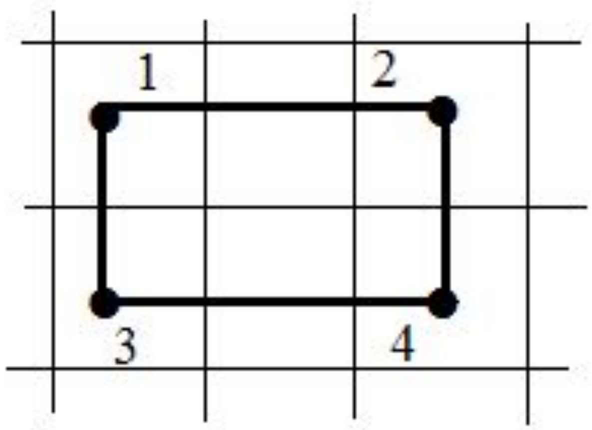
- Клетки вне цикла остаются без изменения.
- В минусовых клетках находят число $X = \min(X_{ij})$.
- В плюсовых клетках цикла добавляем X.
- Из минусовых клеток цикла вычитаем X.

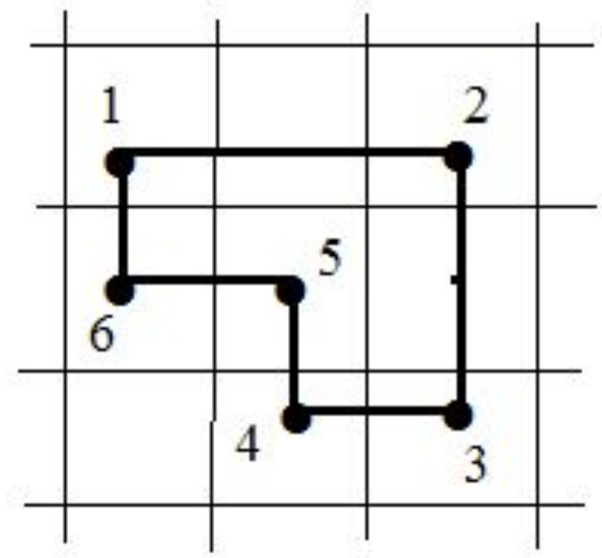
# Контрольные вопросы

1. Как построить опорный план транспортной задачи?
2. В чем суть метода потенциалов?
3. Как строится цикл перерасчета?

# Виды циклов перерасчета

Циклы перерасчета могут быть различной формы:



# Виды циклов перерасчета

Циклы перерасчета  могут быть различной формы: