Вычислительные методы в алгебре и теории чисел

Сафарьян Ольга Александровна

Лекция 3.
Приближение функций

1. Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа
2. Интерполяционный многочлен в форме Ньютона. Конечные разности
3. Интерполирование сплайнами
4. Метод наименьших квадратов
5. Вопросы для самопроверки

Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа

Приведем одну из форм записи интерполяционного многочлена − ***многочлен Лагранжа***

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)} \qquad (1)$$

Если ввести в рассмотрение многочлен специального вида $(n+1)$-й степени

$$\omega_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n) \qquad (2)$$

тогда многочлен Лагранжа можно записать в виде

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_i)\omega_n'(x_i)} \qquad (3)$$

Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа

В инженерной практике наиболее часто используется интерполяция первой $(n=1)$, второй $(n=2)$ и третьей $(n=3)$ степени (***линейная, квадратичная и кубическая интерполяция***).

Интерполяционный многочлен в форме Ньютона. Конечные разности.

Таблица ***таблицей значений функции*** $f(x)$ ***в узлах*** $x_0, x_1, \ldots, x_n$ и говорить, что функция $f(x)$ задана таблицей своих значений

x_0	x_1	...	x_n
$f(x_0)$	$f(x_1)$	...	$f(x_n)$

Если интерполируемая функция задана на таблице с постоянным шагом *h* (т.е. $x_i = x_0 + ih,\ 0 \le i \le n$), то многочлен Ньютона можно записать в следующем виде:

$$P_n(x) = P_n(x_0 + ht) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!} t + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} t(t-1) + \frac{\Delta^3 y_0}{3!} t(t-1)(t-2) +$$

$$+ \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!} t(t-1)\ldots(t-n+1), \tag{4}$$

где $t = \dfrac{x - x_0}{h}$

Интерполяционный многочлен в форме Ньютона. Конечные разности

Многочлен (4) называется ***интерполяционным многочленом Ньютона с конечными разностями для интерполяции вперед***.

Если $t = \dfrac{x - x_n}{h}$, то можно записать многочлен в виде ***интерполяционного многочлена Ньютона с конечными разностями для интерполяции назад***:

$$P_n(x) = P_n(x_n + ht) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{1!} t + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!} t(t+1) +$$
$$+ \frac{\Delta^3 y_{n-3}}{3!} t(t+1)(t+2) + \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!} t(t+1)\ldots(t+n-1). \qquad (5)$$

Сравнение записей в форме Лагранжа и Ньютона

Сравнение форм Лагранжа и Ньютона для интерполяционного многочлена позволяет рекомендовать использование представления в форме Лагранжа:

- а) во-первых, в теоретических исследованиях, например при изучении вопроса о сходимости к функции ;
- б) во-вторых, при интерполировании нескольких функций на одной и той же сетке узлов, поскольку в этом случае можно один раз вычислить множители Лагранжа и использовать их для интерполяции всех функций.

Сравнение записей в форме Лагранжа и Ньютона

Погрешность интерполяции

Ошибка приближения функции интерполяционным многочленом *n*-й степени в точке *x* − это разность $\rho_n(x) = f(x) - G_n(x)$. Оценить значение погрешности Позволяет следующая теорема.

Теорема 3.2. *Пусть функция* $f(x)$ *дифференцируема* $(n+1)$ *раз на отрезке* , $[a; b]$ *, содержащем узлы интерполяции* x_i , $0 \le i \le n$ *Тогда*

$$\rho_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x),\ \xi \in [a; b] \tag{6}$$

Из (6) следует оценка погрешности интерполяции

$$|\rho_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega_{n+1}(x)|,\ M_{n+1} = \max_{[a;b]}\left|f^{n+1}(x)\right| \tag{7}$$

Сравнение записей в форме Лагранжа и Ньютона

Погрешность интерполяции в точке $x \in [a; b]$ относительно переменной t можно представить в виде

$$\rho_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} h^{n+1} t(t-1) \ldots (t-n) \qquad (8)$$

где ξ – некоторая точка, принадлежащая интервалу (a; b).

Если $M_{n+1} = \max\limits_{[a;b]} \left| f^{n+1}(x) \right|$, то оценка погрешности интерполяции в точке $x \in [a; b]$, имеет вид

$$|\rho| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} h^{n+1} \left| t(t-1) \ldots (t-n) \right| \qquad (9)$$

Интерполирование сплайнами

1. ***Информация относительно аппроксимируемой функции***

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a;b]$, который разбит точками $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ на n частичных отрезков $[x_{i-1}; x_i]$, и задана таблицей своих значений $y_i = f(x_i), (1 \le i \le n)$.

2. ***Класс аппроксимирующих функций***

Интерполяционным сплайном степени m называется функция $S_m(x)$, обладающая следующими свойствами:

1) на каждом из частичных отрезков $[x_{i-1}; x_i]$ $(1 \le i \le n)$ $S_m(x)$ является многочленом степени m;

2) функция $S_m(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ вместе со всеми своими производными до порядка $m-1$;

3) $S_m(x_i) = f(x_i)$ $(1 \le i \le n)$

Если $m \ge 2$, то для единственности $S_m(x)$ следует задать еще $m-1$ условий, которые обычно задаются на концах отрезка $[a;b]$ либо произвольно, либо из дополнительной информации о поведении $f(x)$.

Разность между степенью сплайна и наивысшим порядком непрерывной на отрезке $[a;b]$ производной называется ***дефектом сплайна***.

Интерполирование сплайнами

Если $m = 1$, то имеем сплайн первой степени (метод ломаных) с дефектом, равным единице, так как непрерывна только сама функция (нулевая производная), а первая производная уже разрывная.
Наиболее широкое распространение на практике получили сплайны $S_3(x)$ третьей степени (***кубические сплайны***) с дефектом, равным 1 или 2.
На каждом из отрезков $[x_{i-1}; x_i]$ $S_3(x)$ является кубическим многочленом вида:

$$S_3(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3,\ x_{i-1} \le x \le x_i,\ 1 \le i \le n;$$

3. ***Выбор критерия согласия***
Функция $S_3(x)$ обладает следующими свойствами:

1) Функция $S_3(x)$ непрерывна вместе со своими производными до второго порядка включительно;

2) в узлах сетки $\{x_i\}_{i=1}^n$ выполняются равенства

$$S_3(x_i) = f(x_i), 1 \le i \le n$$

Интерполирование сплайнами

3) $S_3''(x)$ удовлетворяет граничным условиям

$$S_3''(a) = S_3''(b) = 0$$

Метод наименьших квадратов

1. ***Информация относительно аппроксимируемой функции***
Пусть функция $y = f(x)$ задана таблицей приближенных значений

$$y_i \approx f(x_i), \ (1 \le i \le n)$$

Эти значения получены с ошибками, где $y_i^0 = f(x_i)$

Метод наименьших квадратов

2. ***Класс аппроксимирующих функций***

В качестве аппроксимирующей функции будем принимать многочлен некоторой степени *m*.

$$G_m(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_{m-1} x + a_m = \sum_{k=0}^{m} a_k x^{m-k}$$

Здесь $a_0, a_1, \dots, a_m$ – параметры модели, являющиеся коэффициентами многочлена $G_m(x)$.

3. ***Выбор критерия согласия***

Как нетрудно видеть, при интерполировании происходит повторение ошибок наблюдений, в то время как при обработке экспериментальных данных желательно, напротив, их сглаживание.

Отказываясь от требования выполнения в точках точных равенств, следует все же стремиться к тому, чтобы в этих точках выполнялись соответствующие приближенные равенства $G_m(x) \approx y_i$. Из различных критериев, позволяющих выбрать параметры $a_0, a_1, \dots, a_m$ модели так, чтобы приближенные равенства $G_m(x) \approx y_i$ удовлетворялись наилучшим в некотором смысле образом, наиболее часто используется критерий наименьших квадратов. Согласно этому критерию параметры выбираются так, чтобы минимизировать ***среднеквадратичное уклонение*** многочлена $G_m(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^{m-k}$ от заданных табличных значений $y_i \ (1 \le i \le n)$.

Метод наименьших квадратов

Задача метода наименьших квадратов состоит в следующем.

Требуется найти многочлен $G_m(x)$, для которого среднеквадратичное уклонение принимает минимальное значение $\delta = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(G_m(x_i)\right)^2 = \min$

1) Если $m \geq n$ (степень аппроксимирующего многочлена не меньше числа наблюдений), то существует бесконечное множество многочленов, для которых выполняется равенство $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = 0$.

2) Если $m = n - 1$ (степень аппроксимирующего многочлена на единицу меньше числа наблюдений) равенство $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = 0$ обеспечивается единственным многочленом, дающим решение интерполяционной задачи.

3) Если $m < n - 1$ (в дальнейшем рассматривается только этот случай), то $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 \geq 0$ при любых значениях коэффициентов многочлена $G_m(x)$ нужно так выбрать коэффициенты этого многочлена, чтобы величина $\delta = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2$ была минимальной.

Метод наименьших квадратов

4. ***Погрешность метода наименьших квадратов***

Оценить значение погрешности метода наименьших квадратов позволяет следующая формула для ***среднеквадратичного уклонения***

$$\sigma = \sigma\left(G_m;\, y\right) = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(G_m(x_i) - y_i\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

В точке минимума функции *δ* ее производные $\frac{\partial \delta}{\partial a_k}$ обращаются в нуль.

Дифференцируя *δ* и приравнивая к нулю производные, получим так называемую нормальную систему метода наименьших квадратов. Эта система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно неизвестных $a_0, a_1, \ldots, a_m$.
Можно показать, что определитель этой системы отличен от нуля, т.е. решение системы существует и единственно. Однако на практике описанную методику применяют только для нахождения многочленов, степень которых не выше 4−5. При более высоких степенях нормальная система становится плохо обусловленной и погрешности определения коэффициентов велики.

Вопросы для самопроверки

- 1. От чего зависит интерполяционный многочлен Лагранжа?
- 2. От чего зависит погрешность интерполяционного многочлена Лагранжа?
- 3. В чем состоят свойства конечных разностей?
- 4. В чем заключается контроль таблицы конечных разностей?
- 5. В чем заключаются достоинства и недостатки записей в форме Лагранжа и Ньютона?
- 6. Что представляет собой график интерполяционного многочлена при значениях и ?
- 7. Какими формулами (Лагранжа или Ньютона) удобнее пользоваться в случае равноотстоящих узлов интерполяции и почему?
- 8. Сколько интерполяционных многочленов можно построить для одной функции и одной системы узлов интерполяции?
- 9. Почему погрешность интерполяции для интерполяционных многочленов Лагранжа и Ньютона оценивается с помощью одной и той же формулы?
- 10. В чем заключается задача интерполирования кубическими сплайнами?
- 11. В чем заключается задача приближения функции методом наименьших квадратов?