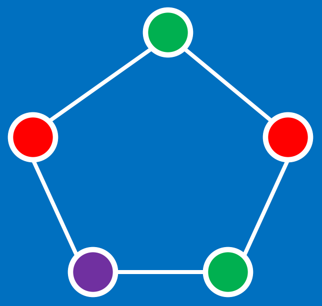
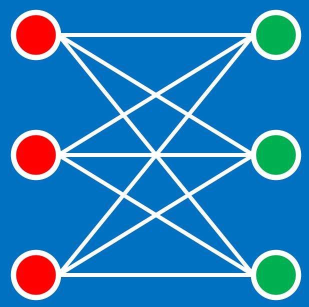
Задачи раскраски графов

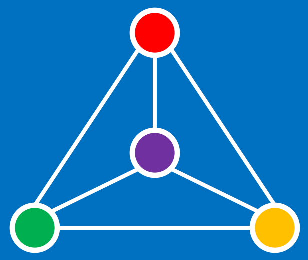
А.В.Пяткин

Вершинная раскраска

- Раскрасить вершины графа в минимальное число цветов так, чтобы смежные вершины получали бы разные цвета (разбиение на независимые множества)



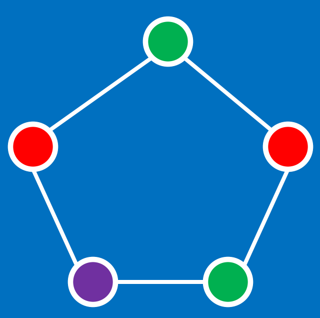




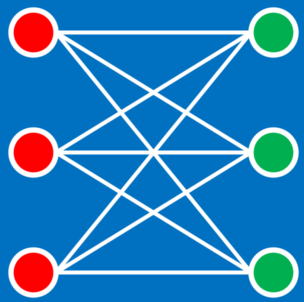
Хроматическое число

- Минимальное число цветов, необходимое для правильной раскарски вершин

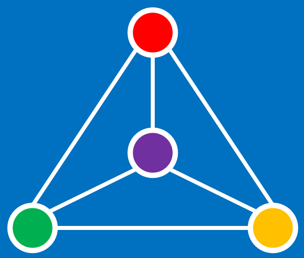
$\chi = 3$



$\chi = 2$



$\chi = 4$



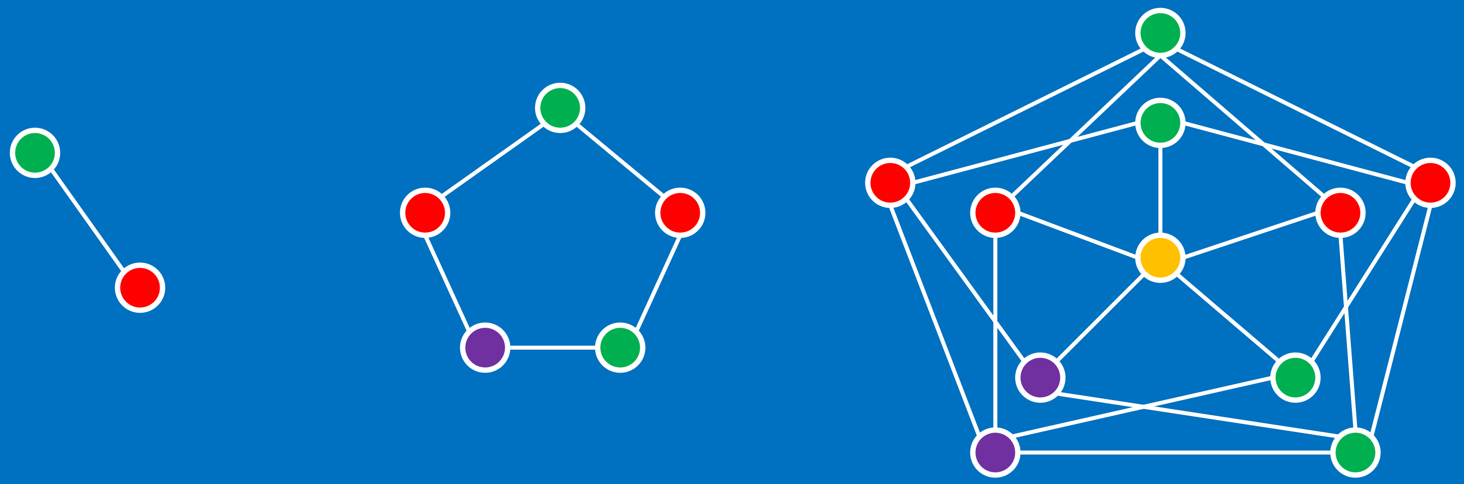
Нижние оценки для хроматического числа

- $\chi \geq \omega$, где ω – мощность максимальной клики
- $\chi \geq n/\alpha$, где n – число вершин, а α – мощность максимального независимого множества

Конструкция Мицельского

- Для любого $k \geq 2$ существуют графы с $\chi \geq k$ и $\omega = 2$.

- $k = 2$ $\quad$ $k = 3$ $\quad$ $k = 4$



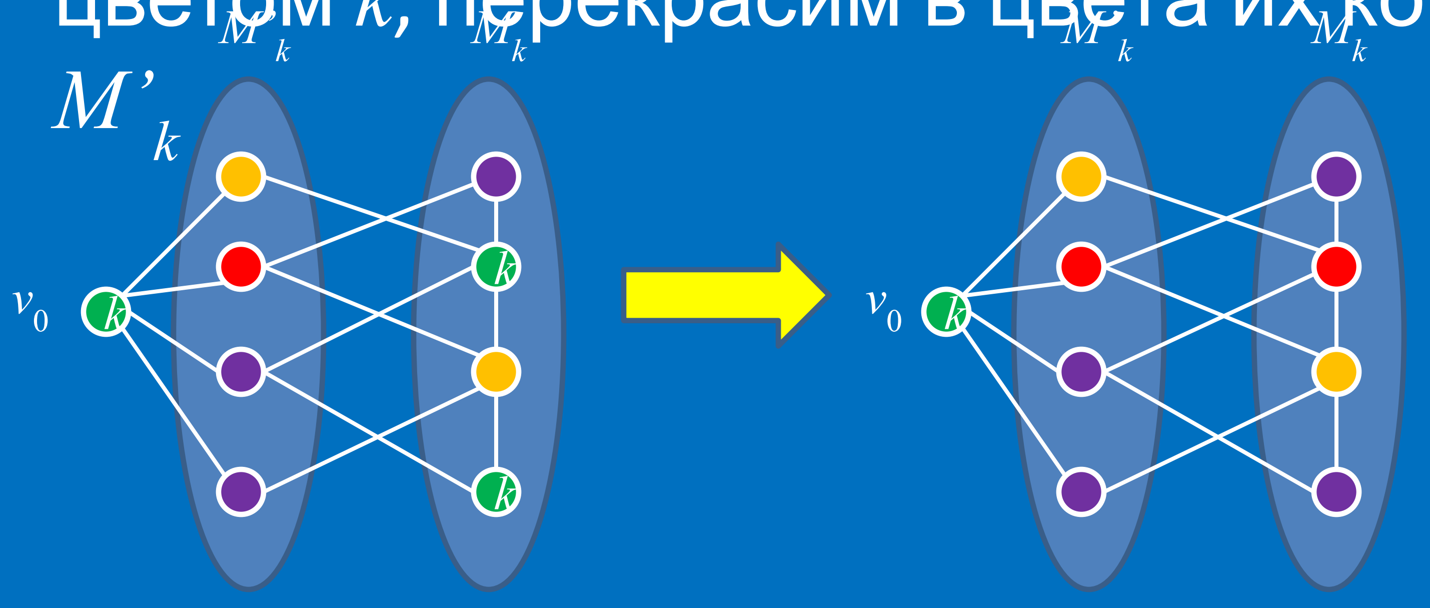
Конструкция Мицельского

- Граф M_{k+1} строится из M_k следующим образом: для каждой вершины v добавим ее копию v' с тем же множеством соседей. Добавим вершину v_0, смежную с каждой вершиной v'

- Покажем, что M_{k+1} нельзя раскрасить в k цветов

Конструкция Мицельского

- Предположим, что это не так. Можно считать, что вершина v_0 окрашена в цвет k
- Вершины графа M_k, раскрашенные цветом k, перекрасим в цвета их копий из M'_k



Верхние оценки для хроматического числа

- Граф называется t-вырожденным, если в любом его подграфе есть вершина степени не более t.

- Теорема. Если граф t-вырожденный, то

$$\chi \leq t+1$$

Доказательство

- Индукция по n: при удалении любой вершины граф остается t-вырожденным
- Удалим вершину v степени t и раскрасим оставшийся граф в $t+1$ цвет по индукции
- Красим вершину v в цвет, отсутствующий среди цветов ее соседей

- Следствие. $\chi \leq \Delta+1$, где Δ – максимальная степень графа

- Оценка $\chi \le \Delta+1$ достигается для нечетных циклов ($\Delta=2$, $\chi=3$) и полных графов ($\Delta=n-1$, $\chi=n$).

- Теорема Брукса (1941). Если граф G не является полным графом или нечетным циклом, то $\chi(G) \le \Delta$.

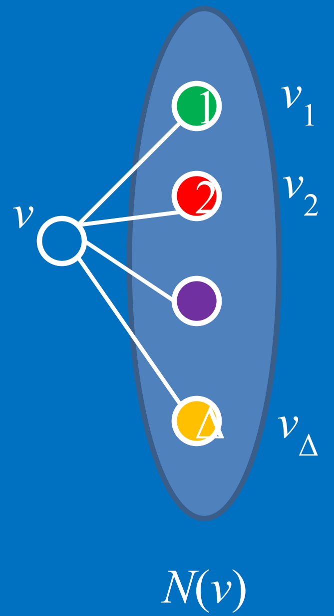
Доказательство

- Для $\Delta \leq 2$ утверждение очевидно. Пусть $\Delta \geq 3$

- Индукция по n. Удалим из G вершину v.
- Полученный граф H можно раскрасить в Δ цветов (если H не является полным или нечетным циклом, то по индукции; иначе, степень графа H равна $\Delta - 1$).

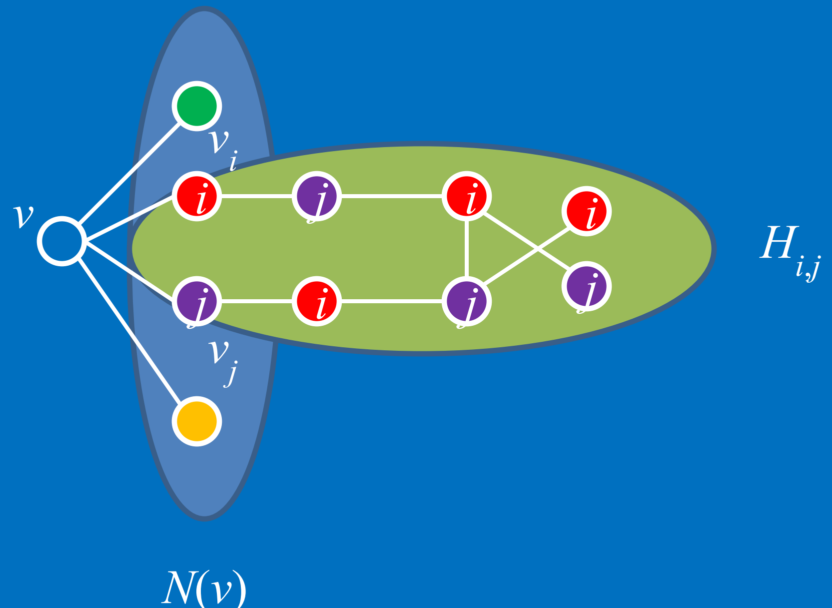
Доказательство

- 1) В любой раскраске графа H все цвета $1,2,\ldots,\Delta$ присутствуют среди цветов соседей вершины v. Обозначим через v_i соседа v цвета i



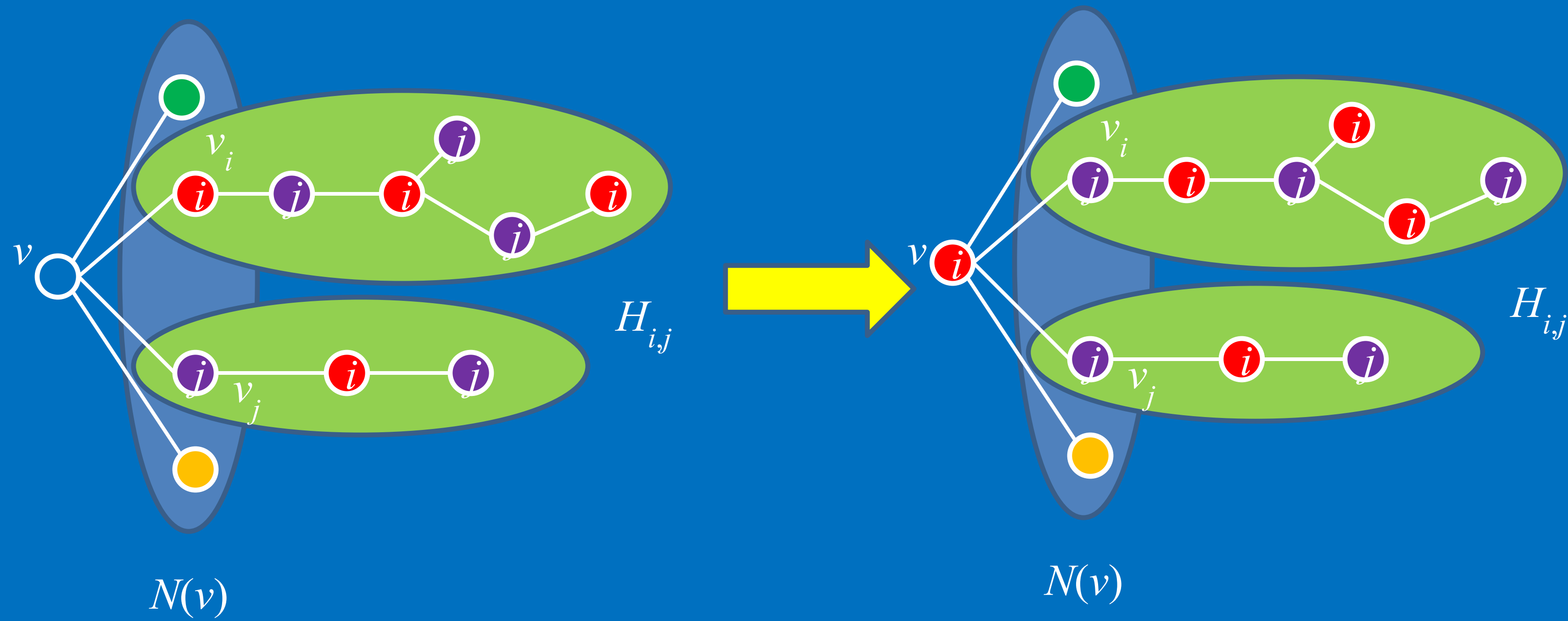
Доказательство

- 2) Пусть $H_{i,j}$ – подграф H, порожденный вершинами цветов i и j. Тогда v_i и v_j лежат в одной компоненте связности графа $H_{i,j}$



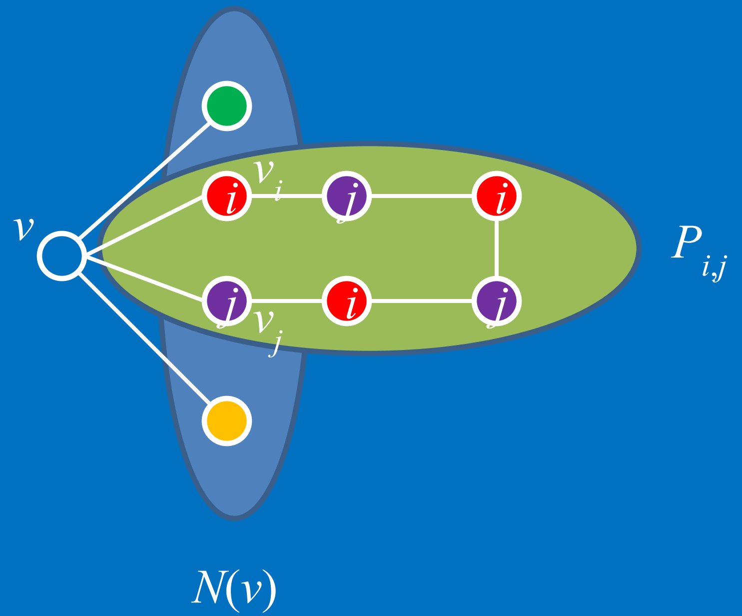
Доказательство

- В противном случае, можно перекрасить компоненту, содержащую v_i и окрасить вершину v цветом i



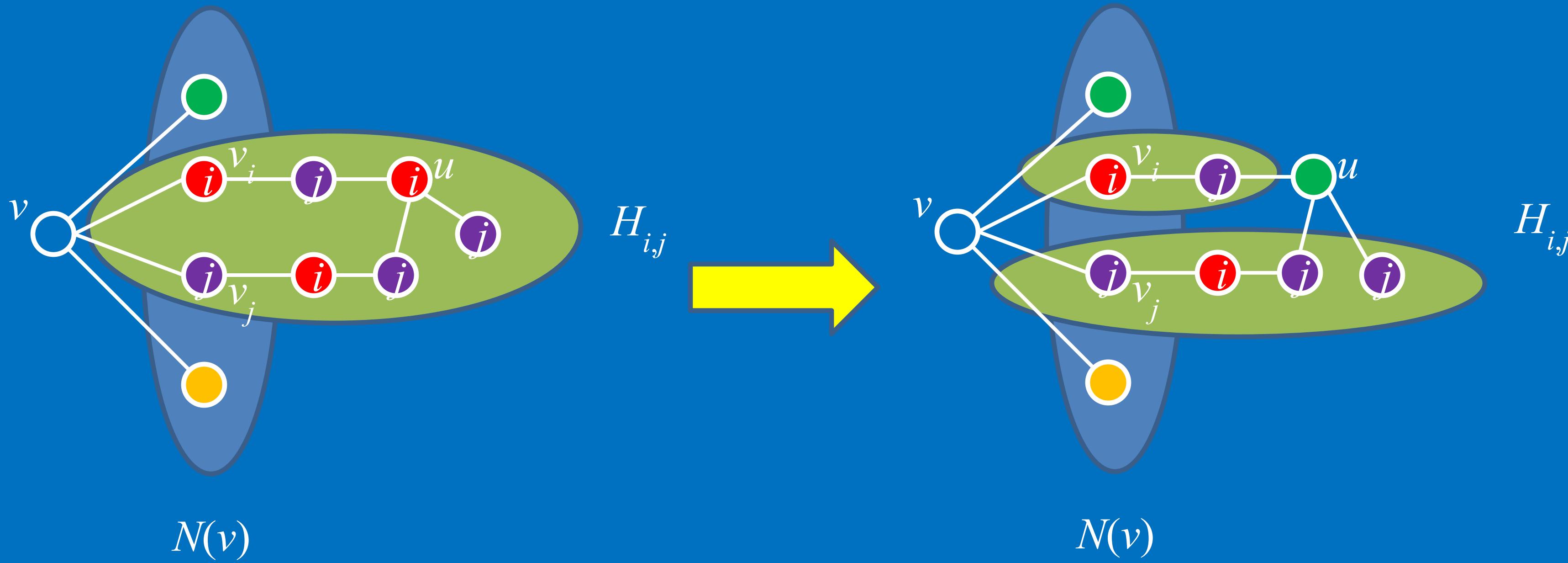
Доказательство

- 3) Компонента связности графа $H_{i,j}$, содержащая v_i и v_j, является путем $P_{i,j}$



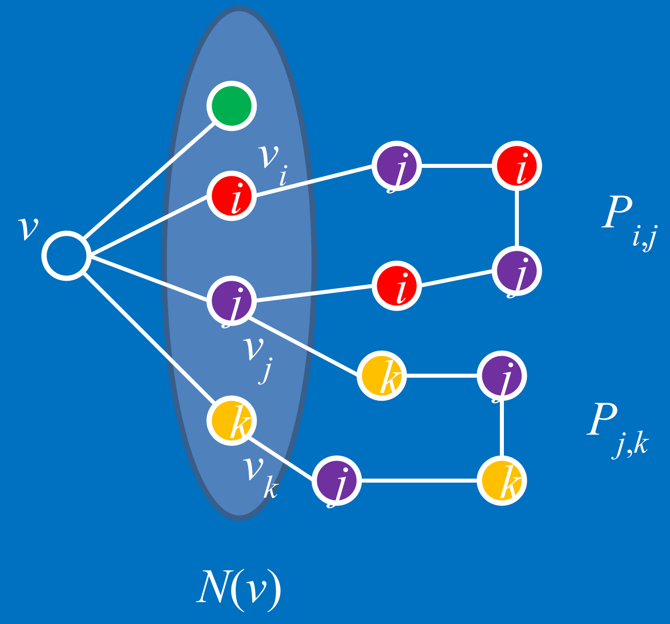
Доказательство

- Если это не так, пусть u – ближайшая к v_i вершина степени больше 2 в $H_{i,j}$. Тогда ее можно перекрасить и разбить компоненту связности $H_{i,j}$



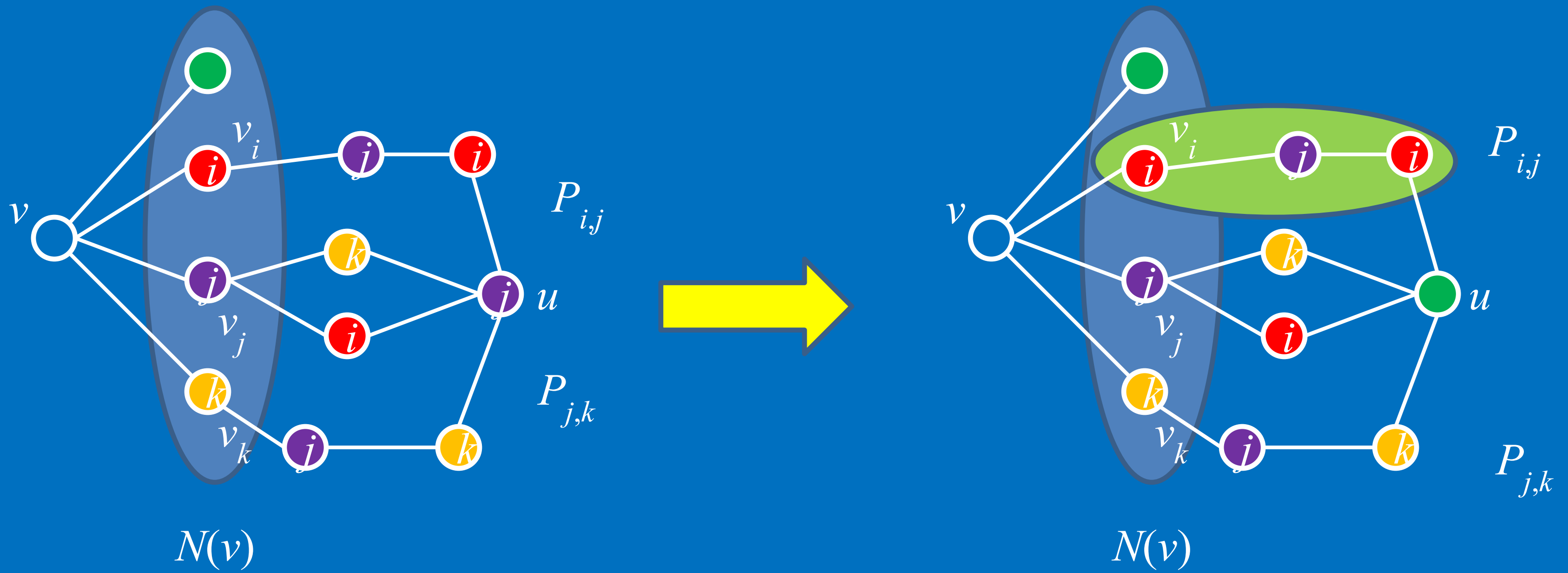
Доказательство

- 4) Для любых i,j,k пути $P_{i,j}$ и $P_{j,k}$ пересекаются только в вершине v_j



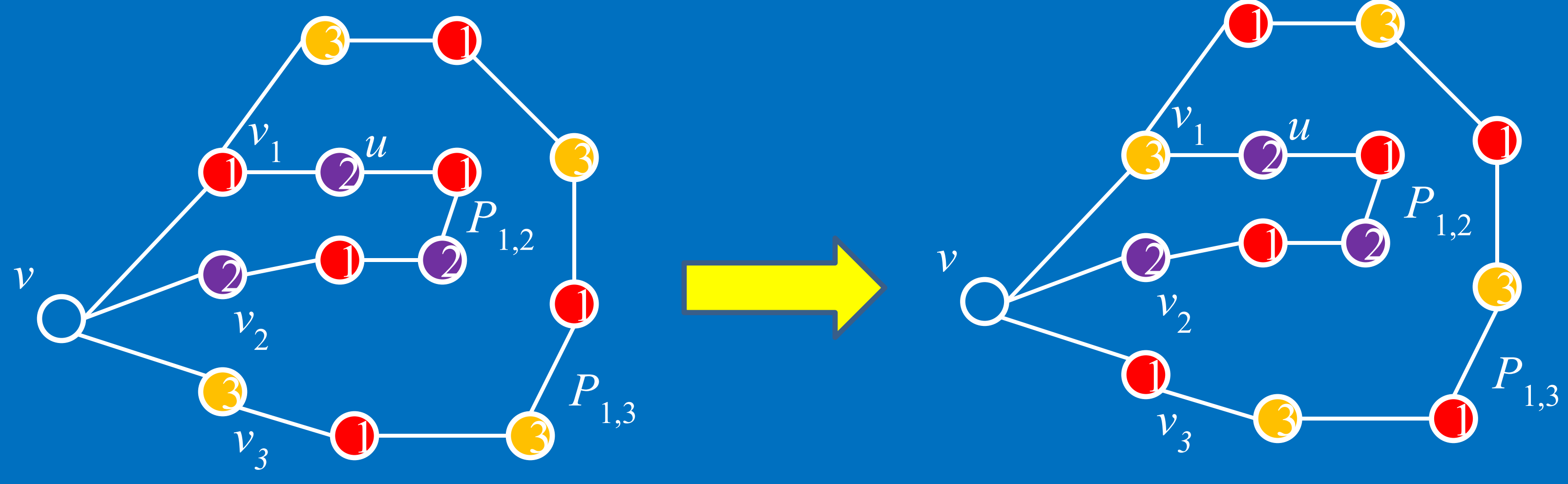
Доказательство

- Если пути $P_{i,j}$ и $P_{j,k}$ пересекаются в вершине $u \neq v_j$, то вершину u можно перекрасить и разбить компоненту связности



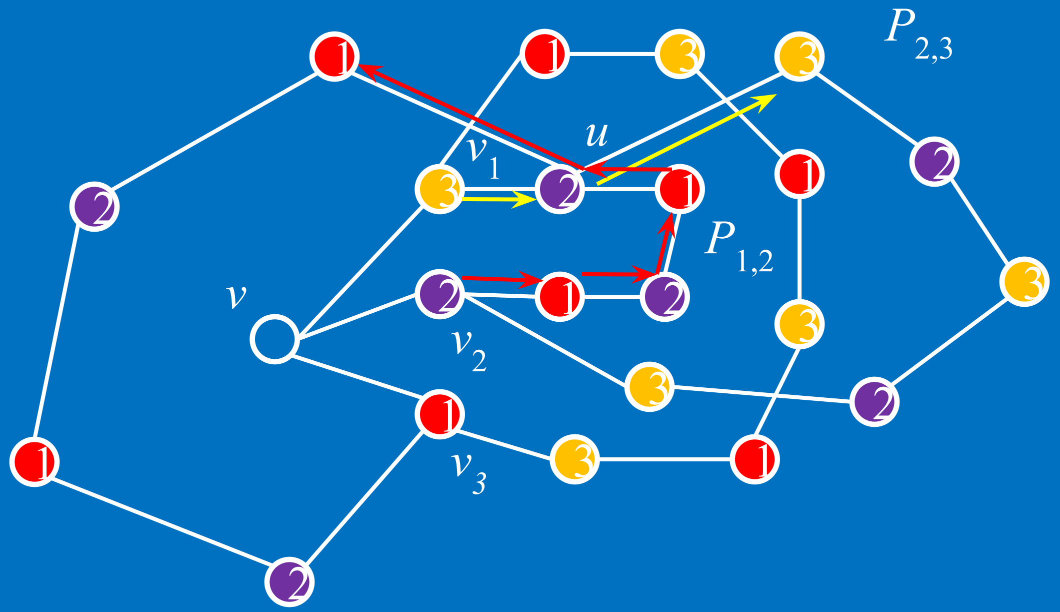
Доказательство

- Так как G – не полный граф, то среди соседей вершины v найдутся две несмежные, скажем v_1 и v_2. Пусть u – сосед вершины v_1, окрашенный цветом 2. Перекрасим путь $P_{1,3}$



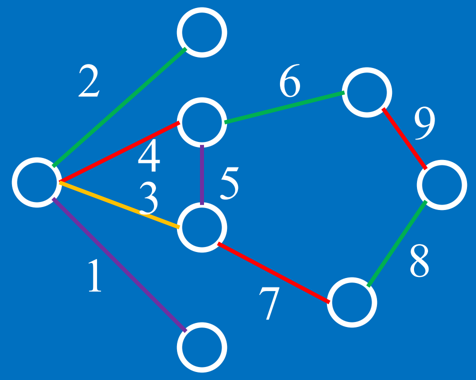
Доказательство

- В полученной раскраске рассмотрим пути $P_{2,3}$ и $P_{1,2}$. Они пересекаются в вершине $u \neq v_2$

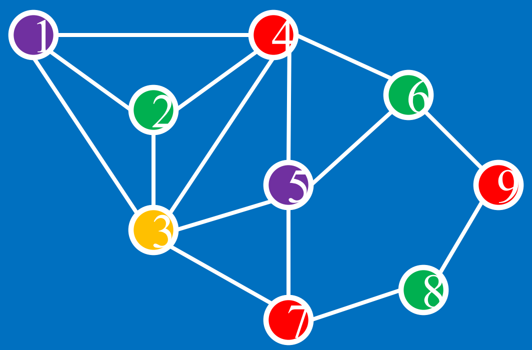


Реберная раскраска

- Раскраска ребер в минимальное число цветов χ', так чтобы не было смежных ребер одного цвета (разбиение на паросочетания)
- Ясно, что $\chi'(G)=\chi(L(G))$



G



$L(G)$

Нижняя оценка

- Очевидно, $\chi'(G) \geq \Delta$
- Теорема Кёнига (1916). Если граф G двудольный, то $\chi'(G) = \Delta$

Доказательство

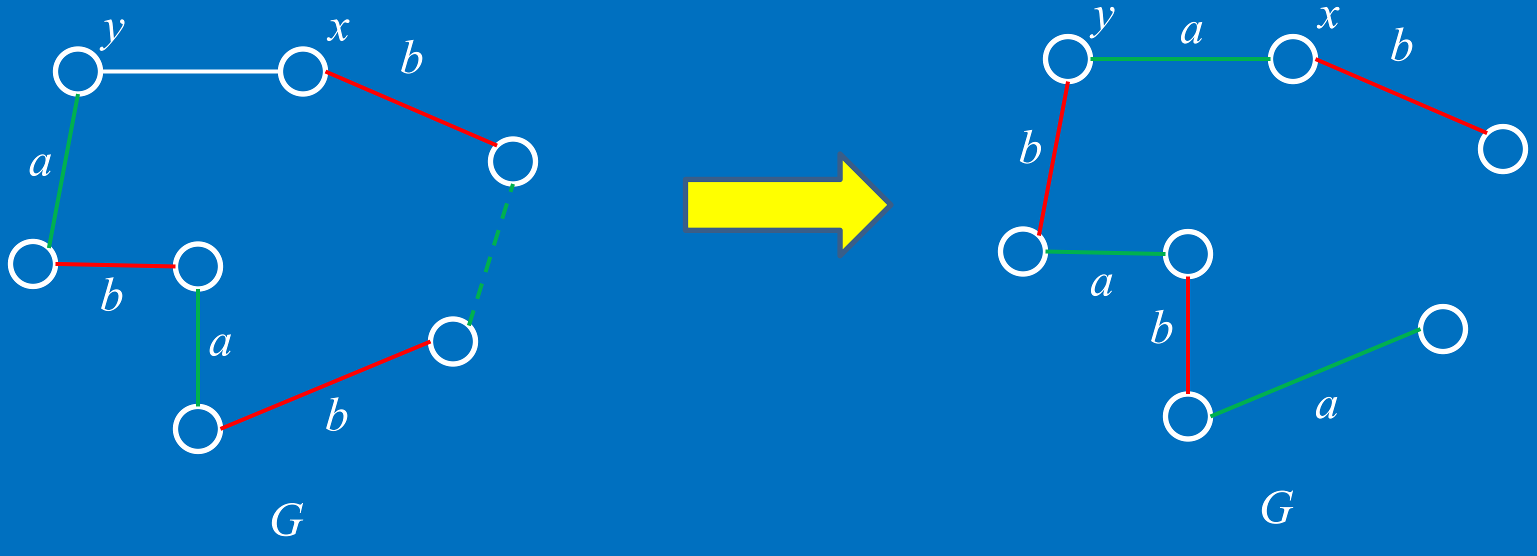
- Индукция по m
- Удалим ребро xy и раскрасим ребра оставшегося графа в Δ цветов по индукции
- При каждой из вершин x и y останется по крайней мере по одному цвету, не использованному для раскраски примыкающих к ней ребер (*свободные цвета*).

Доказательство

- Пусть цвет a свободен при вершине x. Если он свободен и при вершине y, то красим ребро xy цветом a.
- Иначе, обозначим через b свободный цвет при вершине y.
- Рассмотрим цветочередующуюся (a,b)-цепь, начинающуюся в вершине y.

Доказательство

- Эта цепь не может закончиться в вершине x, поскольку граф не содержит нечетных циклов. После ее перекраски ребро xy красится цветом a



Верхняя оценка

- Теорема Визинга (1964). Для любого графа G выполнена оценка $\chi'(G) \leq \Delta+1$

Доказательство

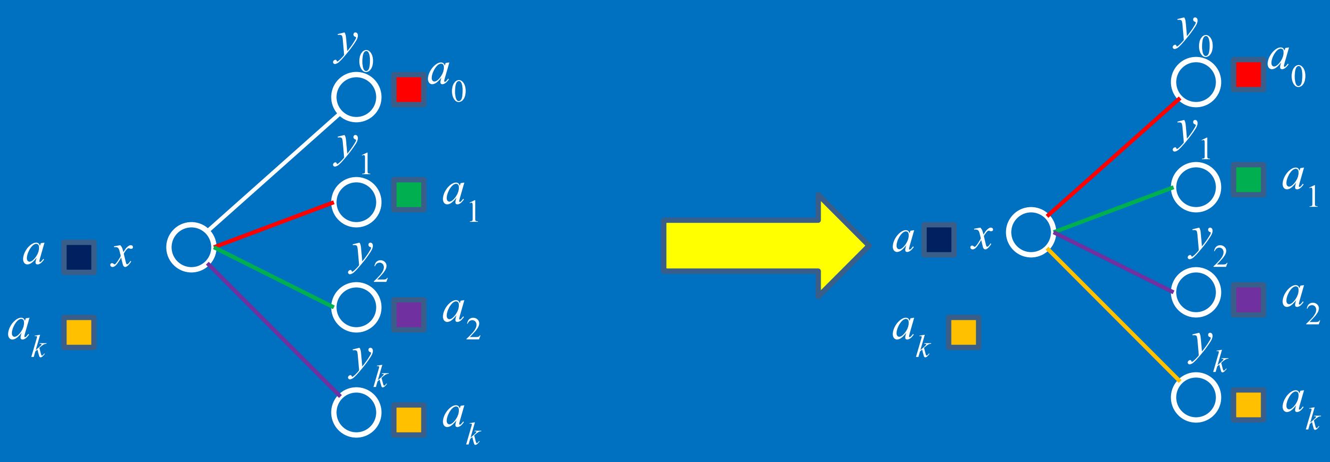
- Индукция по m
- Для любого ребра xy, граф $G\backslash xy$ красится в $\Delta+1$ цвет. Тогда при каждой вершине есть свободный цвет. Более того:
- (*) Для любых цветов a и b, свободных при вершинах x и y соответственно, цветочередующаяся (a,b)-цепь, начинающаяся в вершине y, заканчивается в вершине x (иначе действуем как в Теореме Кёнига).

Доказательство

- Удалим ребро xy_0 и раскрасим полученный граф в $\Delta+1$ цвет. Выберем при x и y_0 свободные цвета a и a_0. При x есть ребро xy_1, окрашенное цветом a_0. Пусть a_1 – свободный при y_1 цвет. Тогда им окрашено некоторое ребро xy_2. И т.д. – строим максимальную последовательность $y_0, y_1, \ldots, y_k$, где ребро xy_i окрашено в цвет a_i, свободный при вершине y_{i-1}

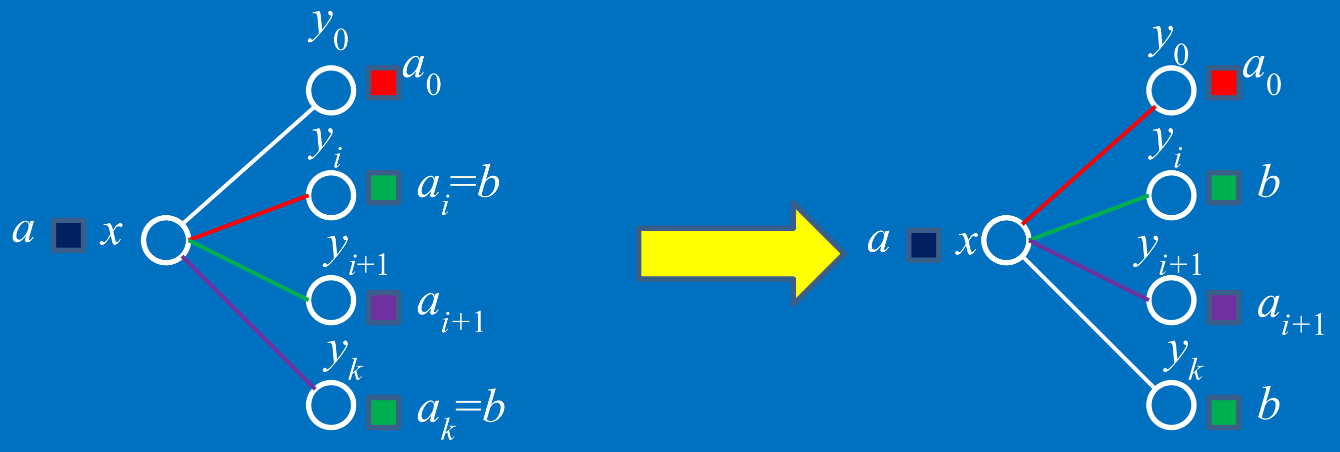
Доказательство

- Если при x нет ребра цвета a_k, то перекрашиваем каждое ребро xy_i в цвет a_i



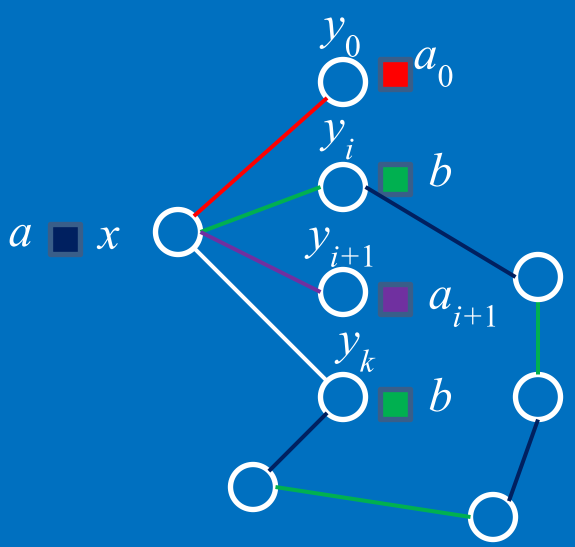
Доказательство

- Значит, найдется такое i, что $a_k = a_i = b$. Перекрасим каждое ребро xy_t в цвет a_t для $t=0,1,\ldots,k$-1. Ребро xy_k станет неокрашенным



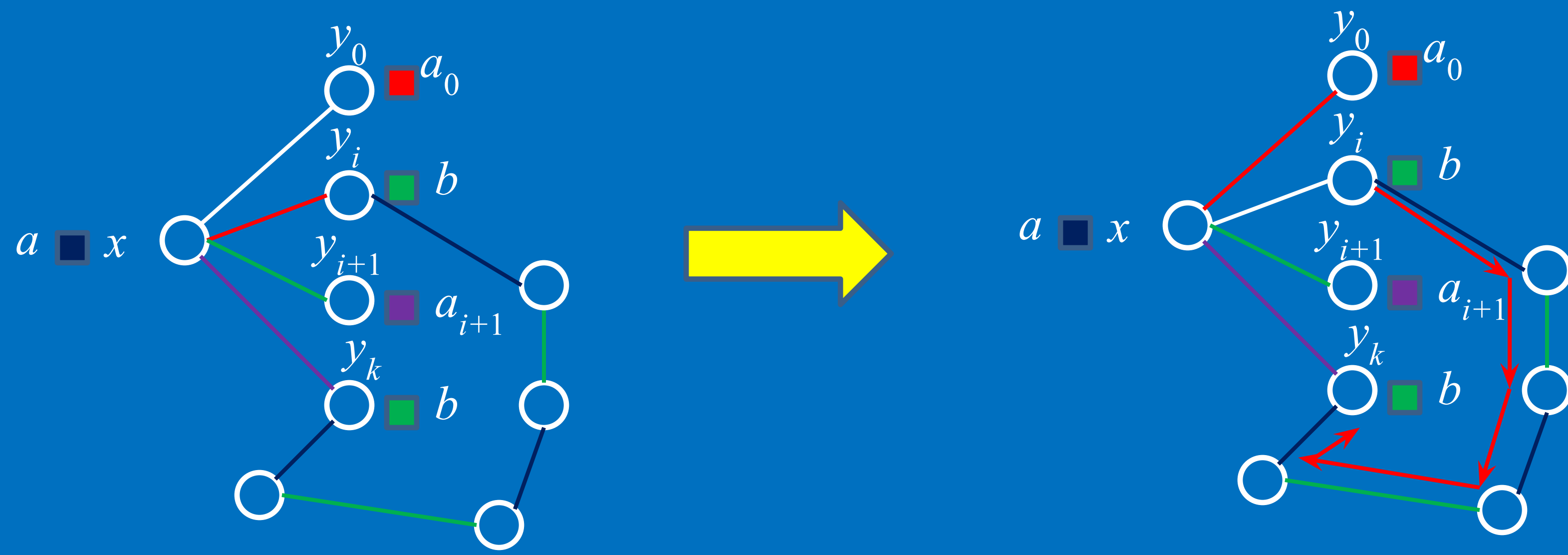
Доказательство

- По (*), цветочередующаяся (a,b)-цепь, начинающаяся в вершине y_k, заканчивается в вершине x. Более того, ее последним ребром будет ребро xy_i



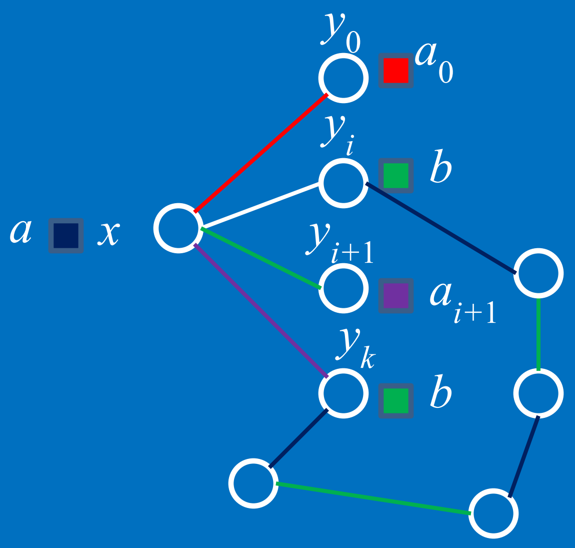
Доказательство

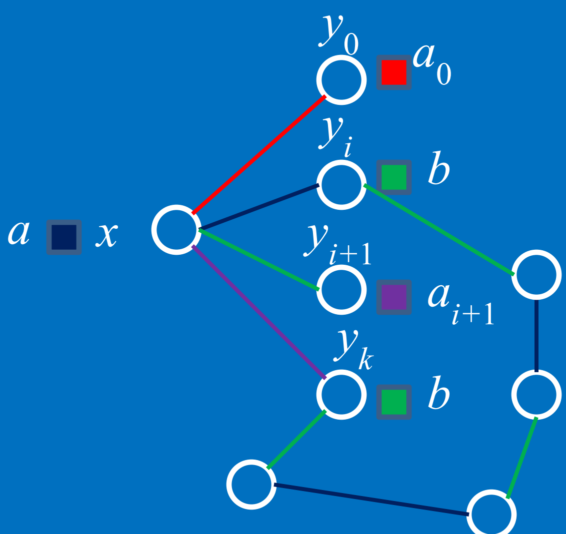
- Вернемся к исходной раскраске и перекрасим каждое ребро xy_t в цвет a_t для t=0,1,…,i-1. Ребро xy_i станет неокрашенным.
- Но тогда цветочередующаяся (a,b)-цепь, начинающаяся в вершине y_i, заканчивается в вершине y_k, а не x.



Доказательство

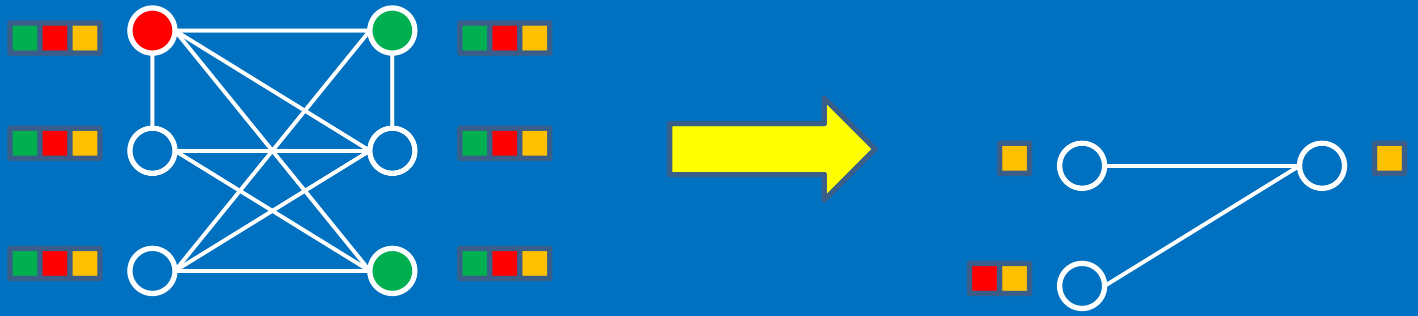
- Значит, ее можно перекрасить и окрасить ребро xy_i цветом a





Предписанная раскраска

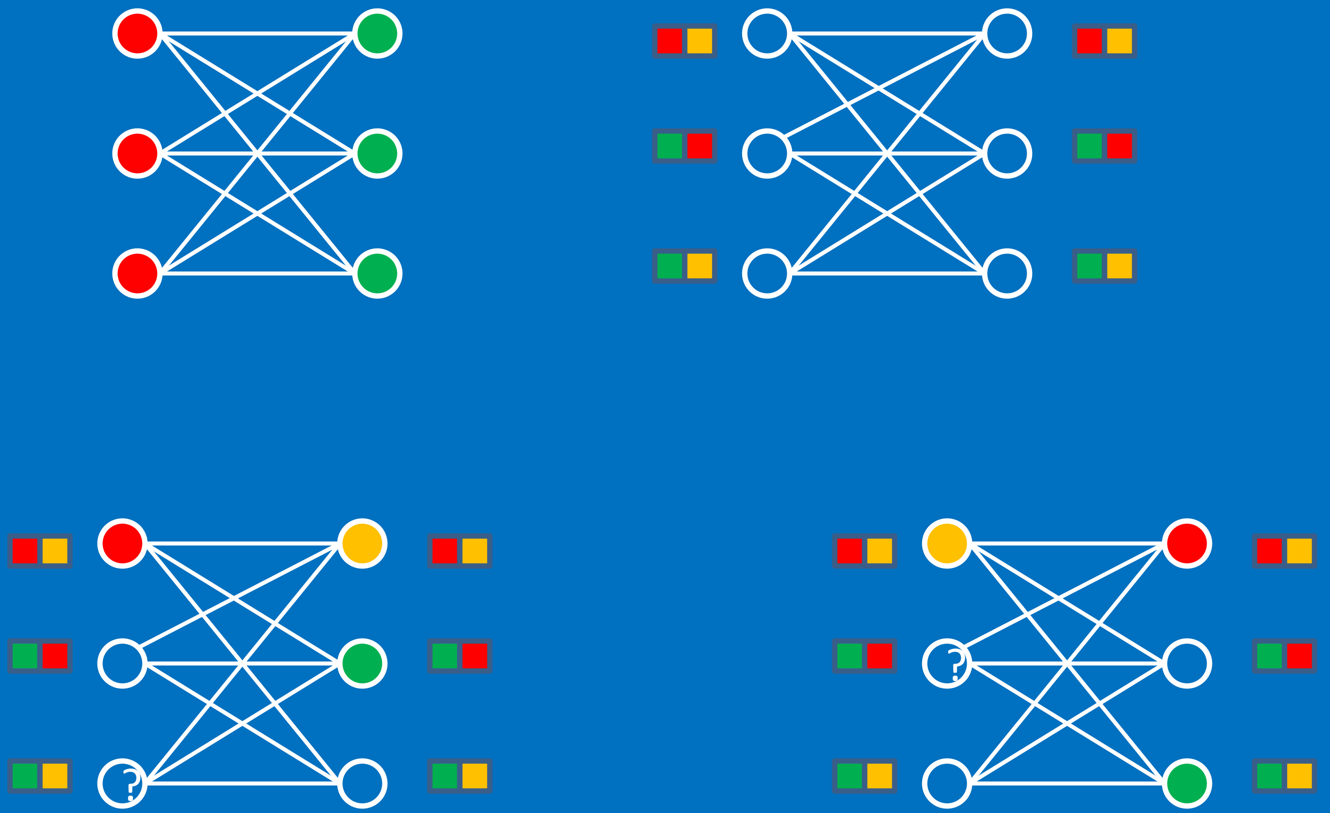
- Каждая вершина (ребро) имеет свой собственный набор допустимых цветов
- Задача возникает при попытке продолжить имеющуюся частичную раскраску графа



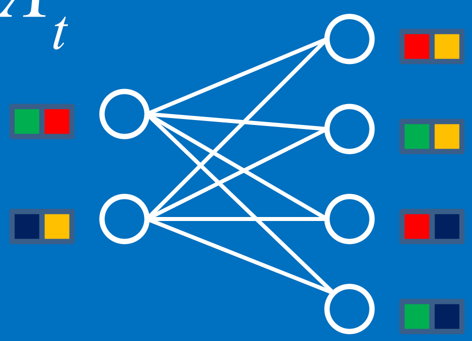
Предписанное хроматическое число $ch(G)$

- Это минимальное k, при котором граф допускает правильную раскраску для любого предписания мощности не менее k при каждой вершине.
- Ясно, что $ch(G) \geq \chi(G)$

Пример граф G с $ch(G)>\chi(G)$

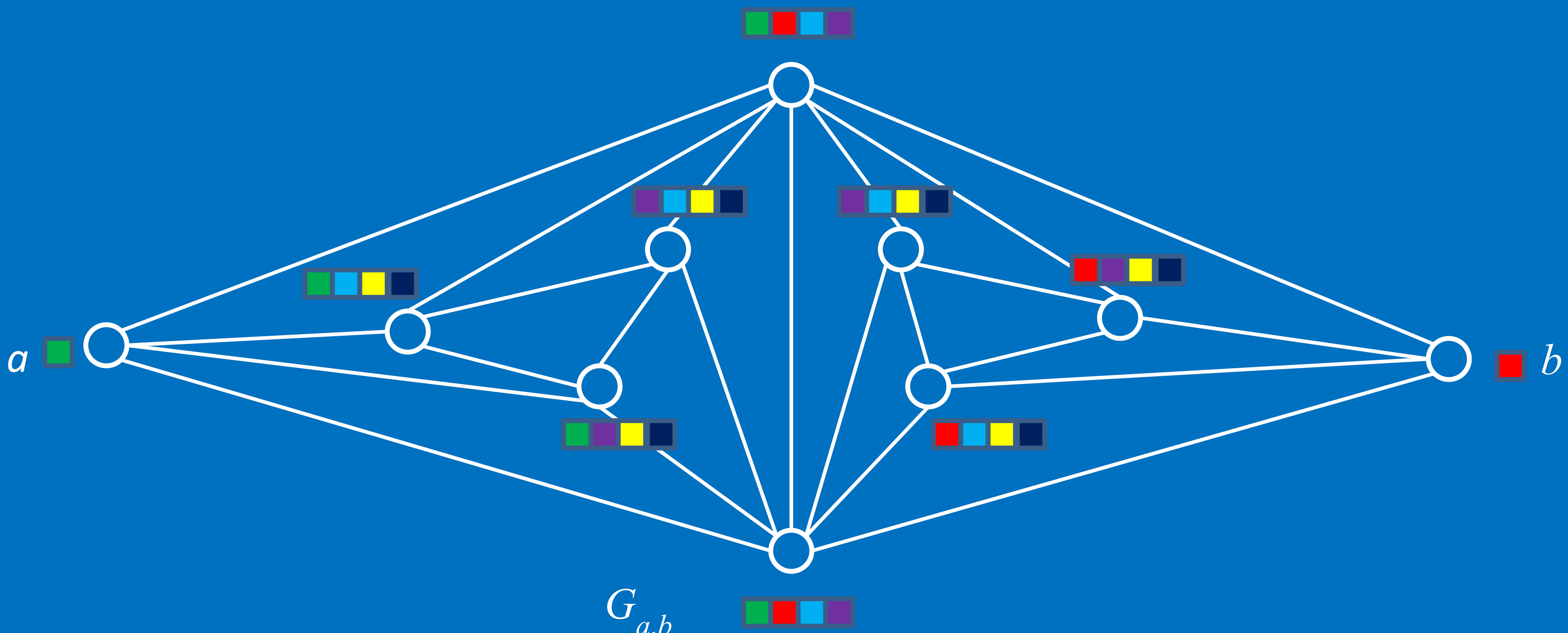


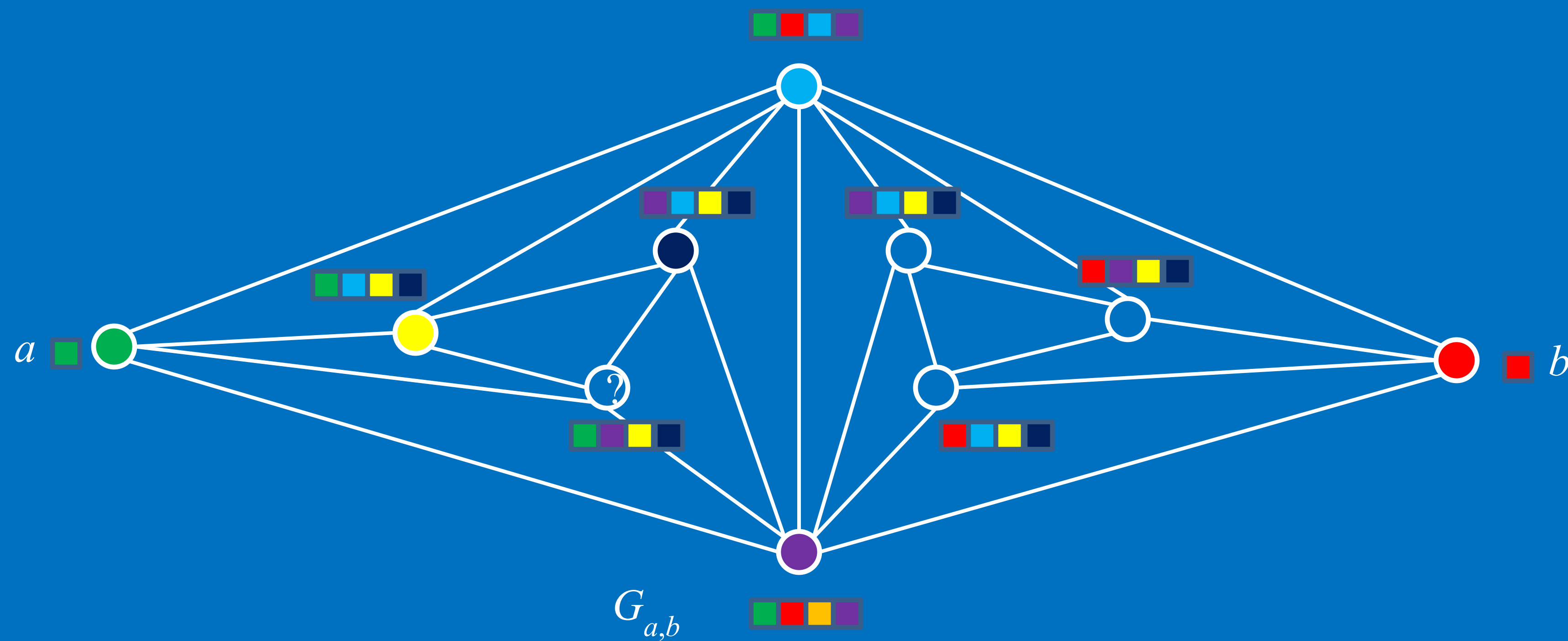
- Теорема. Для любого $t \geq 3$ существует двудольный граф G с $\mathrm{ch}(G) > t$.
- Доказательство. $G = K_{t,t^t}$
- Предписания меньшей доли: непересекающиеся множества $A_1, A_2, \ldots, A_t$ мощности t каждое
- Предписания большей доли: все варианты выбора по одному элементу из $A_1, A_2, \ldots, A_t$

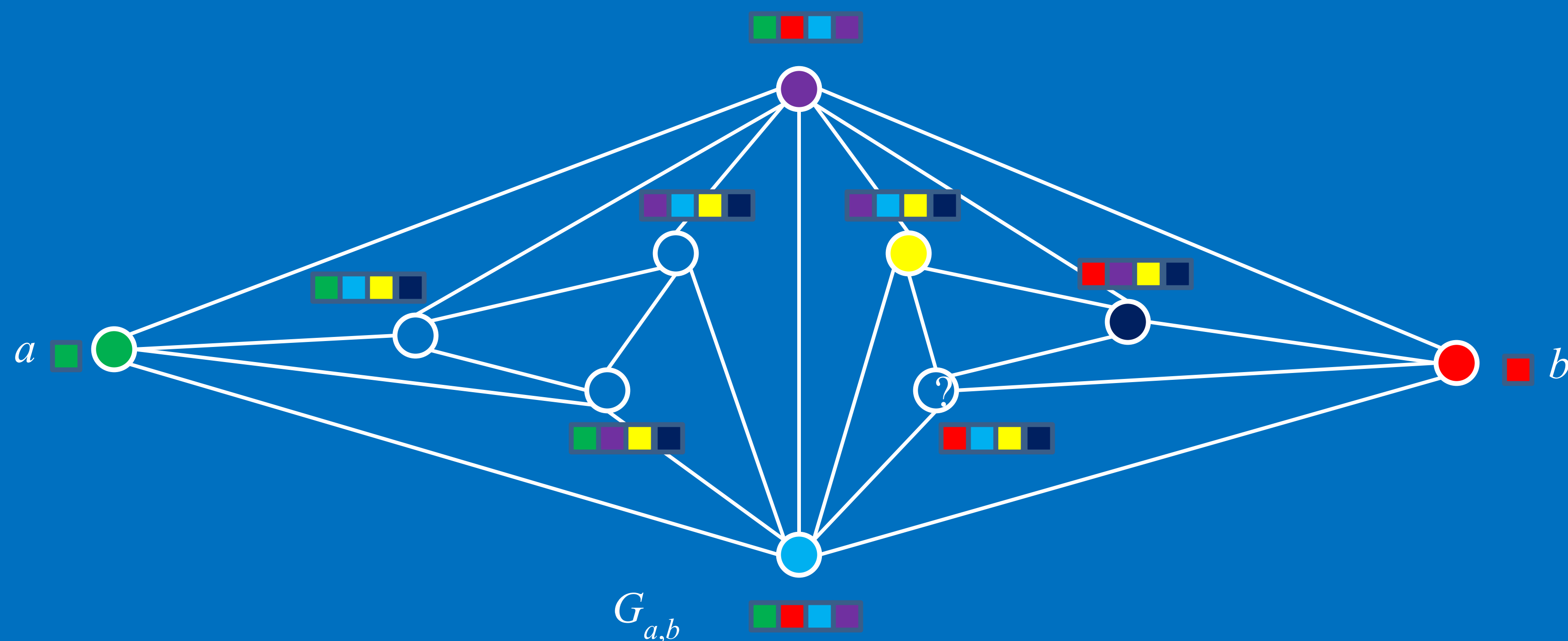


Предписанная раскраска плоских графов

- Существует плоский граф G с $\mathrm{ch}(G)>4$.
- Граф $G_{a,b}$ нельзя раскрасить в соответствии с предписанием

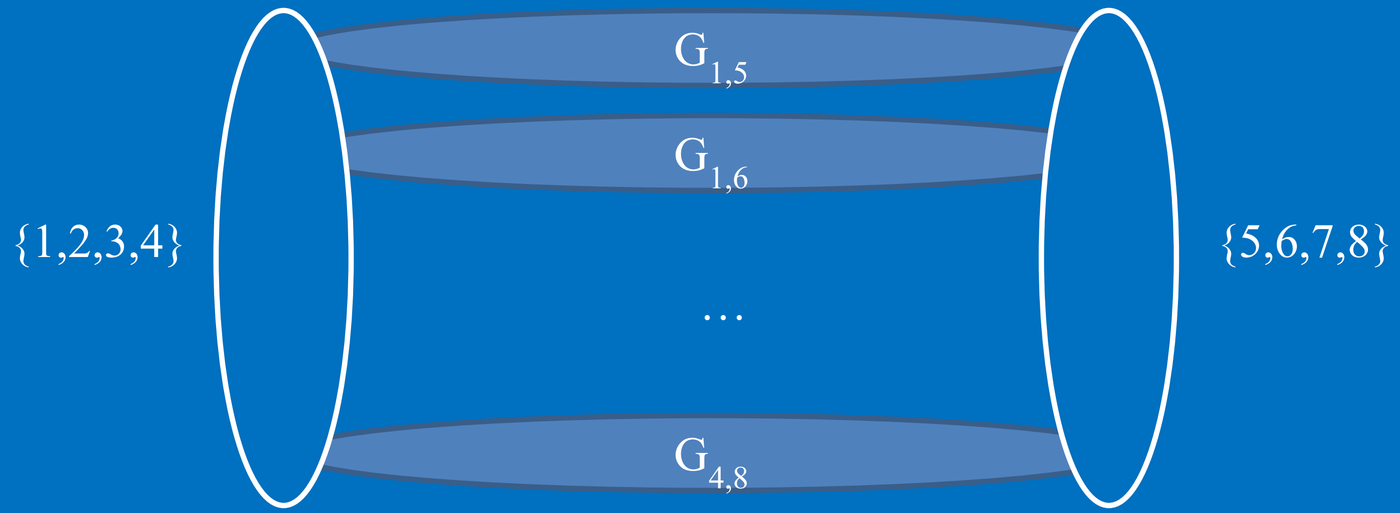



a
b
?
G a,b


a
b
?
G a,b

Предписанная раскраска плоских графов

- Плоский граф G с $\mathrm{ch}(G)>4$



Предписанная раскраска плоских графов

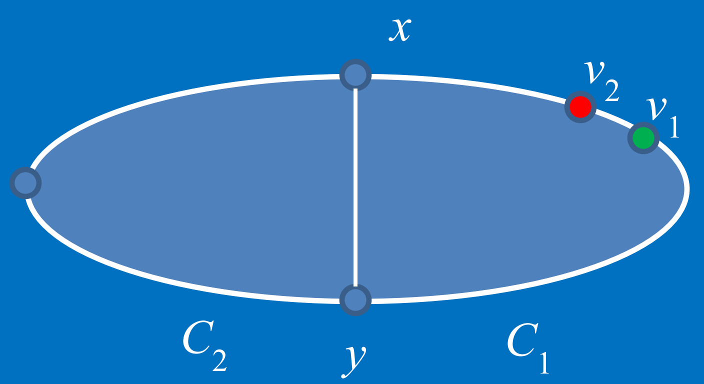
- Теорема Томассена (1994). Если G – плоский, то $\mathrm{ch}(G) \leq 5$

Предписанная раскраска плоских графов

- Лемма. Пусть в плоском графе G внешняя грань ограничена циклом $C=v_1v_2\ldots v_k$, а все внутренние грани треугольные. Пусть v_1 и v_2 окрашены различными цветами a и b, остальные вершины цикла C имеют предписания мощности 3, а внутренние вершины – предписания мощности 5. Тогда существует раскраска графа G в соответствии с этим предписанием.

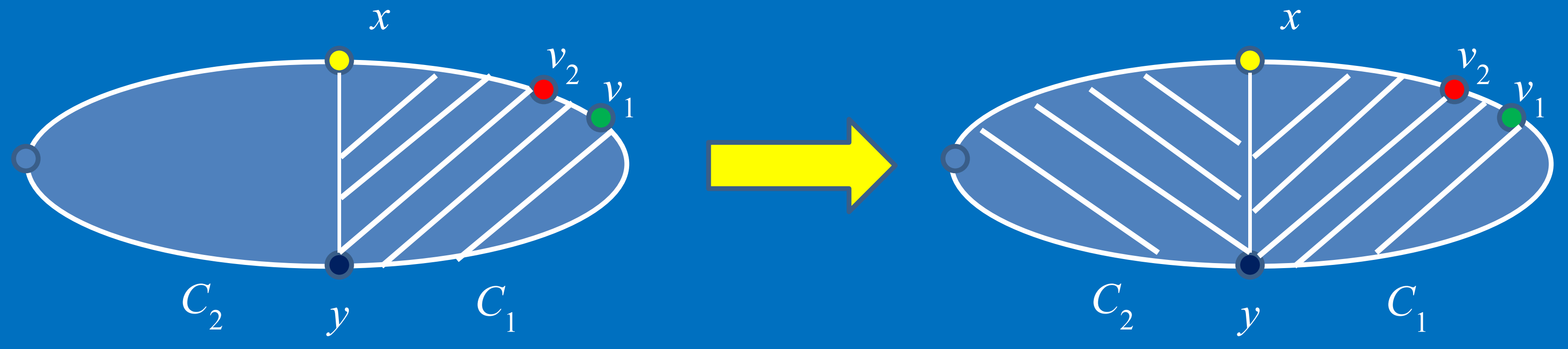
Доказательство

- Индукция по n. Рассмотрим 2 случая
- Случай 1. В цикле C есть хорда xy. Обозначим через C_1 ту часть цикла, которая содержит вершины v_1 и v_2



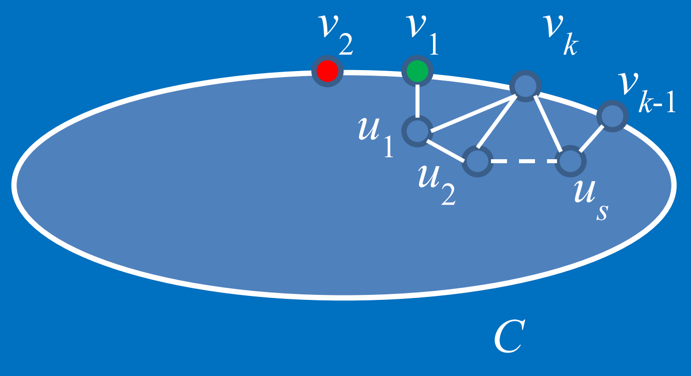
Доказательство

- Красим по индукции сначала C_1, а потом C_2.



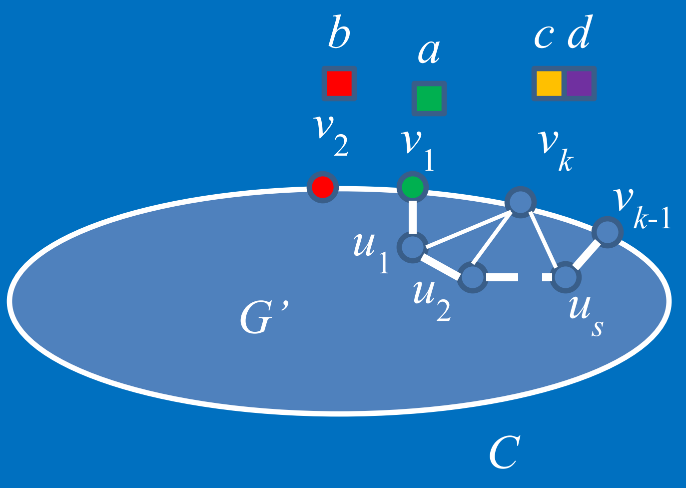
Доказательство

- Случай 2. В цикле C нет хорд. Обозначим через $u_1, u_2, \ldots, u_s$ соседей вершины v_k, лежащих внутри цикла C



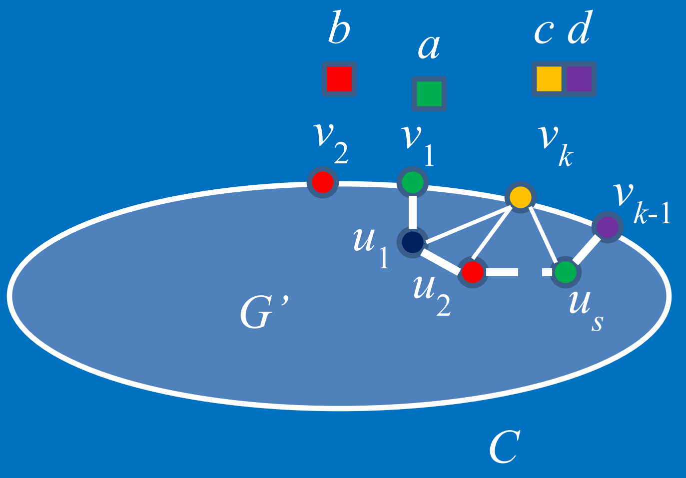
Доказательство

- В предписании вершины v_k выберем цвета c и d, отличные от a и удалим их из предписаний вершин $u_1, u_2, \ldots, u_s$. Удалив вершину v_k, получим меньший граф G' с предписанием, удовлетворяющим условиям теоремы.



Доказательство

- По индукции раскрасим граф G' в соответствии с предписанием. Цвета c и d не использовались при раскраске вершин $v_1, u_1, u_2, \ldots, u_s$. Красим v_k тем из них, который отличен от цвета вершины v_{k-1}.



Предписанная раскраска ребер

- Гипотеза Визинга. Для любого графа G, $ch'(G)=\chi'(G)$.

- Теорема Галвина (1995). Если граф G двудольный, то $ch'(G)=\chi'(G)$.

- Лемма. Пусть в графе G задано вершинное предписание L. Предположим, ребра G можно ориентировать так, чтобы:
- (1) $|L(v)|>d^{+}(v)$ для каждой вершины v
- (2) В любом подграфе G' найдется такое независимое множество A, что из каждой вершины $v \in G' \setminus A$ в A ведет хотя бы одна дуга.
- Тогда вершины графа G можно раскрасить в соответствии с предписанием.

Доказательство леммы

- Индукция по n.
- Выберем цвет a и рассмотрим подграф G', порожденный вершинами, чьи предписания содержат a. Раскрасим вершины из A цветом a и удалим их из G. Удалим цвет a из предписаний остальных вершин графа G'. Их предписания уменьшатся на 1. Но так как их исходящие полустепени также уменьшились хотя бы на 1, то оставшийся граф можно докрасить по индукции.

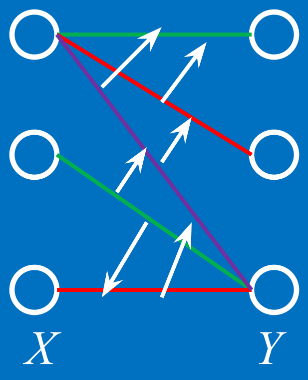
Доказательство теоремы

- Рассмотрим граф $H=L(G)$. Построим для него ориентацию, удовлетворяющую условиям леммы.

- Пусть $G=(X,Y;E)$. По теореме Кёнига $\chi'(G)=\Delta$. Обозначим через $f(e)$ цвет ребра e в некоторой реберной раскраске графа G в Δ цветов.

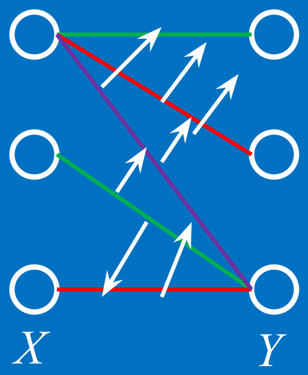
Доказательство теоремы

- Пусть e_1 и e_2 – два смежных в G ребра, причем $f(e_1)>f(e_2)$. Тогда если они смежны в X, то в H ориентируем дугу от e_1 к e_2, а если они смежны в Y, то в H ориентируем дугу от e_2 к e_1.



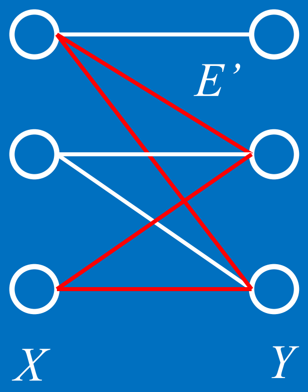
Доказательство теоремы

- Ясно, что $|d^{+}(v)| \leq \Delta - 1$, так как у дуги цвета k есть не более $k-1$ соседа в X, раскрашенных меньшими цветами и не более $\Delta - k$ соседей в Y раскрашенных большими цветами.



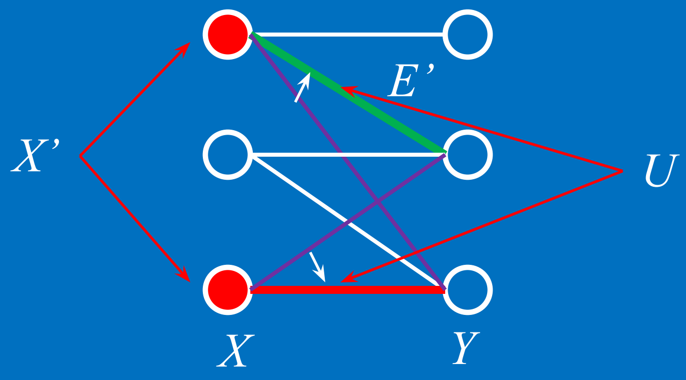
Доказательство теоремы

- Предположим, условие (2) леммы не выполнено. Рассмотрим минимальный по числу вершин подграф H', который ему не удовлетворяет. Пусть $E'=V(H')$.



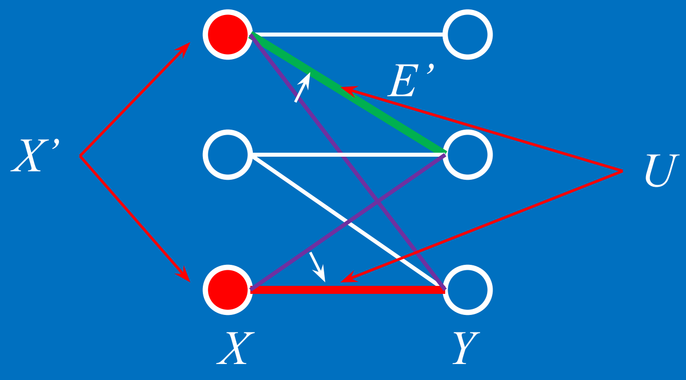
Доказательство теоремы

- Пусть X' – подмножество вершин из X, инцидентных дугам из E'. Для каждой вершины $x \in X'$ выберем инцидентную ей дугу e_x наименьшего цвета. Пусть U – множество вершин H', соответствующее всем таким дугам.



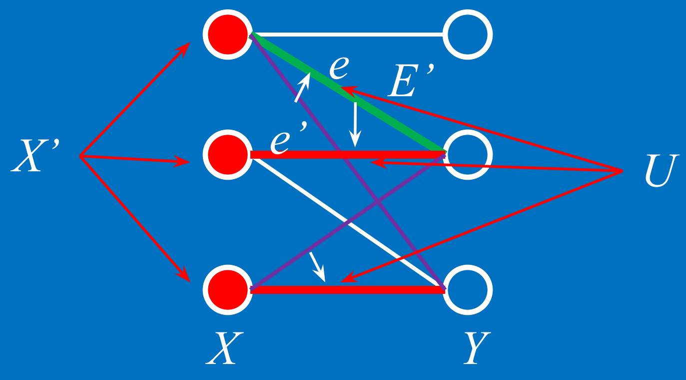
Доказательство теоремы

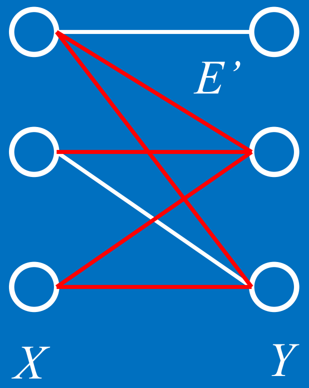
- Ясно, что из любой другой вершины из H' исходит дуга, ведущая в U. Если U независимо, то $A=U$.



Доказательство теоремы

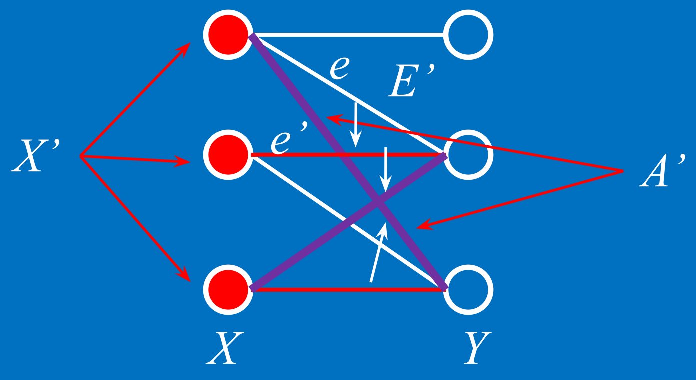
- Пусть e и e' смежны в U, причем $f(e)<f(e')$. Так как e и e' смежны в Y, то дуга в H направлена от e к e'.





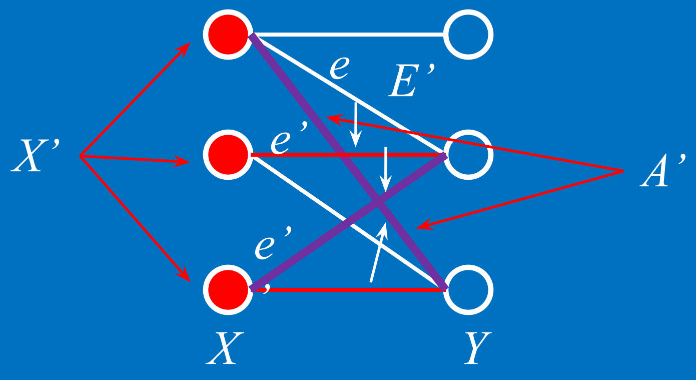
Доказательство теоремы

- Удалим e из H'. По индукции, $H' \setminus e$ содержит множество A', удовлетворяющее условиям леммы. Если $e' \in A'$, то $A = A'$. Предположим, $e' \notin A'$.



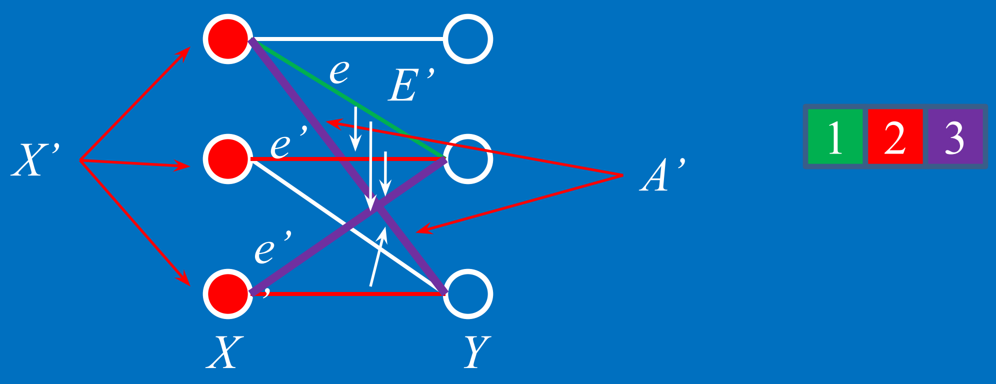
Доказательство теоремы

- По определению A' существует $e'' \in A'$, в которую ведет дуга из e'. По определению U e' и e'' не могут быть смежны в X. Значит, они смежны в Y и $f(e') < f(e'')$.



Доказательство теоремы

- Но тогда и e и e'' смежны в Y, причем $f(e)<f(e'')$. Значит в H есть дуга из e в e'', т. е. $A=A'$ удовлетворяет условиям леммы для подграфа H'.



Упражнения

- 1. Доказать, что если G' – это дополнение G, то $\max\{\chi(G),\chi(G')\}\geq n^{1/2}$

- 2. Доказать, что
- $\chi(G)\leq 1/2 + (2m+1/4)^{1/2}$,
- где m – число ребер в G

Спасибо
за внимание!