Методы оптимизации

Преподаватель: Каныгин Георгий Иванович, кафедра «Информационные технологии», аудитория 352

Литература

1. Соболь Б.В., Месхи Б.Ч., Каныгин Г.И. Методы оптимизации: практикум.

2. Банди Б. Методы оптимизации. Вводный курс.
3. Банди Б. Основы линейного программирования.
4. Пантелеев А.В., Летова Т.А. Методы оптимизации в примерах и задачах.
5. Реклейтис Г., Рейвиндран А., Рэгсдел К. Оптимизация в технике. ч.1,2.
6. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах..
7. Кузнецов Ю.Н., Кузубов В.И., Волощенко А.Б. Математическое программирование.

1. Основные определения

Под оптимизацией понимают процесс выбора наилучшего варианта из всех возможных.

Параметры оптимизируемого объекта при решении инженерных задач принято называть ***проектными параметрами***, а в экономических задачах – ***параметрами плана.***

Выбор оптимального решения проводится с помощью некоторой функции, определяемой проектными параметрами. Она называется ***целевой функцией*** (или критерием оптимальности).

Целевую функцию можно записать в виде

$$f(\overline{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_n),$$

где $\overline{x} \in X \subseteq R^n$,

здесь R^n – множество всех действительных чисел n -мерного пространства;

X – область допустимых значений $\overline{x}$.

Число n проектных параметров характеризует размерность задачи оптимизации.

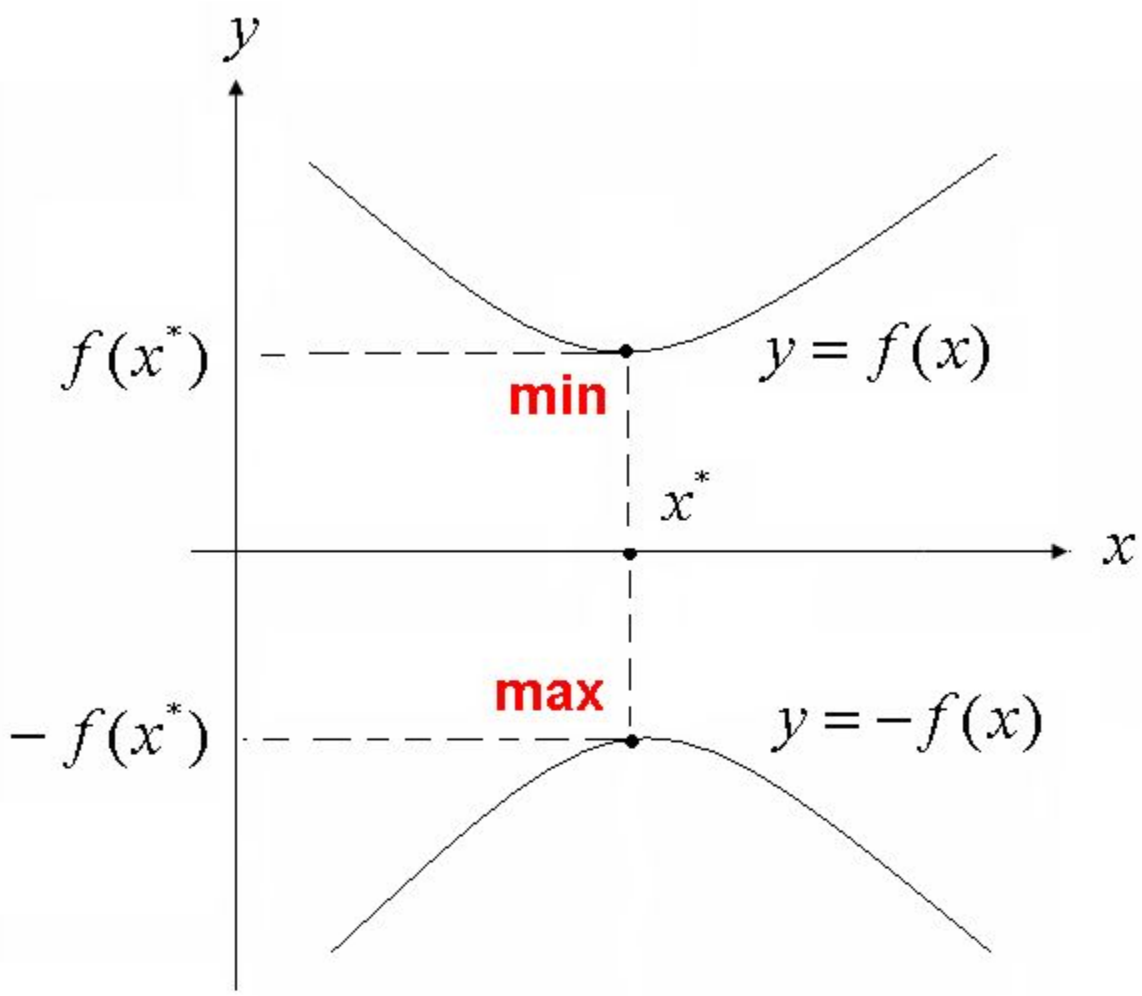
Допустимый вектор $\overline{x^*} = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ доставляющий минимум целевой функции $f(\overline{x})$ ***называется оптимальной точкой***, а соответствующее значение $f(\overline{x^*})$ - ***оптимальным значением*** целевой функции.

Пара $\overline{x^*},\ f(\overline{x^*})$ составляет оптимальное решение.

Обычно рассматривают задачи минимизации целевой функции ; к ним легко сводятся задачи на поиск максимума путем замены знака целевой функции на обратный

$$f(\overline{x^*}) = \max_{x \in X} f(\overline{x}) = -\min_{x \in X} [-f(\overline{x})]$$

Например, для функции одной переменой, имеем



1.1.Задачи оптимизации

Выделяют два типа задач оптимизации: ***безусловные и условные.***

- В ***безусловных задачах*** на пространство проектирования никаких ограничений не накладывается $\bar{x} \in X = R^n$. Функция $f(\bar{x})$ определена всюду.

- В ***условных задачах*** задаются некоторые ограничения на пространство проектирования. Эти ограничения задаются совокупностью некоторых функций в виде равенств:

$$\varphi_i(\bar{x}) = 0, \qquad \bar{x} \in X \subset R^n, \quad i = \overline{1, m}$$

или неравенств:

$$a_i \le \varphi_i(\bar{x}) \le b_i, \ \bar{x} \in X \subset R^n, \ i = \overline{1, m}.$$

Любой вектор $\overline{x^*} = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$, удовлетворяющий ограничениям, ***называется допустимым вектором или допустимой точкой***.

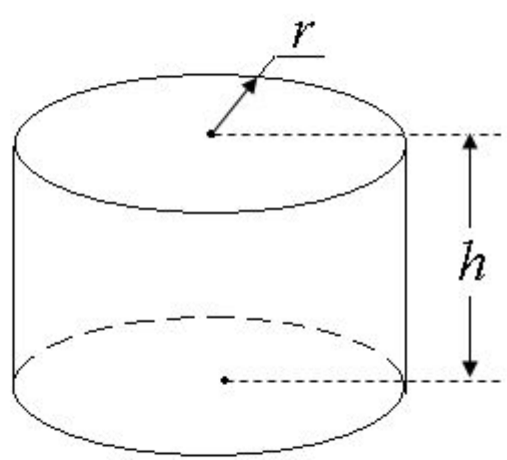
При наличии ограничений оптимальное решение может находится или внутри области (***локальный экстремум***) или на границе области. Если ограничение отсутствуют, то ищется оптимальное решение на всей области (***глобальный экстремум***).

Глобальный экстремум всегда является одновременно локальным, но не наоборот.

Пример 1.1. Постановка задачи оптимизации.

Требуется изготовить закрытый цилиндрический бак объемом V_0.

Какими должны быть его размеры, чтобы на изготовление ушло наименьшее количество материала?



Проектные параметры:

- радиус цилиндра r;
- высота цилиндра h.

Целевая функция (которую необходимо минимизировать) – площадь поверхности бака:

$$s(r,h) = 2\pi(r^2 + rh) \to \min.$$

Ограничение – равенство:

$$V_0 = \pi \cdot r^2 \cdot h.$$

Ограничение – равенство благодаря своей простоте позволяет уменьшить размерность задачи оптимизации.

Исключим h из проектных параметров

$$h = \frac{V_0}{\pi \cdot r^2}$$

$$s(r) = 2\pi(r^2 + \frac{V_0}{\pi \cdot r}) \to \min -$$

одномерная задача оптимизации.

1.2. Характеристика методов решения задач оптимизации

При решении конкретной задачи оптимизации прежде всего должен быть выбран математический метод, который привел бы к конечным результатам с наименьшими затратами на вычисления или же давал возможность получить наибольший объем информации об искомом решении.

Выбор того или иного метода в значительной степени определяется постановкой задачи оптимизации, а также используемой математической моделью объекта оптимизации.

В настоящее время для решения задач оптимизации применяют в основном следующие методы:

- методы исследования функций классического анализа;
- нелинейное программирование;
- линейное программирование;
- геометрическое программирование;
- динамическое программирование;
- квадратичное программирование
- вариационное исчисление;
- принцип максимума.

- **Методы исследования функций классического анализа** представляют собой наиболее известные методы решения несложных задач оптимизации с использованием курса математического анализа.

- **Методы нелинейного программирования** применяют для решения задач оптимизации с нелинейными функциями цели. На независимые переменные могут быть наложены ограничения в виде нелинейных соотношений, имеющих вид равенств или неравенств. Названием ***«методы нелинейного программирования»*** объединяется большая группа численных методов, многие из которых приспособлены для решения задач оптимизации соответствующего класса.

- **Линейное программирование**

  представляет собой математический аппарат, разработанный для решения оптимальных задач с линейными выражениями для критерия оптимальности и линейными ограничениями на область изменения переменных.

- **Методы динамического программирования**

  служат эффективным методом решения задач оптимизации дискретных многостадийных процессов, для которых критерий оптимальности задается как аддитивная функция критериев оптимальности отдельных стадий.

- **Геометрическое программирование**

  Метод решения одного специального класса задач нелинейного программирования, в которых целевая функция и ограничения задаются в виде полиномов – выражений, представляющих собой сумму произведений степенных функций от независимых переменных.

- **Квадратичное программирование**

  Является частным случаем задачи нелинейного программирования, в которой критерий оптимальности представляет собой квадратичную функцию, а ограничения являются линейными функциями.

- **Методы вариационного исчисления**

  Обычно используют для решения задач, в которых критерии оптимальности представляются в виде функционалов и решениями которых служат неизвестные функции. Такие задачи возникают при статической оптимизации процессов с распределенными параметрами.

- **Принцип максимума**

  Применяют для решения задач оптимизации процессов, описываемых системами дифференциальных уравнений.