



ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ НА ТРАНСПОРТЕ

5 курс ОПУТ

СТРУКТУРА КУРСА

- Информационные технологии на транспорте
 - Математические методы при решении транспортных управленческих и экономических задач
- Базы данных Информационные системы
- Автоматизированные системы управления (АСУ) и средства связи на транспорте

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПРИ РЕШЕНИИ ТРАНСПОРТНЫХ УПРАВЛЕНЧЕСКИХ И ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Понятие математического программирования

Математическое программирование – это математическая дисциплина, в которой разрабатываются методы отыскания экстремальных значений целевой функции среди множества ее возможных значений, определяемых ограничениями.

- Наличие ограничений делает задачи математического программирования принципиально отличными от классических задач математического анализа по отысканию экстремальных значений функции. Методы математического анализа для поиска экстремума функции в задачах математического программирования оказываются непригодными.
- Для решения задач математического программирования разработаны и разрабатываются специальные методы и теории. Так как при решении этих задач приходится выполнять значительный объем вычислений, то большое значение придается эффективности и удобству их реализации на ЭВМ.

ПОНЯТИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Математическое программирование можно рассматривать как совокупность самостоятельных разделов, занимающихся изучением и разработкой методов решения определенных классов задач.

В зависимости от свойств целевой функции и функции ограничений все задачи математического программирования делятся на два основных класса:

- задачи линейного программирования,
- задачи нелинейного программирования.

Если целевая функция и функции ограничений – линейные функции, то соответствующая задача поиска экстремума является задачей линейного программирования. Если хотя бы одна из указанных функций нелинейна, то соответствующая задача поиска экстремума является задачей нелинейного программирования.

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Среди разных разделов математического программирования наиболее развитым и законченным является линейное программирование (ЛП).

- В 1939 году Леонид Витальевич Канторович опубликовал работу «Математические методы организации и планирования производства», в которой сформулировал новый класс экстремальных задач с ограничениями и разработал эффективный метод их решения, таким образом были заложены основы линейного программирования
- Термин «программирование» нужно понимать в смысле «планирования» (один из переводов англ. programming). Он был предложен в середине 1940-х годов Джорджем Данцигом, одним из основателей линейного программирования, ещё до того, как компьютеры были использованы для решения линейных задач оптимизации.

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Линейное программирование характеризует определение программы (плана) работы конкретного экономического объекта на основе выявления линейных связей между его элементами.

Задачей линейного программирования является нахождение оптимального, т. е. наилучшего, плана при заданной системе налагаемых на решение ограничений.

К классу линейного программирования (75% решаемых задач) относятся задачи, в которых целевая функция $W_m(x)$, $m=1,2,\dots,M$, ограничения в виде равенств $h_k(x)=0$, $k=1,2,\dots,K$, и неравенств $g_j(x)>0$, $j=1,2,\dots,J$, - линейны и нет математического решения.

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

К классу задач линейного программирования относится большое количество разнообразных задач планирования и управления, называемых Общими линейными задачами (ОЛЗ) . Частным случаем ОЛЗ являются **Распределительные задачи**.

Распределительные задачи (РЗ) возникают в случае, когда имеющихся в наличии ресурсов не хватает для выполнения каждой из намеченных работ эффективным образом и необходимо наилучшим образом распределить ресурсы по работам в соответствии с выбранным критерием оптимальности. Например: нахождение оптимального плана выпуска продукции (оптимальное распределение ресурсов); задача о назначениях (оптимальное распределение различных видов транспортных средств) и др.

РЗ подразделяются на следующие подзадачи:

- ТЗ – транспортная задача:
- оптимальное распределение потоков товарных поставок по транспортной сети. Частный случай ТЗ – задача о назначениях. В задаче о назначениях количество пунктов отправления равно количеству пунктов назначения. Объемы потребности и предложения в каждом из пунктов назначения и отправления равны 1.
- УЗ – управление запасами: планирование производства различных видов продукции ; задача об оптимизации товарных запасов и т.п

ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛЕЙ ОДНОИНДЕКСНЫХ ЗАДАЧ ЛП

Характерные черты одноиндексных задач ЛП следующие:

- 1) показатель оптимальности $L(X)$ или Целевая функция (ЦФ) представляет собой *линейную* функцию от элементов решения $X = x_i$ где $i = 1, \dots, n$ или (x_1, x_2, \dots, x_n) ;
- 2) ограничительные условия, налагаемые на возможные решения, имеют вид *линейных равенств или неравенств*.

ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛЕЙ ОДНОИНДЕКСНЫХ ЗАДАЧ ЛП

Общая форма записи модели задачи ЛП

Целевая функция (ЦФ)

$$L(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max (\min), (1.1)$$

при ограничениях

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = (\geq, \leq) b_1;$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = (\geq, \leq) b_2;$$

...

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = (\geq, \leq) b_m;$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; \dots; x_n \geq 0$$

$$b_1 \geq 0; b_2 \geq 0; \dots; b_m \geq 0$$

При описании реальной ситуации с помощью линейной модели следует проверять наличие у модели таких свойств, как пропорциональность и аддитивность.

Пропорциональность означает, что вклад каждой переменной в ЦФ и общий объем потребления соответствующих ресурсов должен быть *прямо пропорционален величине этой переменной*. Примером нарушения пропорциональности является ситуация когда продавая j -й товар в общем случае по цене 100 рублей, фирма будет делать скидку при определенном уровне закупки до уровня цены 95 рублей – в этом случае будет отсутствовать прямая пропорциональность между доходом фирмы и величиной переменной x_j . Т.е. в разных ситуациях *одна единица j -го товара будет приносить разный доход*.

Аддитивность означает, что **ЦФ и ограничения** должны представлять собой сумму вкладов от различных переменных.

Примером нарушения аддитивности служит ситуация, когда увеличение сбыта одного из конкурирующих видов продукции, производимых одной фирмой, влияет на объем реализации другого.

Допустимое решение – это совокупность чисел (план) $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$; удовлетворяющих ограничениям задачи (1.1).

Оптимальное решение – это план, при котором ЦФ принимает свое максимальное (минимальное) значение.

Решение практической задачи нельзя считать законченным, если найдено оптимальное решение. Дело в том, что некоторые параметры задачи ЛП (финансы, запасы сырья, производственные мощности) можно регулировать, что, в свою очередь, может изменить найденное оптимальное решение. Эта информация получается в результате выполнения **анализа чувствительности**.

Анализ чувствительности позволяет оценить влияние этих параметров на оптимальное решение. Если обнаруживается, что оптимальное решение можно значительно улучшить за счет небольших изменений заданных параметров, то целесообразно реализовать эти изменения. Кроме того, во многих случаях оценки параметров получаются путем статистической обработки ретроспективных данных (например, ожидаемый сбыт, прогнозы цен и затрат). Оценки, как правило, не могут быть точными. Если удастся определить, какие параметры в наибольшей степени влияют на значение целевой функции, то целесообразно увеличить точность оценок именно этих параметров, что позволяет повысить надежность рассматриваемой модели и получаемого решения.

Прежде чем построить математическую модель задачи, т.е. записать ее с помощью математических символов, необходимо четко разобраться с экономической ситуацией, описанной в условии. Для этого необходимо с точки зрения *экономики, а не математики, ответить на следующие вопросы:*

- 1) Что является *искомыми величинами задачи?*
- 2) Какова *цель решения? Какой параметр задачи служит критерием* эффективности (оптимальности) решения, например, прибыль, себестоимость, время и т.д. В каком *направлении должно изменяться значение этого параметра* (к max или к min) для достижения наилучших результатов?
- 3) Какие *условия в отношении искомых величин и ресурсов задачи* должны быть выполнены?

Такие условия устанавливают, как должны соотноситься друг с другом различные параметры задачи, например, количество ресурса, затраченного при производстве, и его запас на складе; количество выпускаемой продукции и емкость склада, где она будет храниться; количество выпускаемой продукции и рыночный спрос на эту продукцию и т.д. Только после экономического ответа на все эти вопросы можно приступать к записи этих ответов в *математическом виде, т.е. к записи* математической модели.

1) Искомые величины являются *переменными задачи, которые как* правило обозначаются малыми латинскими буквами с индексами, например, однотипные переменные удобно представлять в виде $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

2) Цель решения записывается в виде *целевой функции, обозначаемой*, например, $L(X)$. Математическая формула ЦФ $L(X)$ отражает способ расчета значений параметра – критерия эффективности задачи.

3) Условия, налагаемые на переменные и ресурсы задачи, записываются в виде системы равенств или неравенств, т.е. *ограничений. Левые и правые части* ограничений отражают способ получения (расчет или численные значения из условия задачи) значений тех параметров задачи, на которые были наложены соответствующие условия

В процессе записи математической модели необходимо указывать единицы измерения переменных задачи, целевой функции и всех ограничений.

Пример экономической задачи, сводящейся к общей линейной модели.

Предприятие производит изделия трех видов, поставляет их заказчикам и реализует на рынке.

Заказчикам требуется 1000 изделий первого вида. 2000 изделий второго вида и 2500 изделий третьего вида.

Условия спроса на рынке ограничивают число изделий первого вида 2000 единицами, второго – 3000 и третьего – 5000 единицами.

Для изготовления изделий используется 4 типа ресурсов. Количество ресурсов, потребляемых для производства одного изделия, общее количество ресурсов и прибыль от реализации каждого вида изделия заданы в табл. 1.

Таблица 1

Тип ресурсов	Вид изделий			Всего ресурсов
	1	2	3	
1	500	300	1000	25000000
2	1000	200	100	30000000
3	150	300	200	20000000
4	100	200	400	40000000
Прибыль	20	40	50	

Постановка задачи :

Как организовать производство, чтобы:

- 1) обеспечить заказчиков;
- 2) не допустить затоваривания;
- 3) получить максимальную прибыль

Построение математической модели

Выполним последовательно этапы построения математической модели по формулам 1.1

- 1) Цель – получение максимальной прибыли.
- 2) Параметрами являются все числовые данные, приведенные в условии задачи.
- 3) Управляющие переменные:
 x_1 – число изделий первого вида;
 x_2 – число изделий второго вида;
 x_3 – число изделий третьего вида;
- 4) Ограничения: обеспечить заказчиков, не превысить, запас ресурсов, не допустить затоваривания рынка.

В соответствии с этими ограничениями выпишем область допустимых решений задачи:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 \geq 1000, \\ x_2 \geq 2000, \\ x_3 \geq 2500, \\ x_1 \leq 2000, \\ x_2 \leq 3000, \\ x_3 \leq 5000, \\ 500x_1 + 300x_2 + 1000x_3 \leq 25000000, \\ 100x_1 + 200x_2 + 100x_3 \leq 30000000, \\ 150x_1 + 300x_2 + 200x_3 \leq 20000000, \\ 100x_1 + 200x_2 + 400x_3 \leq 40000000. \end{array} \right. \quad (1.2)$$

Первые три неравенства в системе (1.2) соответствуют спросу заказчиков. Неравенства с четвертого по шестое формализуют спрос на рынке. Последние четыре неравенства соответствуют ограничениям по ресурсам.

Предприятие производит изделия трех видов, поставляет их заказчикам и реализует на рынке.

Заказчикам требуется 1000 изделий первого вида. 2000 изделий второго вида и 2500 изделий третьего вида.

Условия спроса на рынке ограничивают число изделий первого вида 2000 единицами, второго – 3000 и третьего – 5000 единицами.

Для изготовления изделий используется 4 типа ресурсов.

5) Целевая функция или критерий эффективности задачи имеет вид

$$P = 20x_1 + 40x_2 + 50x_3 \rightarrow \max. \quad (1.3)$$

В формуле буквой P обозначена прибыль. Ее надо максимизировать. Каждое слагаемое определяет прибыль от производства изделий каждого вида соответственно в количествах x_1, x_2, x_3 .

(1.2)(1.3)— математическая модель поставленной задачи. Ограничения и целевая функция линейны по управляющим переменным, следовательно, данная модель является линейной. При составлении модели предполагалось, что прибыль линейно зависит от числа реализуемых изделий.