

ПОНЯТИЕ ЛОГАРИФМА

Определение логарифма

Логарифмом числа b по основанию a называется показатель степени, в которую нужно возвести a , чтобы получить b .

$$\log_a b = c, \quad a^c = b,$$

$$a > 0, \quad a \neq 1, \quad b > 0$$

Определение логарифма

$$b > 0$$

$$a > 0, a \neq 1$$

$$b = a^c$$

$$c = \log_a b$$

Примеры:

$$\log_2 16 = 4,$$

$$\log_4 2 = 1/2,$$

$$\log_{\frac{1}{3}} 27 = -3,$$

$$\log_{0,25} 4 =$$

.

При каких значениях x существует

логарифм

$$\log_{\frac{1}{4}}(x-3)$$

$$x > 3$$

$$\log_5(10-x)$$

$$x < 10$$

$$\log_5(-3x^5)$$

$$x < 0$$

$$\log_{0,2}(2+x^2)$$

$$x \in \mathbf{R}$$

$$\log_{1,3}(-x^4)$$

**Не существует ни при
каком x**



ы логарифмов

Обыкновенные

Натуральные

Десятичные

Примеры

$$\log_2 8 = 3, \text{ т.к. } 2^3 = 8$$

$$\log_5 25 = 2, \text{ т.к. } 5^2 = 25$$

$$\log_2 2 = 1, \text{ т.к. } 2^1 = 2$$

$$\log_2 \frac{1}{2} = -1, \text{ т.к. } 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$\log_3 \frac{1}{9} = -2, \text{ т.к. } 3^{-2} = \frac{1}{9}$$

Запишите в виде логарифмического равенства:

$$3^4 = 81 \Rightarrow \log_3 81 = 4 \quad (\text{по определению});$$
$$2^{-5} = \frac{1}{32} \Rightarrow \log_2 \frac{1}{32} = -5 \quad (\text{по определению});$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64} \Rightarrow \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{64} = 3$$

$$\sqrt[3]{125} = 5 \Rightarrow \log_{125} 5 = \frac{1}{3}$$

$$\sqrt[4]{16^3} = 8 \Rightarrow \log_{16} 8 = \frac{3}{4}$$

Найдите число x

$$\log_5 x = 2$$

$$x = 25$$

$$\log_3 x = -1$$

$$x = \frac{1}{3}$$

$$\log_{\frac{1}{6}} x = -2$$

$$x = 36$$

$$\log_{\sqrt{5}} x = 0$$

$$x = 1$$

Найдите число x

$$\log_x 81 = 4$$

$$x = 3$$

$$3^4 = 81$$

$$\log_{\frac{1}{6}} x = -2$$

$$x = 36$$

$$\log_x \frac{1}{16} = 2$$

$$x = \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$\log_x \frac{1}{4} = -2$$

$$2^{-2} = \frac{1}{4}$$

Вычислите

$$\log_2 0,25 = \log_2 \frac{1}{4} = -2$$

$$\log_{\frac{1}{3}} 3\sqrt{3} = \log_{\frac{1}{3}} \left(3 \cdot 3^{\frac{1}{2}} \right) =$$

$$= \log_{\frac{1}{3}} 3^{1+\frac{1}{2}} = \log_{\frac{1}{3}} 3^{\frac{3}{2}} = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3}^{-\frac{3}{2}} = -\frac{3}{2}$$

Вычислите

$$3 + \log_7 \frac{1}{7} = 3 + (-1) = 2$$

$$2 \log_5 0,04 = 2 \log_5 \frac{4}{100} =$$

$$= 2 \log_5 \frac{1}{25} = 2 \cdot (-2) = -4$$

Особые логарифмы

Десятичные
логарифмы

(по основанию 10)

$$\log_{10} a = \lg a$$

Натуральные
логарифмы

(по основанию e)

$$\log_e a = \ln a$$

Пример

$$\lg 100 = 2, \quad 10^2 = 100$$

$$\lg 10 = 1, \quad 10^1 = 10$$

$$\lg 1 = 0, \quad 10^0 = 1$$

$$\lg 0,1 = -1, \quad 10^{-1} = 0,1$$

$$\lg 0,00001 = -5, \quad 10^{-5} = 0,00001$$

Свойства десятичных логарифмов:

$$\lg 10^n = n$$

$$\lg b \cdot 10^n = \lg b + n$$

$$\lg(0.1)^n = -n$$

$$\lg \frac{b}{10^n} = \lg b - n$$

Пример

$$\ln e = 1, \quad e^1 = e$$

$$\ln e^2 = 2, \quad e^2 = e^2$$

$$\ln \frac{1}{e} = -1, \quad e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$\log_e e = 1$$

$$\ln \sqrt{e} = \frac{1}{2}$$

$$\ln \sqrt[3]{e} = \frac{1}{3}$$

Вычислите устно значения логарифмов:

$$\log_3 9$$

$$\log_{32} 2$$

$$\log_{125} 25$$

$$\lg 0,01$$

$$\log_2 \frac{1}{8}$$

$$\log_3 \frac{1}{3}$$

$$\log_{27} 9$$

$$\lg 0,001$$

$$\log_4 16$$

$$\log_9 3$$

$$\log_5 0,04$$

$$\log_{\sqrt{3}} 9$$

$$\log_5 \frac{1}{25}$$

$$\log_{32} 8$$

$$\log_3 \frac{1}{243}$$

$$0,3^{\log_{0,3} 0,09}$$

$$\log_7 1$$

$$\log_{81} 27$$

$$\lg 100$$

$$\sqrt{2}^{\log_{\sqrt{2}} 16}$$

Найдите число x .

$$\log_3 x = -1$$

$$\log_4 x = -3$$

$$\log_x 81 = 4$$

$$\log_{\frac{1}{6}} x = -3$$

$$\log_{\sqrt{5}} x = 0$$

$$\log_x \frac{1}{16} = 2$$

$$\log_5 x = 2$$

$$\log_{\frac{1}{7}} x = 1$$

$$\log_x \frac{1}{4} = -2$$

$$\log_7 x = -2$$

$$\log_{\frac{1}{2}} x = -3$$

$$\log_x 27 = 3$$

Свойства логарифмов

ОСНОВНОЕ
ЛОГАРИФМИЧЕСКОЕ
ТОЖДЕСТВО

$$a^{\log_a b} = b$$

$$a^{\log_a b} = b$$

$$a > 0$$

$$a \neq 1$$

$$b > 0$$

$$c > 0$$

$$d > 0$$

$$d \neq 1$$

СВОЙСТВА ЛОГАРИФМОВ:

$$1. \log_a 1 = 0$$

$$2. \log_a a = 1$$

$$3. \log_a bc = \log_a b + \log_a c$$

$$4. \log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

$$5. \log_a b^n = n \cdot \log_a b$$

$$6. \log_{a^k} b = \frac{1}{k} \cdot \log_a b$$

$$7. \log_{a^k} b^n = \frac{n}{k} \cdot \log_a b$$

$$8. \log_{a^n} b^n = \log_a b$$

$$10. \log_a b = \frac{\log_d b}{\log_d a} = \frac{1}{\log_b a}$$

$$11. \log_a b \cdot \log_b a = 1$$

$$12. a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$$



Свойства логарифмов

$$a^{\log_a b} = b, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad b > 0$$

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

Вычислите:

$$3^{\log_3 6}$$

Воспользуемся свойством логарифмов:

$$a^{\log_a b} = b \quad , \text{ т. е.}$$

$$3^{\log_3 6} = 6$$

Решение



Вычислите:

$$\log_{\frac{1}{3}} 1$$

Воспользуемся свойством логарифмов:

$$\log_a 1 = 0 \quad , \text{ т. е.}$$

$$\log_{\frac{1}{3}} 1 = 0$$

Решение



Вычислите:

$$\log_{\sqrt{2}} \sqrt{2}$$

Воспользуемся свойством логарифмов:

$$\log_a a = 1 \quad , \text{ т. е.}$$

$$\log_{\sqrt{2}} \sqrt{2} = 1$$

Решение



Вычислите:

$$2^{3+\log_2 5}$$

Воспользуемся свойством логарифмов:

$$a^{\log_a b} = b \quad , \text{ т. е.}$$

$$2^{3+\log_2 5} = 2^3 \cdot 2^{\log_2 5} = 8 \cdot 5 = 40$$

Решение



$$a^{\log_a x} = x$$

$$a) 2^{\log_2 13} = 13$$

$$b) \frac{70}{2^{\log_2 5}} = \frac{70}{5} = 14$$

$$c) \frac{7^{\log_7 13}}{52} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4} = 0,25$$



Вычислите:

$$a) 4^{\log_4 7}$$

$$б) 3^{2+\log_3 11}$$

$$в) 10^{3-\lg 40}$$

$$г) -5 \cdot 2^{\log_2 7}$$

$$д) \frac{5^{\log_5 6}}{48}$$

$$a) 7$$

$$б) 99$$

$$в) 25$$

$$г) -35$$

$$д) 0,125$$



$$a^{\log_a x} = x$$

$$a) 2^{3+\log_2 9} = 2^3 \cdot 2^{\log_2 9} = 8 \cdot 9 = 72$$

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n$$

$$b) 4^{3-\log_4 32} = 4^3 : 4^{\log_4 32} = 64 : 32 = 2$$

$$a^{m-n} = a^m : a^n$$



Свойства логарифмов



$$\log_a \frac{1}{y} = -\log_a y,$$

$$a > 0, y > 0, a \neq 1$$

т.е. логарифмы двух взаимнообратных чисел по одному и тому же основанию отличаются друг от друга только знаком.

$$\log_3 \frac{1}{7} = -\log_3 7$$

1. Логарифм произведения равен сумме логарифмов множителей

$$\log_x (ab) = \log_x a + \log_x b$$

а) $\log_{10} 5 + \log_{10} 2 = \log_{10} (5 * 2) = 1$

б) $\log_{12} 2 + \log_{12} 72 = \log_{12} (2 * 72) = 2$

Свойства логарифмов



$$\log_a x + \log_a y = \log_a (x \cdot y),$$
$$a > 0, x > 0, y > 0, a \neq 1$$

т. е. логарифм произведения равен сумме логарифмов сомножителей (взятых по тому же основанию).

$$\log_6 2 + \log_6 3 = \log_6 (2 \cdot 3) = \log_6 6 = 1$$

Вычислите:

$$\log_6 12 + \log_6 3$$

Воспользуемся свойством логарифмов:

$$\log_a bc = \log_a b + \log_a c \quad , \text{ т. е.}$$

$$\log_6 12 + \log_6 3 = \log_6 (12 \cdot 3) = \log_6 36 = 2$$

Решение





ислите:

1. $\log_{18} 2 + \log_{18} 9$

2. $\log_4 8 + \log_4 32$

3. $\log_{32} 2 + \log_{32} 2$

4. $\lg 40 + \lg 25$

1) 1

2) 4

3) 0,2

4) 3

**2. Логарифм частного равен
логарифмов делимого без
логарифма делителя**

$$\log_x \left(\frac{a}{b} \right) = \log_x a - \log_x b$$

в) $\log_5 75 - \log_5 3 = \log_5 (75/3) = 2$



Свойства логарифмов

- $$\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y},$$

$$a > 0, x > 0, y > 0, a \neq 1$$

$$\log_2 30 - \log_2 15 = \log_2 (30:15) = \log_2 2 = 1$$

Вычислите:

$$\log_2 15 - \log_2 30$$

Воспользуемся свойством логарифмов:

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c \quad , \text{ т. е.}$$

$$\log_2 15 - \log_2 30 = \log_2 \frac{15}{30} = \log_2 \frac{1}{2} = -1$$

Решение



Вычислите:

$$\log_{\frac{1}{2}} 28 - \log_{\frac{1}{2}} 7$$

Воспользуемся свойством логарифмов:

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c, \text{ т. е.}$$

$$\log_{\frac{1}{2}} 28 - \log_{\frac{1}{2}} 7 = \log_{\frac{1}{2}} \frac{28}{7} = \log_{\frac{1}{2}} 4 = -2$$

Решение



Вычислите:

$$\log_2 4 \cdot \log_3 27$$

Воспользуемся свойством логарифмов:

$$\log_a a^r = r \quad , \text{ т. е.}$$

$$\log_2 4 \cdot \log_3 27 = \log_2 2^2 \cdot \log_3 3^3 = 2 \cdot 3 = 6$$

Решение

ВЫХОД 

3. Логарифм степени равен произведению показателя степени на логарифм ее основания

$$\log_x a^m = m \log_x a$$

$$\text{г) } \log_3 3^{1/7} = (1/7) \log_3 3 = 1/7$$

4. Логарифм, у которого основание в степени

$$\log_{a^k} x = \frac{1}{k} \log_a x$$

***Формула перехода к новому
основанию:***

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Из этой формулы следует равенство:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Вычислите:

$$\frac{\log_7 25}{\log_7 5}$$

Воспользуемся свойством логарифмов:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad , \text{ т. е.}$$
$$\frac{\log_7 25}{\log_7 5} = \log_5 25 = 2$$

Решение



Свойства логарифмов

$$\log_x a \cdot \log_a x = 1,$$

$$x > 0, x \neq 1, a > 0, a \neq 1$$

$$\log_{11} 3 \cdot \log_3 11 = 1$$





$$\log_x a \cdot \log_a x = 1$$

$$\begin{aligned} a) \log_3 5 \cdot \log_5 9 &= \log_3 5 \cdot \log_5 3^2 = \\ &= 2 \log_3 5 \cdot \log_5 3 = 2 \cdot 1 = 2 \end{aligned}$$

$$\log_a x^n = n \cdot \log_a x$$

$$b) 8^{\log_2 5} = 2^{3 \log_2 5} = 2^{\log_2 5^3} = 5^3 = 125$$

$$c) 5^{-4 \log_5 2} = 5^{\log_5 2^{-4}} = 2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16} = 0,0625$$

Вычислите:

1. $\log_2 7 \cdot \log_7 8$

2. $\log_5 11 \cdot \log_{11} 625$

3. $81^{\log_3 2}$

4. $5^{-2 \log_5 10}$



- 1) 3
- 2) 4
- 3) 16
- 4) 0,01

Примеры

$$a) \frac{\ln 216}{\ln \sqrt[4]{6}} = \frac{\ln 6^3}{\ln 6^{\frac{1}{4}}} = \frac{3 \ln 6}{\frac{1}{4} \ln 6} = \frac{3}{\frac{1}{4}} = 3 \cdot \frac{4}{1} = 12$$

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

$$\log_a x^n = n \cdot \log_a x$$

$$b) \frac{\log_{0,3} 8}{\log_{0,09} 8} = \frac{\log_{0,3} 8}{\log_{0,3^2} 8} = \frac{\log_{0,3} 8}{\frac{1}{2} \log_{0,3} 8} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1 : \frac{1}{2} = 1 \cdot \frac{2}{1} = 2$$



$$\log_{a^k} x = \frac{1}{k} \log_a x$$

Вычислите:

$$1. \frac{\lg 100}{\lg \sqrt[6]{10}}$$

$$2. \frac{\log_{0,2} 125}{\log_{0,2} 5}$$

$$3. \frac{\log_5 81}{\log_5 9}$$

$$4. \frac{\log_{\frac{1}{2}} 7}{\log_{\frac{1}{2}} 49}$$



- 1) 12
- 2) 3
- 3) 2
- 4) 0,5

Преобразование логарифмических выражений

$$1. (\log_5 125)(\log_4 16) = (\log_5 5^3)(\log_4 4^2) = 3 \cdot 2 = 6$$

$$2. 9 \cdot 4^{\log_4 2} = 9 \cdot 2 = 18$$

$$3. 16^{\log_4 3} = 4^{2 \cdot \log_4 3} = 4^{\log_4 3^2} = 9$$

$$4. \log_{0,04} 125 = \log_{\frac{4}{100}} 5^3 = \log_{\frac{1}{25}} 5^3 = \log_{5^{-2}} 5^3 = -\frac{3}{2} \log_5 5 = -1,5$$

Преобразование логарифмических выражений

$$\begin{aligned} 5. \log_6 54 - \log_6 1,5 &= \log_6 \left(54 : \frac{3}{2} \right) = \\ &= \log_6 \left(54 \cdot \frac{2}{3} \right) = \log_6 36 = 2 \end{aligned}$$

$$6. \frac{\log_3 121}{\log_3 11} = \frac{\log_3 11^2}{\log_3 11} = \frac{2 \cdot \log_3 11}{\log_3 11} = 2$$

$$\begin{aligned} 7. \log_3 11 \cdot \log_{11} 27 &= \log_3 11 \cdot \log_{11} 3^3 = \\ &= \log_3 11 \cdot 3 \cdot \log_{11} 3 = 3 \end{aligned}$$



$$10. \log_{\sqrt[3]{10}} 10 = \log_{10^{\frac{1}{3}}} 10 = 3 \log_{10} 10 = 3$$

$$11. \frac{\log_9 324}{2 + \log_9 4} = \frac{\log_9(9^2 \cdot 2^2)}{2 + \log_9 4}$$
$$= \frac{\log_9 9^2 + \log_9 2^2}{2 + \log_9 4} = \frac{2 + \log_9 4}{2 + \log_9 4} = 1$$





$$\begin{aligned} 12. \frac{\log_6 2}{\log_6 3} + \log_3 0,5 &= \log_3 2 \\ &+ \log_3 0,5 = \log_3 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 13. \log_{0,4} 6 \cdot \log_6 2,5 &= \log_{\frac{4}{10}} 6 \cdot \log_6 \frac{5}{2} = \\ &= \log_{\frac{2}{5}} 6 \cdot \log_6 \frac{5}{2} = \log_{\frac{2}{5}} 5 \cdot \log_6 \left(\frac{2}{5}\right)^{-1} = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 14. \log^2_{\sqrt{8}} 64 &= (\log_{\sqrt{8}} 64)^2 = (\log_{8^{\frac{1}{2}}} 8^2)^2 = \left(\frac{2}{\frac{1}{2}} \cdot \right. \\ &\left. \log_8 8\right)^2 = 4^2 = 16 \end{aligned}$$



Справочная информация.

Логарифм

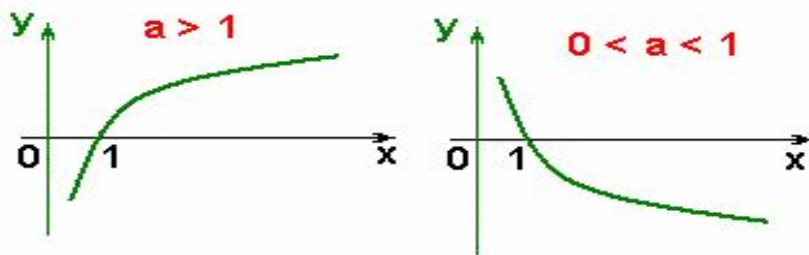
$$\log_a x = b, \text{ если } a^b = x$$

$$\log_a a^b = b$$

$$a^{\log_a x} = x$$

Логарифмическая функция

$$y = \log_a x \quad a > 0, a \neq 1$$



$$\lg x = \log_{10} x$$

$$\ln x = \log_e x$$

$$e = 2,71828\dots$$

$$e^{\ln x} = x$$

$$e^{x \ln a} = a^x$$

$$\ln e^x = x$$

Свойства

- 1) $\log_a x y = \log_a x + \log_a y$
- 2) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
- 3) $\log_a x^p = p \cdot \log_a x$
- 4) $\log_a 1 = 0$
- 5) $\log_a a = 1$
- 6) $\log_{a^n} x = \frac{1}{n} \log_a x$
- 7) $\log_{a^n} a^m = \frac{m}{n}$
- 8) $\log_{\left(\frac{1}{a}\right)^n} a^m = -\frac{m}{n}$
- 9) $\log_{a^n} \left(\frac{1}{a}\right)^m = -\frac{m}{n}$
- 10) $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$

