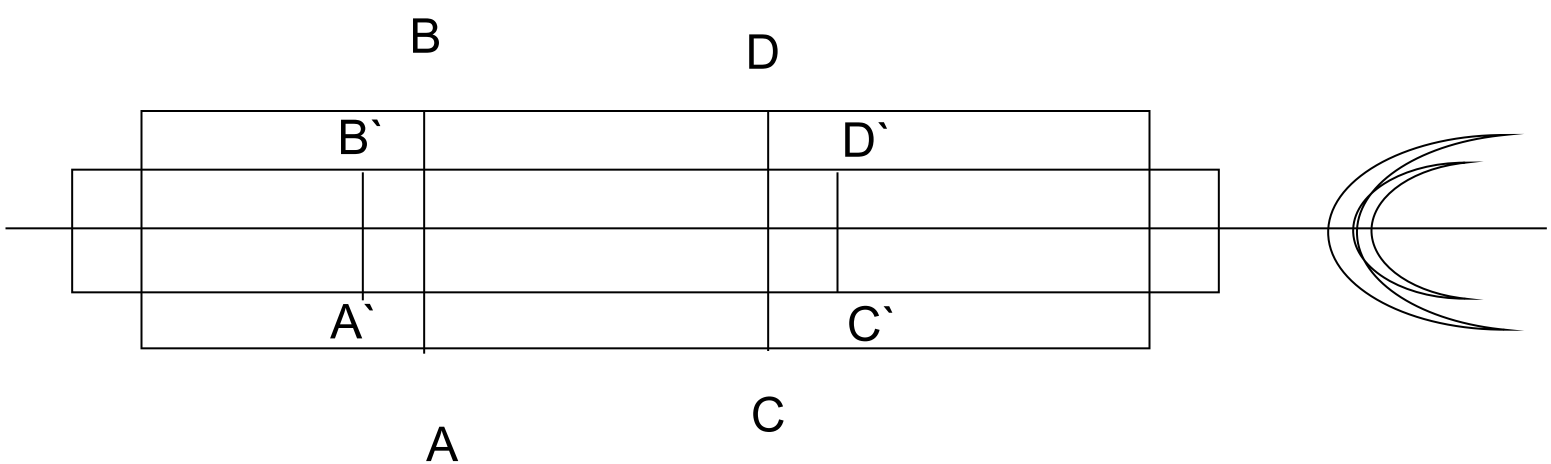
Растяжение и сжатие

1. Основные гипотезы, анализ напряженного состояния

Деформация стержня, нагруженного продольными силами, равнодействующие которых в каждом поперечном сечении совпадают с осью, проходящей через центры тяжести поперечных сечений называется **растяжением или сжатием**.

Опыт показывает, что при растяжении продольные размеры тела увеличиваются, а поперечные уменьшаются. При сжатии наблюдается противоположная картина. Из опыта же известно соотношение между поперечными сечениями стержня.



Гипотеза Бернулли:

При растяжении и сжатии призматического стержня нормальное усилие в поперечных сечениях которого постоянно, сечения плоские и нормальные к оси до деформации остаются плоскими и нормальными к оси после деформации

Из гипотезы Бернулли следует, что угловые деформации при растяжении и сжатии равны нулю.

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0 \quad \Rightarrow \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$$

Гипотеза о ненадавливаемости волокон:
Нормальные напряжения по граням элемента, лежащим в продольных сечениях стержня (нормальные к осям y и z) равны нулю.

$$\sigma_y = \sigma_z = 0$$

Таким образом, при растяжении и сжатии отличным от нуля будет только один компонент тензора напряжений - σ_x

Так как на основании гипотезы Бернулли следует что все продольные деформации ε_x одинаковы, на основании гипотезы о несдавливаемости волокон

$$\sigma_y = \sigma_z = 0$$

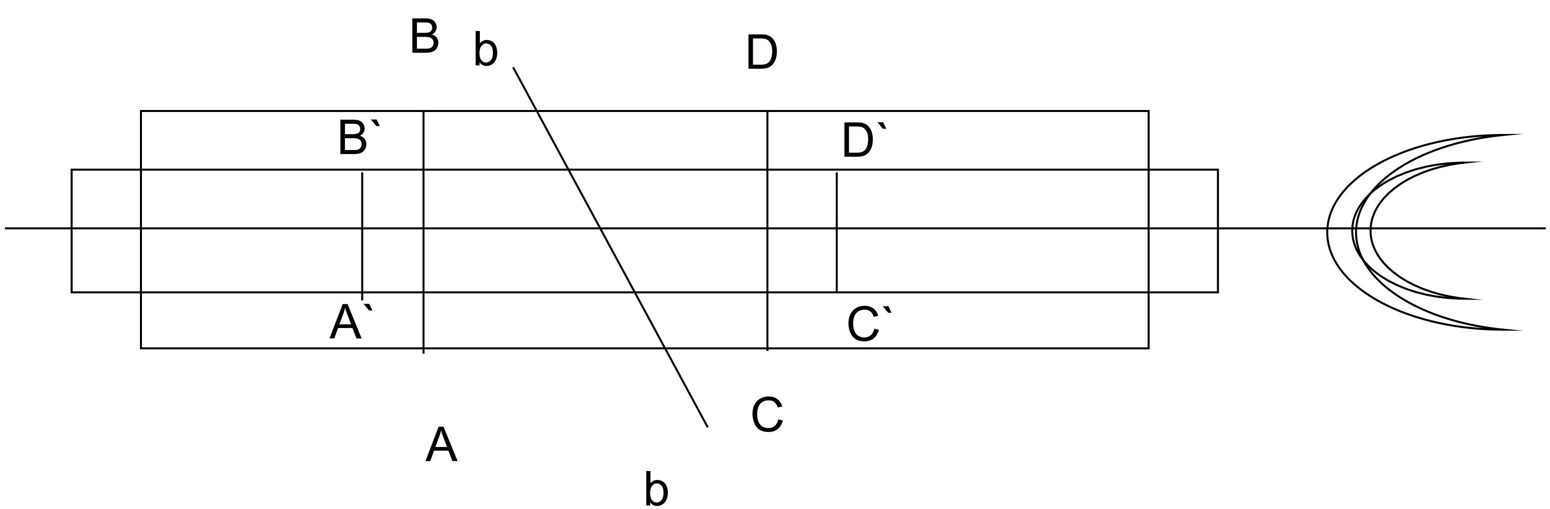
то из $\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \mu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right)$ следует , что во всех точках поперечного сечения стержня $\sigma_x = \sigma = const$

Из определения нормального усилия:

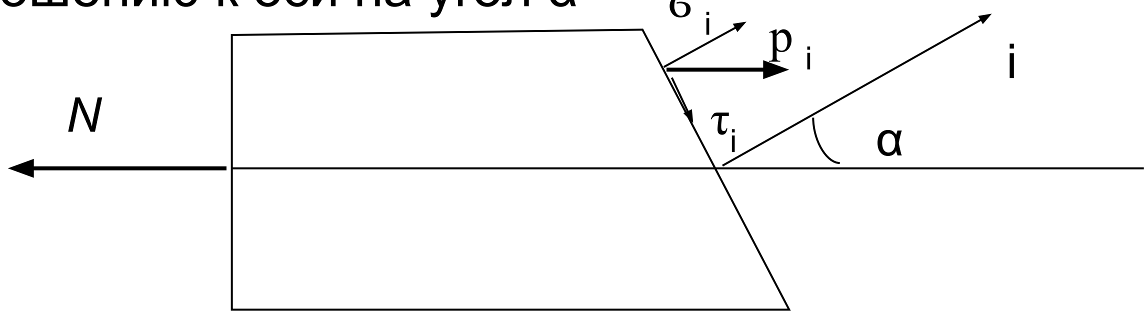
$$N=\iint_A \sigma_x dA=\iint_A \sigma dA=\sigma\iint_A dA=\sigma A\Rightarrow$$

$$\boxed{\sigma=\frac{N}{A}}$$

Анализ напряжений в произвольном сечении стержня



Рассмотрим левую часть стержня. i – нормаль к сечению, наклонена по отношению к оси на угол α



Площадь наклонного сечения связана с площадью нормального сечения соотношением: $A_i = \dfrac{A}{\cos\alpha}$

Согласно принятым гипотезам напряжения p_i равномерно распределены по сечению

Из условия равновесия: $\sum X = -N + p_i \dfrac{A}{\cos\alpha} = 0$ откуда $p_i = \dfrac{N}{A}\cos\alpha$

Так как $\sigma = \dfrac{N}{A}$ то, следовательно, $p_i = \sigma\cos\alpha$

Разложим p_i на нормальную и касательную составляющие

$$\tau_i = \frac{\sigma}{2}\sin 2\alpha \qquad \sigma_i = \sigma\cos^2\alpha$$

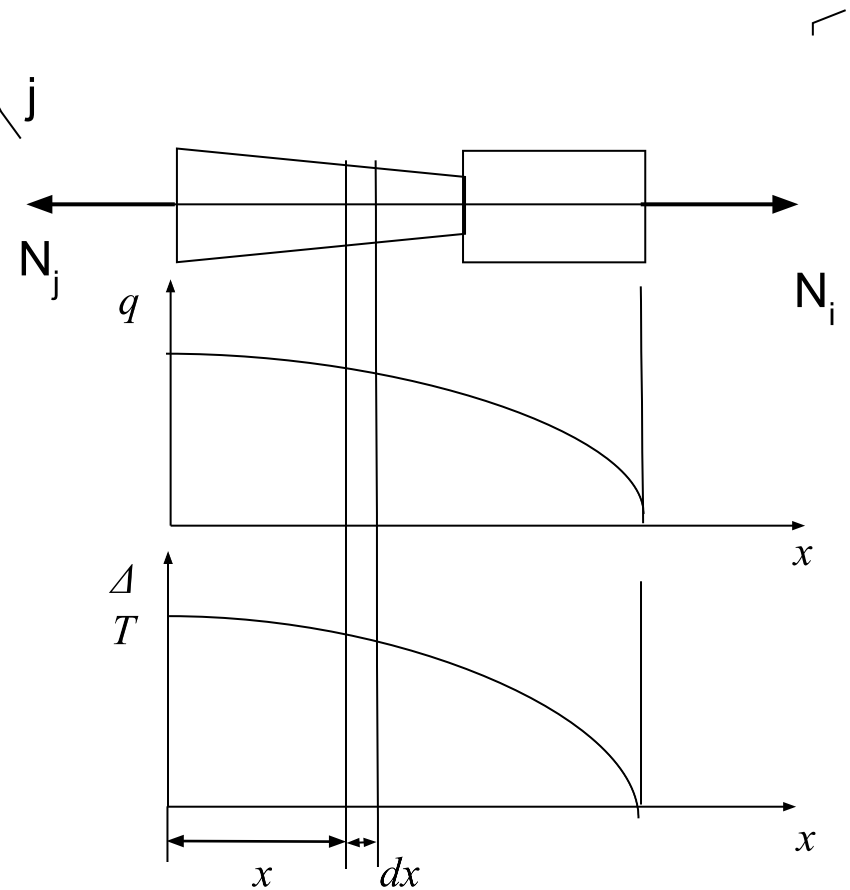
Из полученных формул следует:

1. Нормальные напряжения достигают наибольшего значения при $\alpha=0$, т. е. в поперечных сечениях.

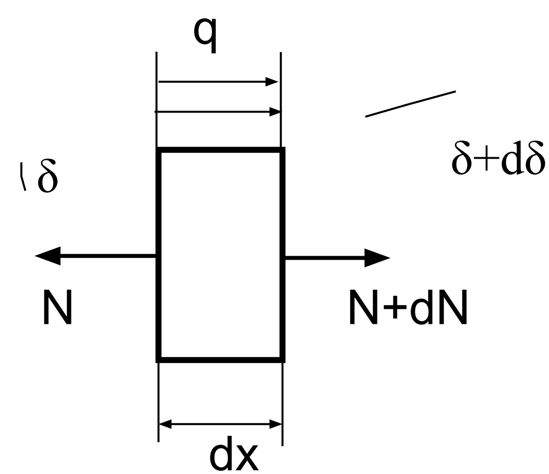
2. Касательные напряжения достигают наибольшего значения при $\alpha=45^0$.

2. Определение деформаций и перемещений

Рассмотрим участок стержня между сечениями j и i. Пусть на участке действует распределенная нагрузка q(x) и тепловая нагрузка ΔT



Выделим на этом участке бесконечно малый элемент dx такой, что б интенсивность погонной нагрузки в пределах элемента могла считаться постоянной.



Условия равновесия

$$\sum x = N + dN - N + qdx = 0$$

откуда

$$\frac{dN}{dx} = -q \qquad N = -\int_0^x qdx + N_j$$

Абсолютное удлинение элемента равно $\Delta dx = d\delta$ следовательно

$$\frac{d\delta}{dx} = \varepsilon \Rightarrow \delta = \int_0^x \varepsilon dx + \delta_j$$

Продольная деформация складывается из силовой и температурной составляющих

$$\varepsilon = \alpha\Delta T + \frac{\sigma}{E} = \alpha\Delta T + \frac{N}{EA} \Rightarrow \delta = \int_0^x \left(\alpha\Delta T + \frac{N}{EA}\right)dx + \delta_j$$

α – коэффициент линейного расширения материала;

E – модуль упругости (модуль Юнга);

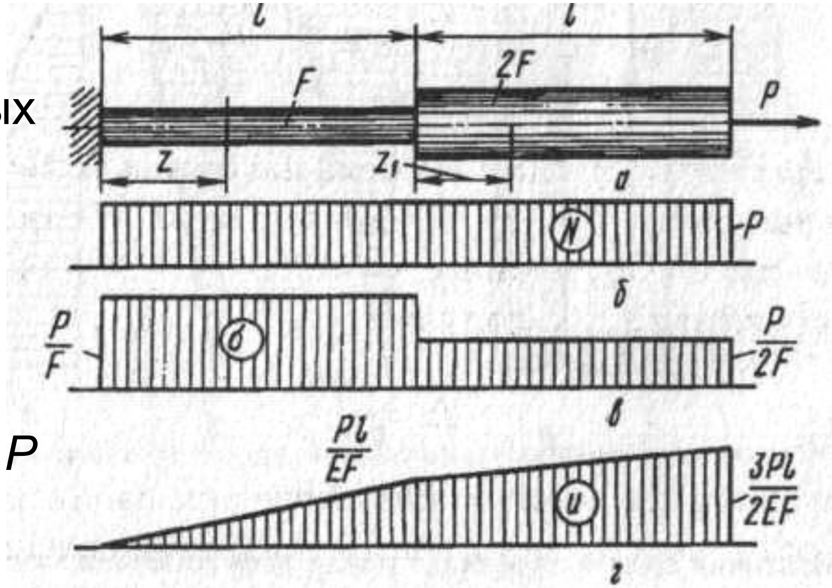
A – площадь поперечного сечения.

Произведение ***EA*** называют ***жесткостью*** стержня при растяжении и сжатии.

В том случае, когда стержень нагружен только по концам, нормальная сила $N = P$ не зависит от *x.* Если, кроме того, стержень имеет постоянные размеры поперечного сечения *F,* то из выражения получаем:

$$\delta = \frac{Pl}{EA}$$

Рассмотрим пример:

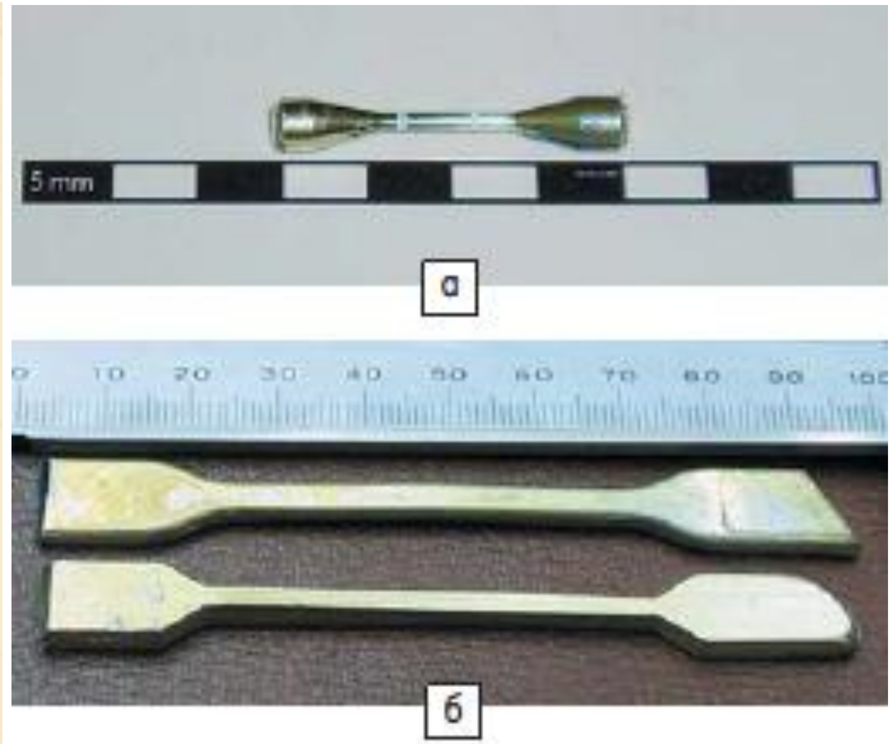


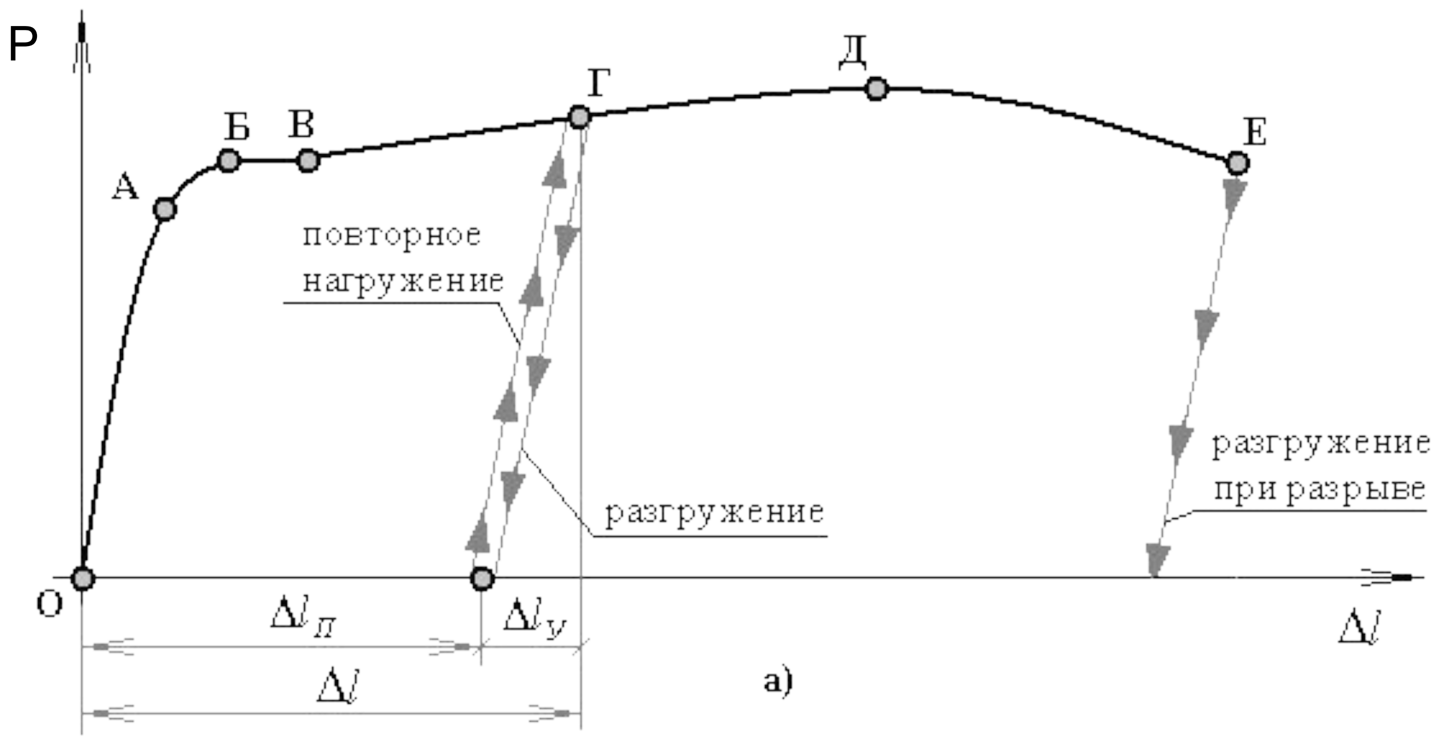
Требуется выявить закон изменения нормальных сил, напряжений и перемещений по длине ступенчатого стержня, нагруженного на конце силой *P*, определить числовые значения наибольшего напряжения и наибольшего перемещения, если $P = 50$ кН, $F = 2$ см^2, $l = 1$ м. Материал - сталь, $E = 200$ ГПа. Поскольку сила *P* велика, собственный вес стержня можно не учитывать.

Нормальная сила *N* в каждом сечении стержня равна внешней силе *P.* Для того чтобы получить эпюру напряжений σ, надо ординаты эпюры *N* изменить обратно пропорционально величине *F*. Большее значение σ равно $\sigma_{max} = P/F_{min} = 50$кН/2см^2 = 250 МПа.

Перемещение *z*-го сечения равно удлинению отрезка длиной *z.* Следовательно, согласно формуле, $u = Pz/(EF)$. Таким образом, на участке изменения *z* от нуля до l перемещение *u* пропорционально *z*. На втором участке стержня перемещение $u = Pl/(EF) + Pz_1/(2EF)$. Зависимость *u* от *z* также будет линейной. Наибольшее перемещение имеет торцевое сечение стержня: $u_{max} = 3Pl/(2EF) = 1{,}87$ мм.

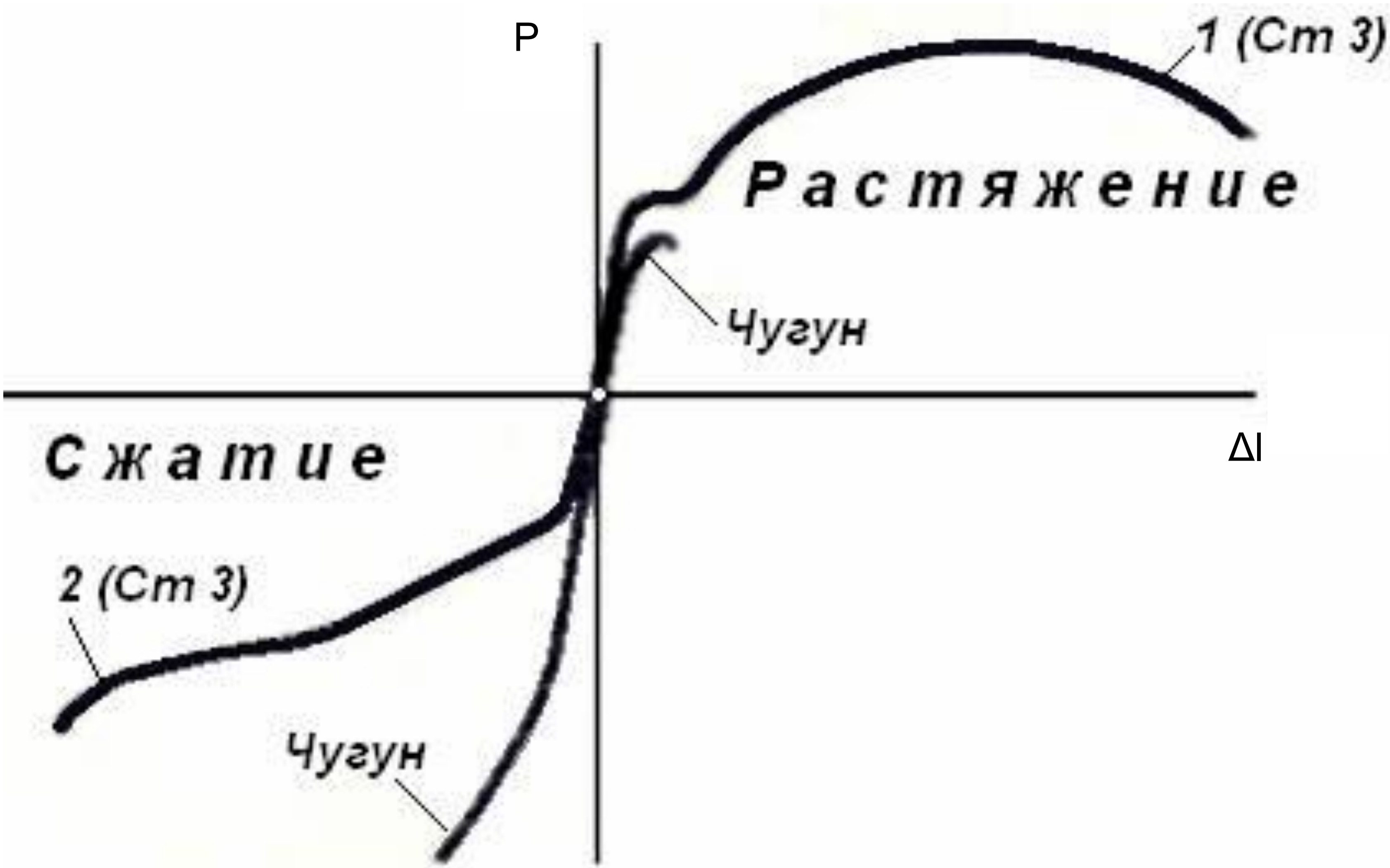
3. Результаты механических испытаний на растяжение и сжатие



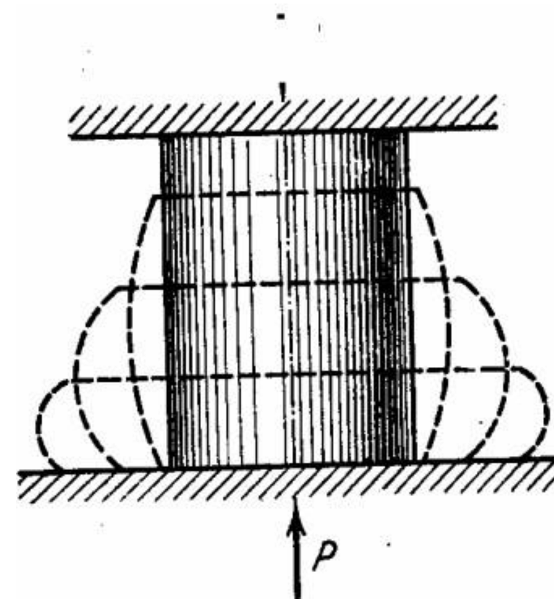


P
А
Б
В
Г
Д
Е
повторное
нагружение
разгружение
разгружение
при разрыве
О
$\Delta l_П$
$\Delta l_У$
Δl
Δl

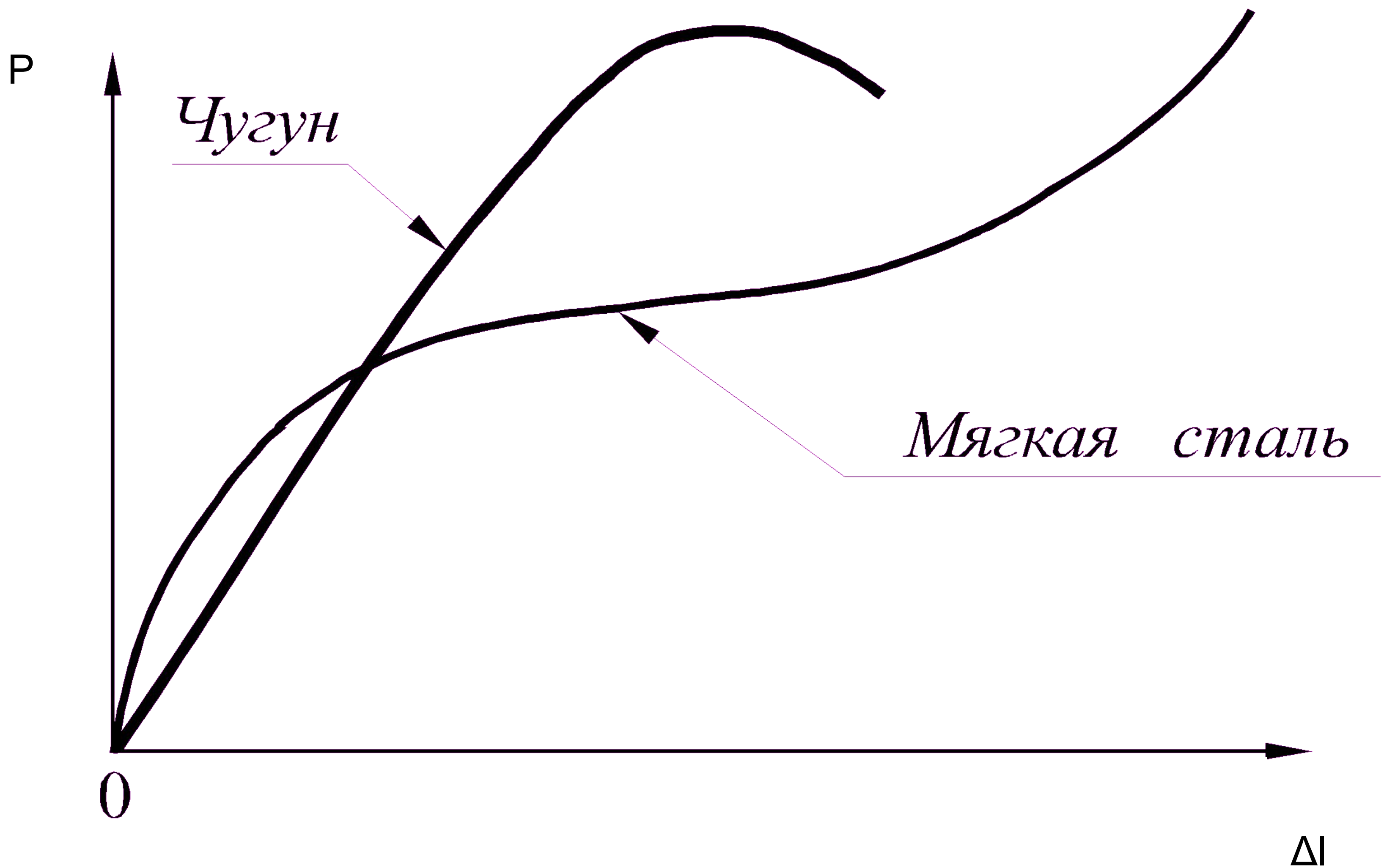
а)


P
1 (Ст 3)
Растяжение
Чугун
Сжатие
Δl
2 (Ст 3)
Чугун

1
2
3
4
5



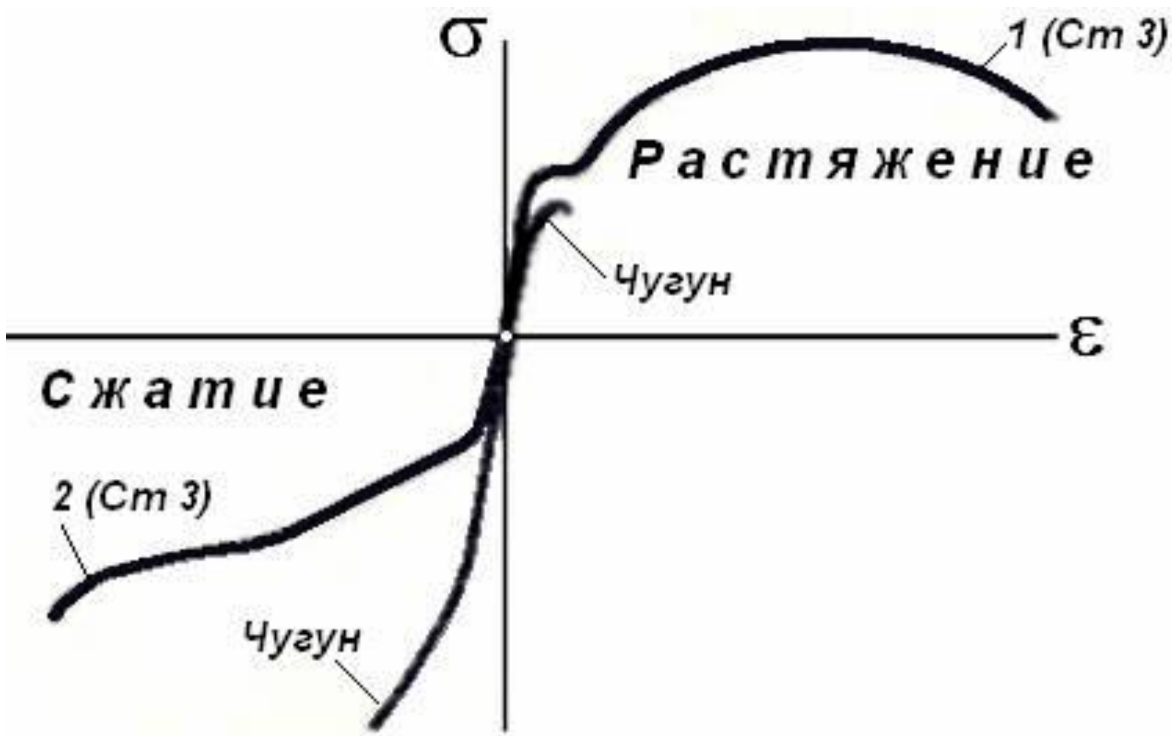
P

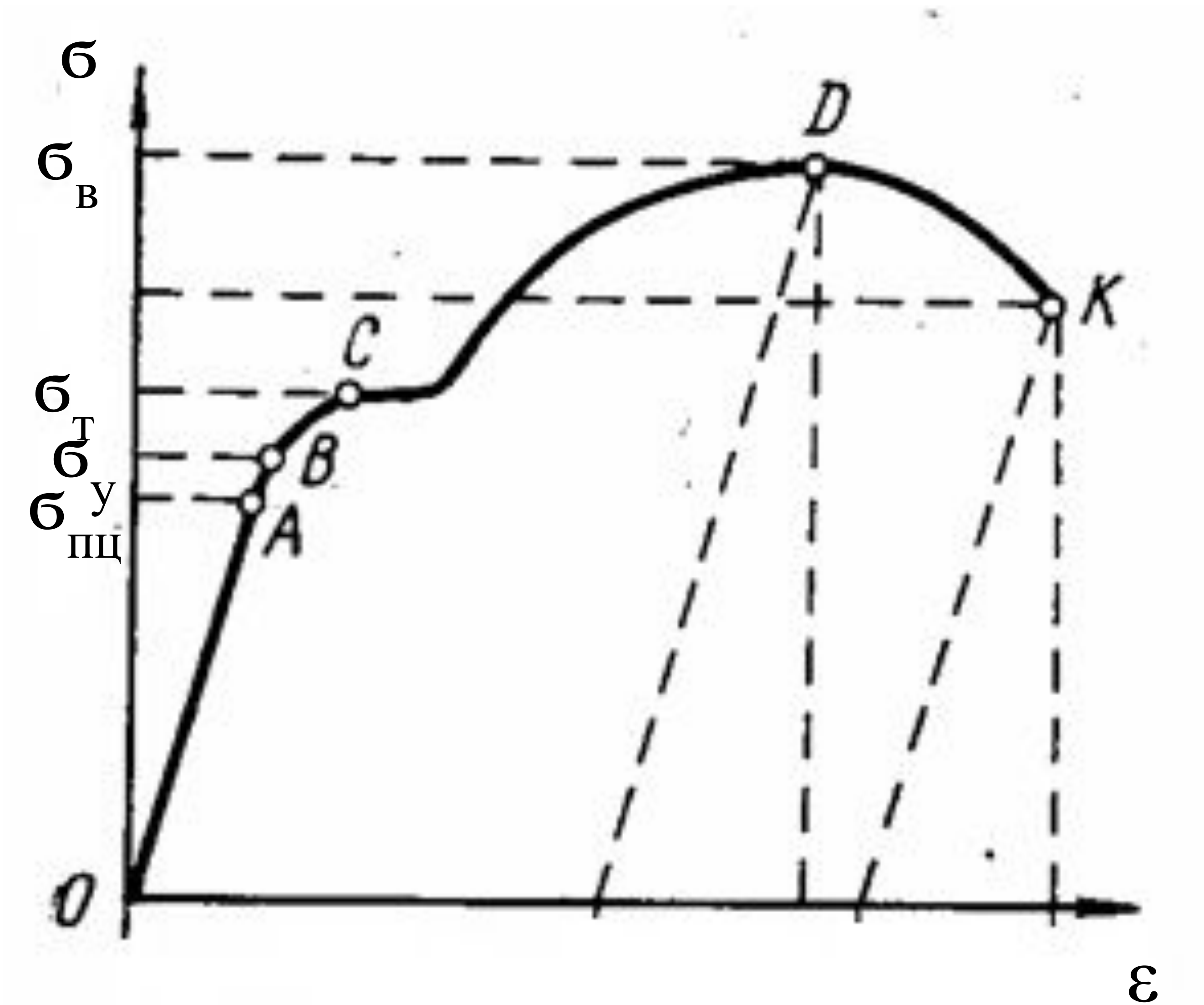


P
Чугун
Мягкая сталь
0
Δl

Диаграмма напряжений

$$\sigma = \frac{P}{F_0}, \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$




σ
σв
σт
σу
σпц
D
K
C
B
A
0
ε

4. Потенциальная энергия деформации и работа затраченная на разрыв образца

При нагружении упругого тела внешние силы совершают работу *А,* которая целиком затрачивается на сообщение кинетической энергии движения тела *К* и накопление потенциальной энергии деформации *U,* которая является полностью обратимой. Это свойство потенциальной энергии широко используется, например, в заводной пружине часов и т. д.

Таким образом

$$A = K + U$$

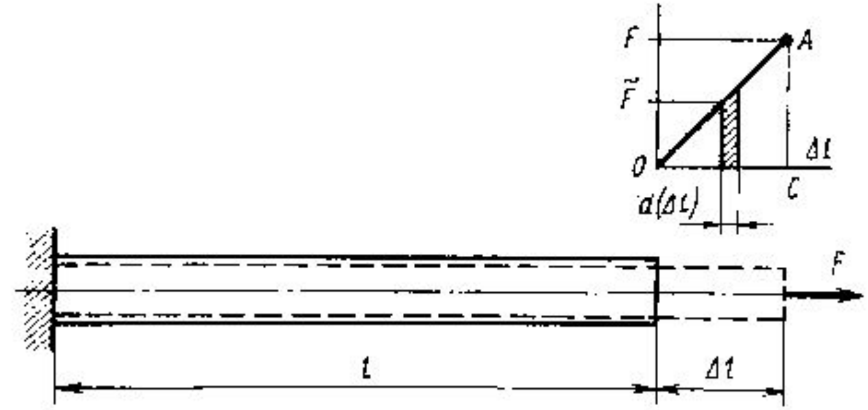
Если сила прикладывается достаточно медленно, т. е. ее скорость приложения стремится к нулю, то можно считать, что К стремится к 0 и работа внешних сил полностью преобразуется в потенциальную энергию деформации:

$$A = U$$

Такой процесс нагружения называется ***статическим***.

Рассмотрим стержень, который растягивается в пределах упругих деформаций на величину Δ*l*.

Графически зависимость между силой *F* и деформацией представлена на рисунке прямой линией.



В процессе нагружения сила возрастает от нуля до конечного значения *F*, поэтому этот процесс можно представить как последовательность бесконечно малых приращений удлинения d(Δ*l*), вызываемых силой F. Следовательно, работа текущей силы F на элементарном перемещении d(Δ*l*) равна *dA=Fd*(Δ*l*), а работа на перемещении Δ*l*:

$$A = U = \int_0^{\Delta l} F d\left(\Delta l\right)$$

или численно равна площади треугольника *OAC,* показанного на рис

$$A = U = \frac{1}{2} F \Delta l$$

Исключая из полученного выражения *Δl*, получим

$$U = \frac{1}{2} F \Delta l = \frac{1}{2} F \frac{Fl}{EA} = \frac{F^2 l}{2EA}$$

Формулой можно пользоваться только в том случае, когда продольная сила и площадь поперечного сечения постоянны

Если продольная сила или площадь поперечного сечения изменяются по длине стержня, то потенциальная энергия определяется суммированием значений потенциальной энергии, накапливаемой на элементарном участке

$$dU = \frac{N^2 dz}{2EA}$$

$$U = \int_0^l \frac{N^2 dz}{2EA}$$

Потенциальная энергия всегда положительна и при ее вычислении нельзя пользоваться принципом независимости действия сил, так как между *U и N* нет линейной зависимости.

Для оценки энергоемкости материала определяют у*дельную потенциальную энергию,* накапливаемую в единице объема: *u=U/V,* где *V* — объем стержня. Если объем стержня*V=Al,* то

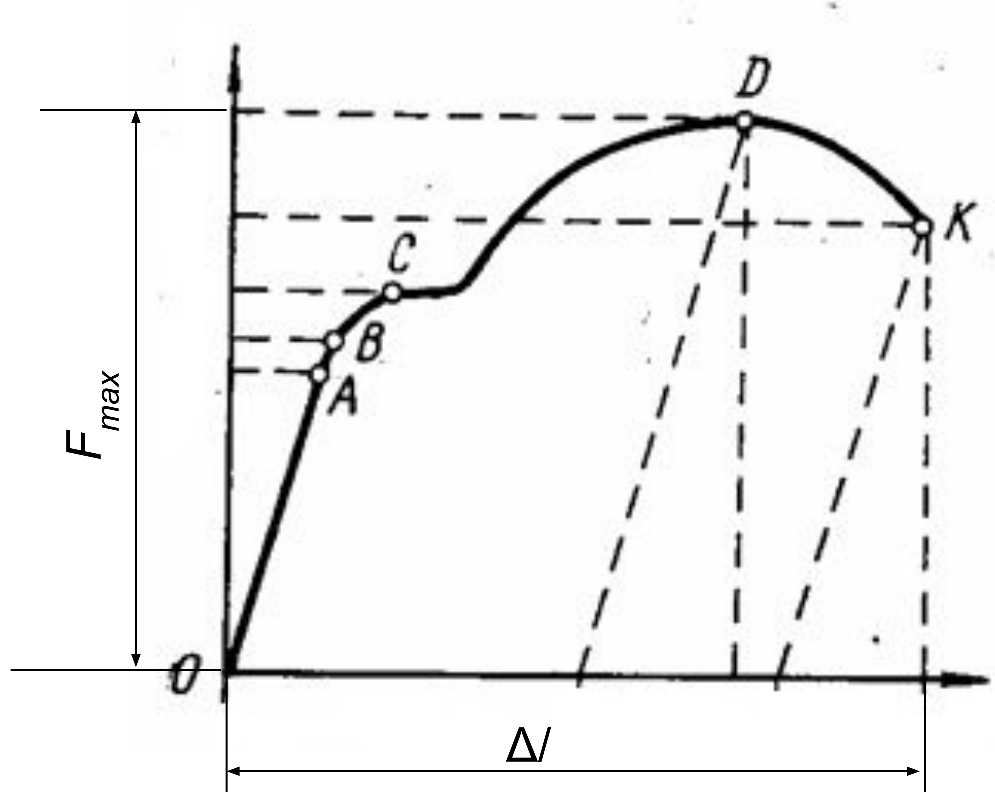
$$u = \frac{N^2 l}{2EA}\frac{1}{Al} = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{E} = \frac{1}{2}\frac{\sigma}{E}E\varepsilon = \frac{\sigma\varepsilon}{2}$$

Работа, затраченная на разрыв образца

По работе, затраченной на разрыв образца, можно оценить способность материала сопротивляться действию ударных и циклических нагрузок. Чем больше работа, затраченная на разрыв образца, тем лучше будет сопротивляться материал действию динамической нагрузки. Из приведенных
ранее рассуждений можно утверждать, что работа, затраченная на разрыв образца, равна полной площади диаграммы растяжения:

$$A = \eta F_{\max} \Delta l$$

где η — коэффициент заполнения диаграммы;
для стали марки Ст3 η = 0,85...0,87



5. Расчет на прочность

Расчеты на прочность

Расчет по допускаемым напряжениям, при котором за опасное состояние системы принимается то, при котором расчетное напряжение хотя бы в одной из ее точек достигает предельного значения $\sigma_{ПР}$

Расчет по несущей способности, при котором за опасное состояние системы принимается состояние системы при котором ее равновесие становится невозможным при дальнейшем увеличении внешних сил

Проектировочным называется расчет, в котором по заданным схеме нагружения, силам, моментам и части геометрических размеров требуется определить ее остальные геометрические размеры

Условие прочности проектировочного расчета

$$\sigma_{\max} = \left[\frac{N}{A}\right]_{\max} \leq \frac{\sigma_{np}^{p}}{[n]} = [\sigma]_{p}$$

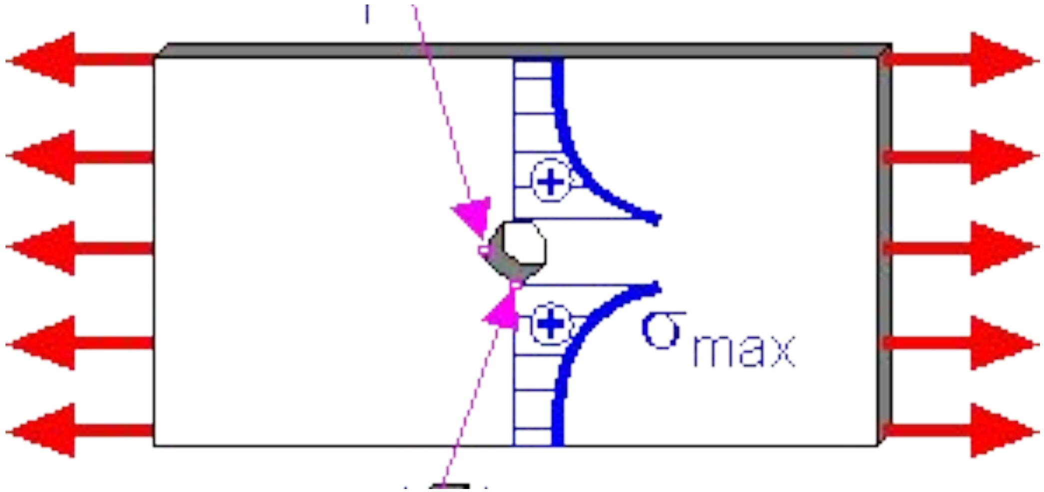
$$|\sigma_{\min}| = \left|\left[\frac{N}{A}\right]_{\min}\right| \leq \frac{\sigma_{np}^{c}}{[n]} = [\sigma]_{c}$$

Проверочным называется расчет, в котором по данным – расчетной схеме, материалу, силам и всем геометрическим размерам системы требуется оценить ее прочность.

$$n_{p} = \frac{\sigma_{np}^{p}}{\sigma_{\max}}$$

$$n_{c} = \frac{\sigma_{np}^{c}}{|\sigma_{\min}|}$$

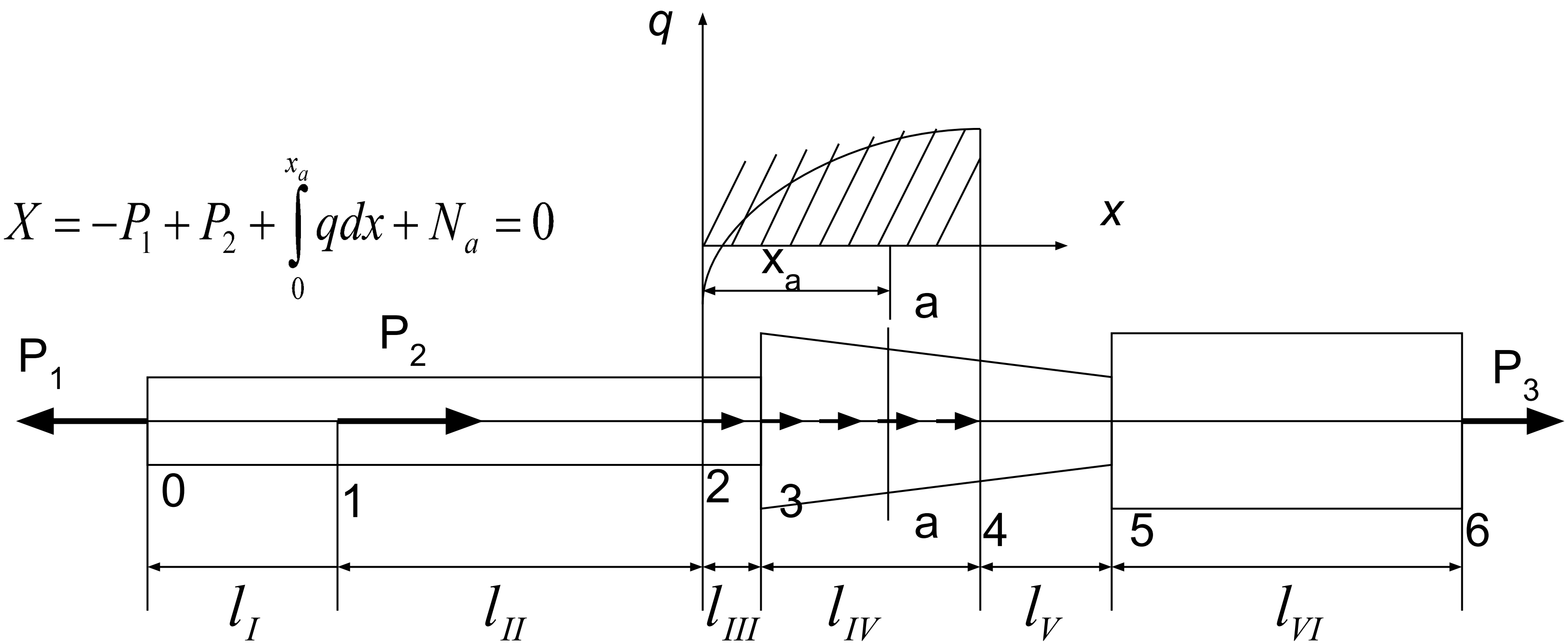
Концентрацией напряжений называется явление увеличения напряжений по сравнению с номинальными в местах изменения формы сечения или формы детали



6. Расчеты на растяжение и сжатие

При рассмотрении задач растяжения или сжатия стержней, их, обычно, разбивают на участки, границами которых служат места приложения сил, начала и концы грузовых площадок, места изменения сечения стержня.

$$\sum X = -P_1 + P_2 + \int_0^{x_a} q\,dx + N_a = 0$$



$$\int_0^{x_a} q\,dx = \Omega_{x_a}$$ Часть грузовой площадки по левую сторону от сечения а-а

$$N_a = P_1 - P_2 - \Omega_{xa}$$

Нормальное усилие в поперечном сечении стержня при растяжении или сжатии равняется алгебраической сумме сосредоточенных сил и грузовых площадей по одну сторону от сечения

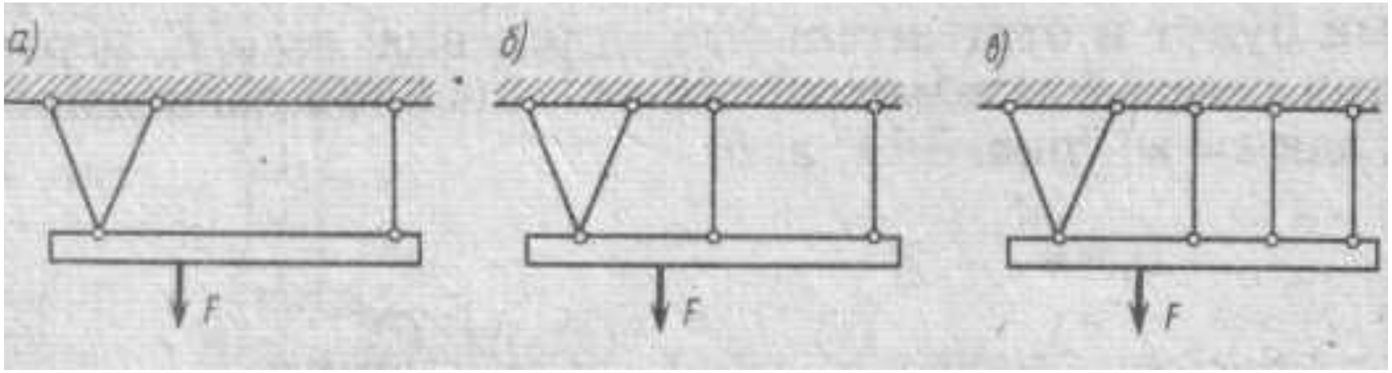
$$N = \sum_{лев} P_i + \sum_{лев} \Omega_i = \sum_{прав} P_i + \sum_{прав} \Omega_i$$

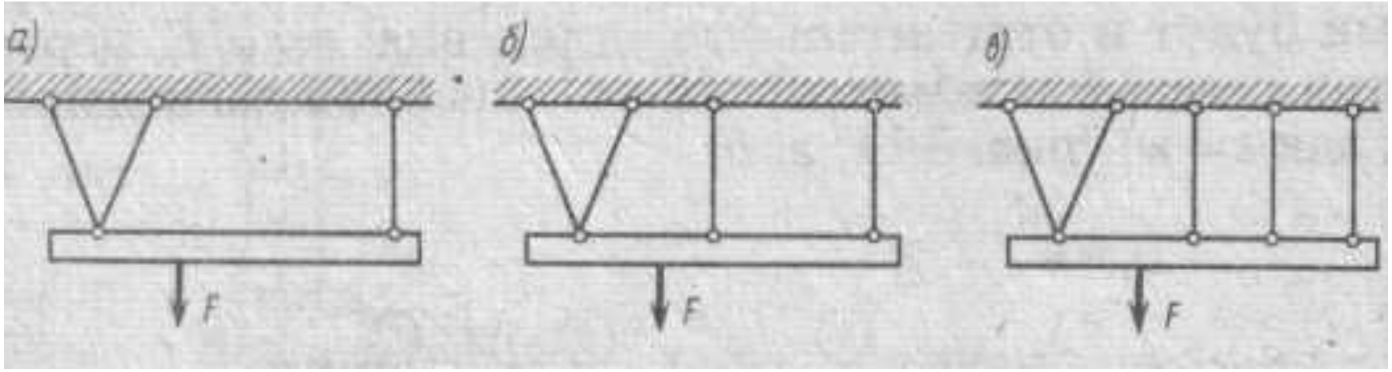
+ силы действующие от сечения

- силы, действующие на сечение

Статически определимые и статически неопределимые системы

В инженерной практике часто встречаются системы, в которых число наложенных связей больше числа уравнений равновесия. В этих системах невозможно определить как усилия в связях, так и внутренние усилия, используя только уравнения равновесия. Такие системы называются статически неопределимыми. Они должны быть геометрически неизменяемыми. Разность между числом неизвестных и числом независимых уравнений равновесия, которые можно составить для данной системы, называют *степенью статической неопределимости.*

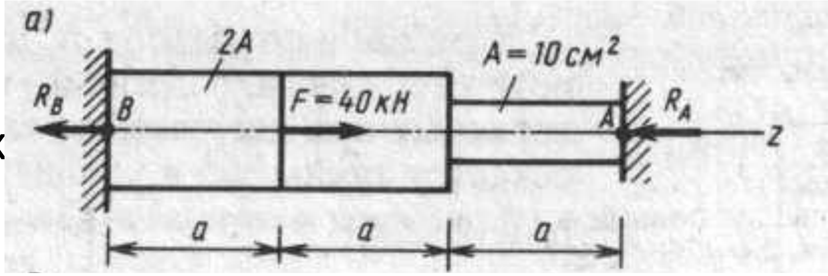




Рассмотрим несколько систем, изображенных на рис. *а—в.* На рис. *а* показана система, состоящая из абсолютно жесткой балки, которая прикреплена при помощи трех стержней. Усилия в этих стержнях можно определить, составив три уравнения равновесия. Такая система статически определима. Усложним систему, добавив еще один вертикальный стержень. Число уравнений равновесия осталось прежним — три, а число неизвестных стало четыре. Такая система будет 1 один раз статически неопределима. Усложняя систему дальше, т. е. вводя еще один стержень, получим два раза статически неопределимую систему. Неизвестные усилия в статически неопределимых системах могут быть определены, если условия равновесия дополнить условиями, характеризующими деформацию данной системы. Число этих дополнительных условий (уравнений) равно степени статической неопределимости системы. Их условно называют *уравнениями перемещений (уравнения совместности деформаций).* Так, для системы, изображенной на рис., уравнение перемещений составляется из условия, что поселе удлинения стержней их нижние концы должны располагаться на прямой, так как они связаны с жесткой балкой.

Рассмотрим пример:

Стержень переменного сечения жестко заделан с двух концов и нагружен силой F= 40 кН. Построить эпюры N и σ.



Решение: От действия силы F в заделках возникают опорные реакции R_A и R_B. Примем их направления противоположными направлению силы F. Составим единственное уравнение равновесия:

$$\sum Z = 0 \qquad -R_B + F - R_A = 0$$

Число неизвестных превышает число возможных уравнений равновесия на единицу.

Следовательно, система один раз статически неопределима.
Для ее решения необходимо составить одно дополнительное уравнение совместности деформаций. Оно в данной задаче выражает следующую мысль: длина стержня не может измениться, так как он жестко заделан с двух сторон, т.е. δ=0. Отбросим одну из заделок, например правую, и заменим ее действие на стержень реакцией R_A. В этой системе (теперь статически определимой) в соответствии с уравнением должно выполняться условие δ(3a)=0 . Запишем его, используя принцип независимости действия сил:

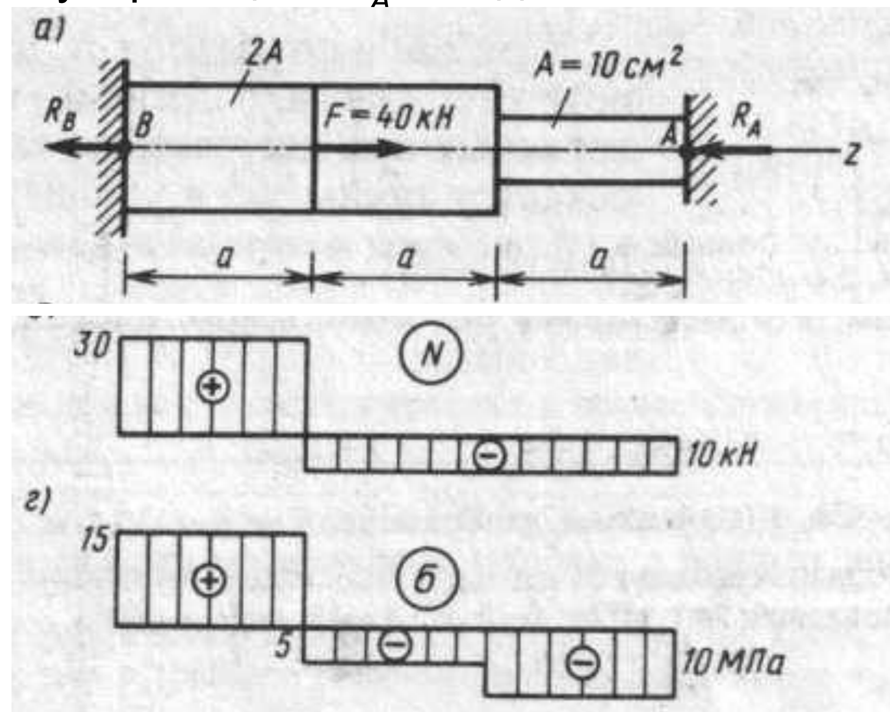
$$w_A = w_{AF} + w_{ARa} = \frac{Fa}{E2A} - \frac{R_A a}{EA} - \frac{R_A 2a}{E2A} = 0$$

отсюда

$$R_A = \frac{F}{4} = 10кН$$

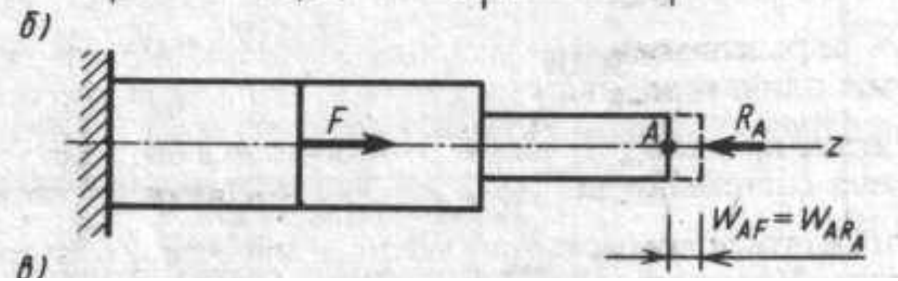
Подставляя в уравнение равновесия полученную реакцию R_A, найдем

$$R_B = F - R_A = 40 - 30 = 10кН$$



Реакции R_A и R_B определены и получены со знаком плюс, что указывает на правильность выбранного направления. Таким образом, раскрыта статическая неопределимость системы. Эпюра продольных сил строится обычным путем, с применением метода сечений; ее изображение дано на рис.. Нормальные напряжения определяются по формуле $\sigma = N/A$ на трех участках. Эпюра так же на рисунке

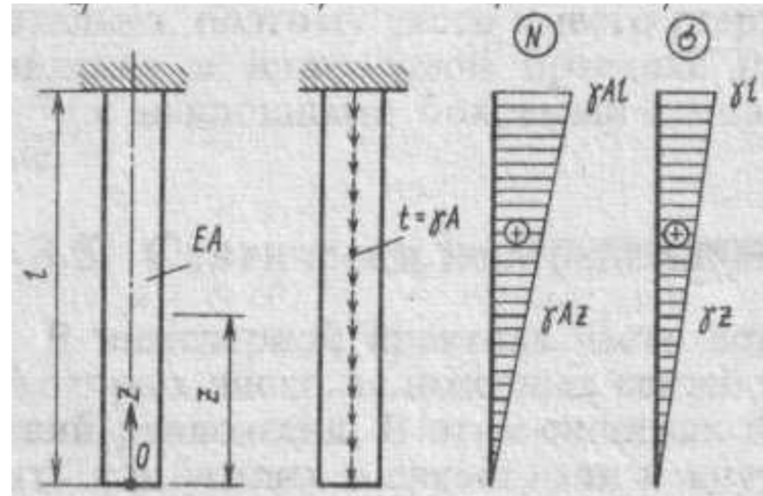
При наличии зазора Δ, например между правым концом стержня и заделкой, и условия, что зазор будет перекрыт при нагружении стержня, уравнение равновесия остается таким же, а уравнение перемещений примет вид δ(3a)= Δ. Далее решение выполняется в том же порядке



Учет собственного веса

В ряде практических задач в качестве внешней нагрузки встречается равномерно распределенная продольная нагрузка. К ней относится собственный вес стержня при условии, что поперечное сечение его остается постоянным на некотором участке. В этом случае распределенная нагрузка равна $q_i=\gamma A_i$, где γ — объемный вес материала стержня; A_i — площадь поперечного сечения.

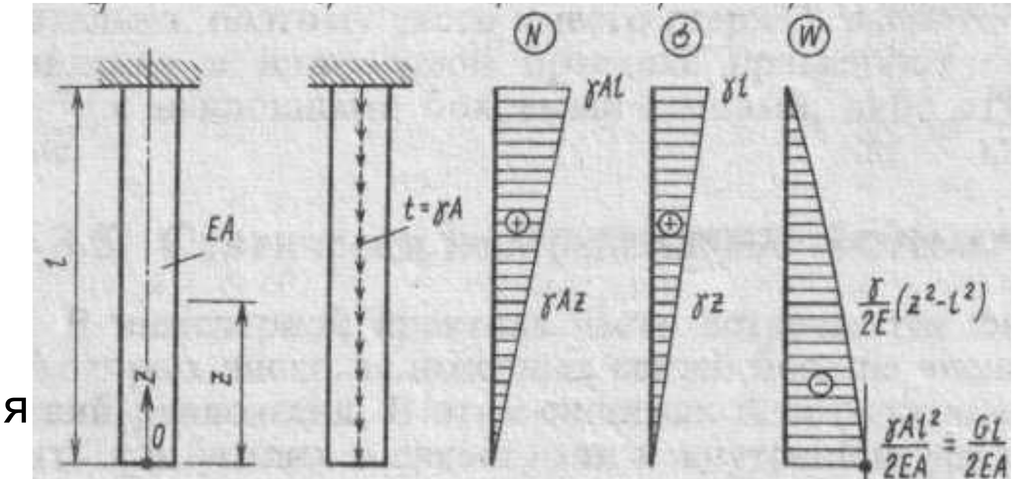
Рассмотрим стержень с постоянным поперечным сечением площадью *A,* закрепленный верхним концом и нагруженный только собственным весом. Выберем систему координат с началом в точке *O.*·Расчетная схема такого стержня может быть представлена в виде невесомого стержня, нагруженного равномерно



распределенной продольной нагрузкой (направлена вниз) интенсивностью $q=\gamma A$. Значение продольной силы в произвольном сечении (на расстоянии z от нижнего конца) равно весу нижележащей части стержня: $N=qz=\gamma Az$. Напряжение в этом сечении $\sigma=N/A = \gamma z$. Следовательно, продольная сила и нормальное напряжение пропорциональны z. Эпюры *N* и *σ* изображены на рис. Перемещение произвольного сечения от действия собственного веса равно

$$w(z) = w_0 + \int_0^z \frac{\gamma A z}{EA} dz = w_0 + \frac{\gamma A}{EA}\frac{z^2}{2}$$

Найдем w_0 из условия, что при *z=l* (сечение у заделки) w(l)=0



$$w_0 + \frac{\gamma A}{EA}\frac{l^2}{2} = 0$$

отсюда

$$w_0 = -\frac{\gamma A l^2}{2EA}$$

Итоговая зависимость для перемещения

$$w(z) = -\frac{\gamma A l^2}{2EA} + \frac{\gamma A z^2}{2EA} = \frac{\gamma A}{2EA}\left(z^2 + l^2\right)$$

Следовательно, перемещение *w* изменяется по квадратичной зависимости с экстремумом при *z*=0. Перемещение нижнего сечения равно:

$$w(0) = \frac{\gamma A l^2}{2EA} \;\text{ или }\; \Delta l = \frac{Gl}{2EA}$$

Где G=γAl – вес стержня.

Стержень равного сопротивления

Влияние собственного веса следует учитывать в конструкциях, имеющих большую длину, например канатах шахтных подъемников, штангах бурильных устройств либо в массивных конструкциях — опорах мостов, заводских трубах и др. В этих конструкциях рационально применять стержни переменного сечения, у которых напряжения во всех сечениях были бы одинаковыми и близкими к предельно допустимым для данного материала. Такой стержень называется *стержнем равного сопротивления растяжению или сжатию.* Форма его боковой поверхности ограничена кривой, а площадь поперечного сечения изменяется по экспоненциальному закону. Продольная сила также изменяется по этому же закону, а нормальные напряжения во всех сечениях остаются постоянными: $\sigma_z = N(z)/A(z)$=const. Постоянными будут и относительные удлинения: $\varepsilon=\sigma/E$, перемещения сечений w изменяются по линейной зависимости.