Тема 7.

Исследование напряженного состояния в точке тела

Итак: Объемная деформация

Предельное значение коэффициента Пуассона

•Закон Гука для объемной деформации

$$\boxed{\theta = \frac{1-2\nu}{E} \cdot \left[\sigma_y + \sigma_x + \sigma_z\right]}$$

• Пусть имеем растяжение во всех направлениях

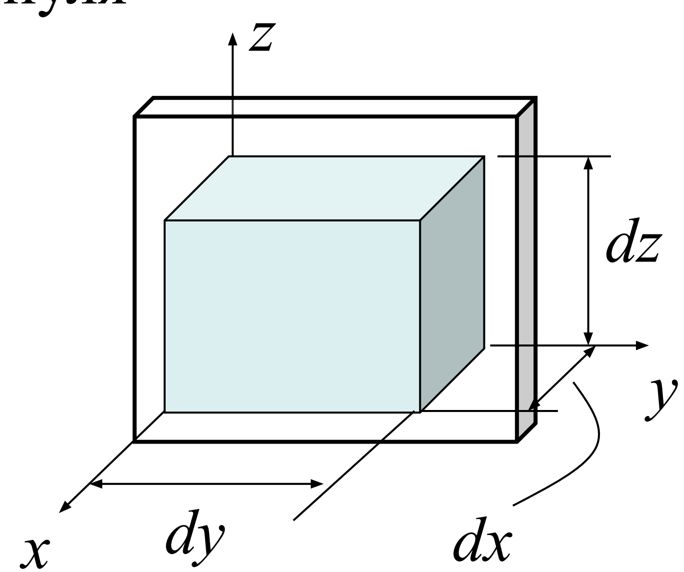
$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = p > 0$$

•Изменение объема должно быть больше нуля

$$\theta = 3p\frac{1-2\nu}{E} > 0;$$

$$1 - 2\nu > 0$$

$$\boxed{\nu < 0.5}$$

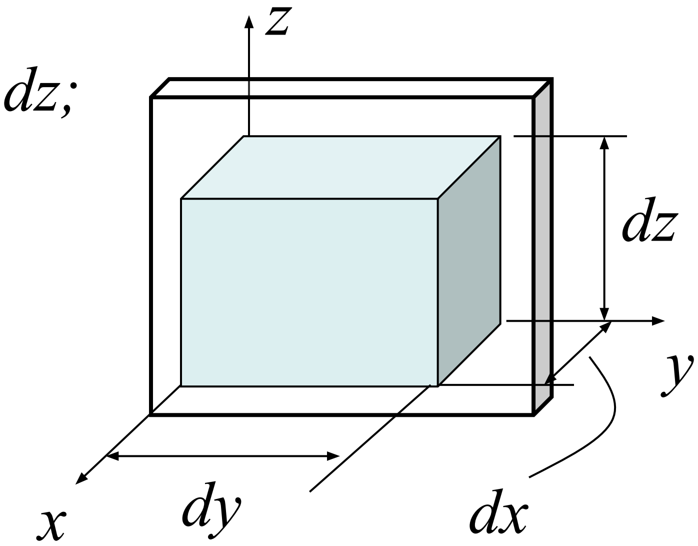


Потенциальная энергия деформации

Формула потенциальной энергии в произвольных и главных осях

Элементарный параллелепипед *dx, dy, dz;*

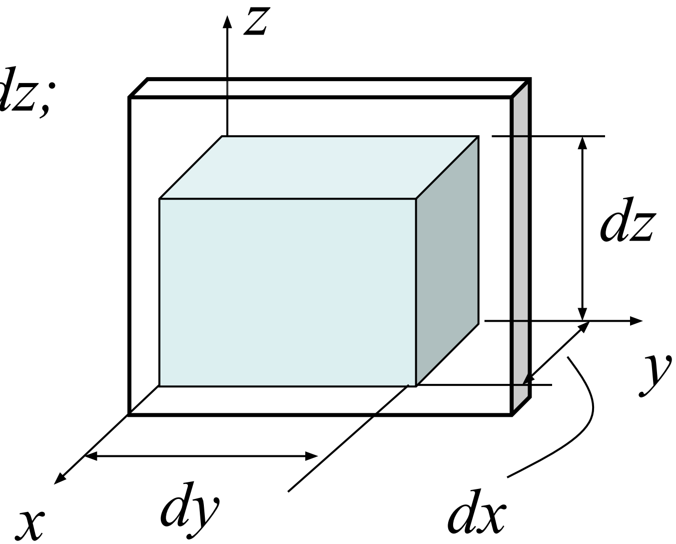
Эквивалент механической энергии, затрачиваемой на деформацию –
– работа внешних сил –



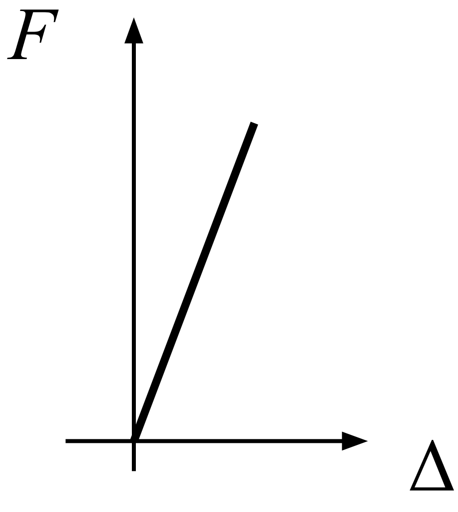
Потенциальная энергия деформации

Формула потенциальной энергии в произвольных и главных осях

Элементарный параллелепипед $dx, dy, dz;$

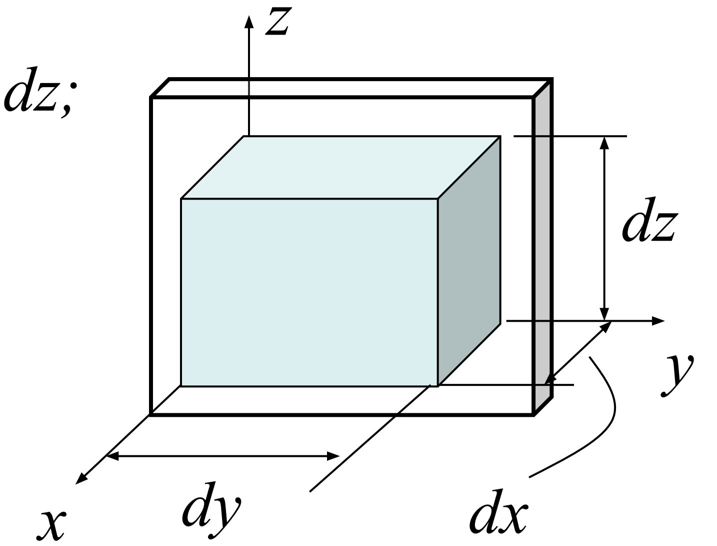


Эквивалент механической энергии, затрачиваемой на деформацию –
– **работа внешних сил** –



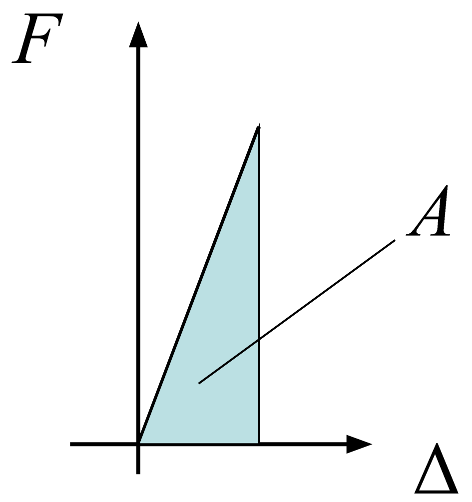
Потенциальная энергия деформации

Формула потенциальной энергии в произвольных и главных осях



Элементарный параллелепипед *dx, dy, dz;*

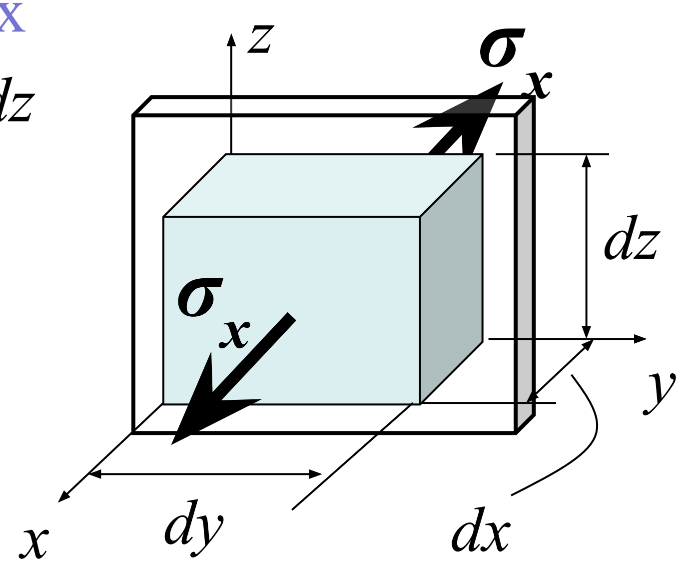
Эквивалент механической энергии, затрачиваемой на деформацию –
– **работа внешних сил** –



$$A = \frac{1}{2} F \cdot \Delta$$

Потенциальная энергия деформации

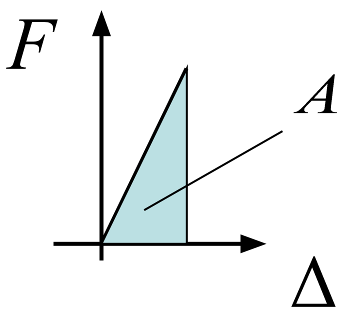
Формула потенциальной энергии в произвольных и главных осях



Элементарный параллелепипед *dx, dy, dz*

Эквивалент механической энергии, затрачиваемой на деформацию –

– **работа внешних сил** –



$$A = \frac{1}{2} F \cdot \Delta$$

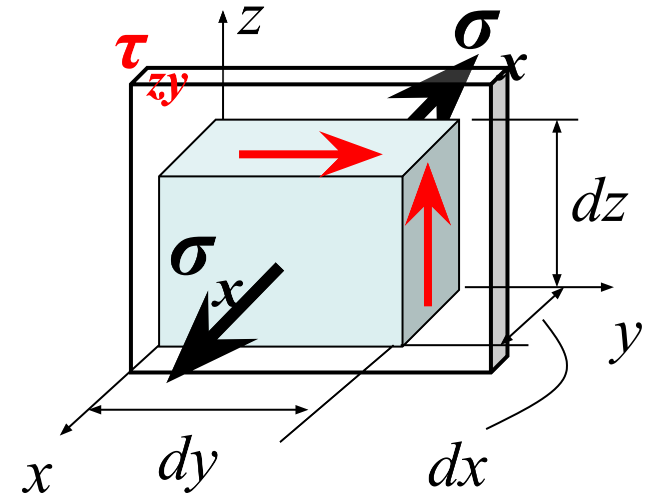
Напряжение	Сила	Перемещение	Работа
σ_x	$\sigma_x \cdot dy \cdot dz$	$\varepsilon_x \cdot dx$	$\frac{1}{2}\sigma_x \cdot dy \cdot dz \cdot \varepsilon_x \cdot dx$

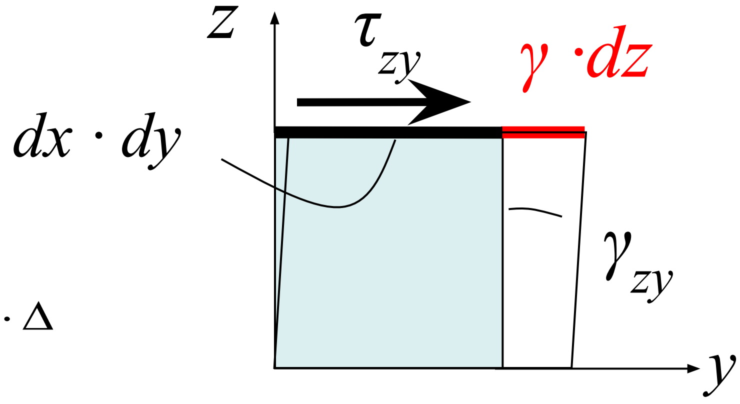
Потенциальная энергия деформации

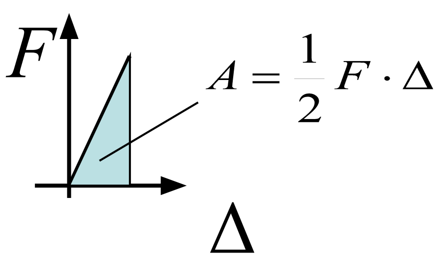
Формула потенциальной энергии в произвольных и главных осях

Элементарный параллелепипед *dx, dy, dz*

Эквивалент механической энергии, затрачиваемой на деформацию – – работа внешних сил –







Напряжение	Сила	Перемещение	Работа
τ_{zy}	$\tau_{zy} \cdot dx \cdot dy$	$\gamma_{zy} \cdot dz$	$\frac{1}{2}\tau_{zy} \cdot dy \cdot dz \cdot \gamma_{zy} \cdot dx$

Потенциальная энергия деформации

Формула потенциальной энергии в произвольных и главных осях

Элементарный параллелепипед *dx, dy, dz*

Напряжение	Сила	Перемещение	Работа
σ_x	$\sigma_x \cdot dy \cdot dz$	$\varepsilon_x \cdot dx$	$\frac{1}{2}\sigma_x \cdot dy \cdot dz \cdot \varepsilon_x \cdot dx$
σ_y			
σ_z			
τ_{yz}			
τ_{zy}	$\tau_{zy} \cdot dx \cdot dy$	$\gamma_{zy} \cdot dz$	$\frac{1}{2}\tau_{zy} \cdot dy \cdot dz \cdot \gamma_{zy} \cdot dx$
τ_{xz}			

Формула потенциальной энергии в произвольных и главных осях

Элементарный параллелепипед *dx, dy, dz*

Напряжение	Сила	Перемещение	Работа
σ_x	$\sigma_x \cdot dy \cdot dz$	$\varepsilon_x \cdot dx$	$\frac{1}{2}\sigma_x \cdot dy \cdot dz \cdot \varepsilon_x \cdot dx$
τ_{xy}	$\tau_{xy} \cdot dy \cdot dz$	$\gamma_{xy} \cdot dx$	$\frac{1}{2}\tau_{xy} \cdot dy \cdot dz \cdot \gamma_{xy} \cdot dx$

Энергия деформации, накопленная в элементарном объеме

$$dU = \frac{1}{2} \cdot dy \cdot dz \cdot dx \cdot [(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z) + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{xz}\gamma_{xz}]$$

Удельная потенциальная энергия деформации

$$U_0 = \frac{1}{2E}[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z)] +$$

$$+ \frac{1}{2G}(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)$$

Формула потенциальной энергии в произвольных и главных осях

Удельная потенциальная энергия деформации

$$U_0 = \frac{1}{2E}[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z)] +$$

$$+ \frac{1}{2G}(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)$$

– в произвольных осях.

Удельная потенциальная энергия деформации

$$U_0 = \frac{1}{2E}[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)]$$

– в главных осях.

Деление потенциальной энергии на части, связанные с изменением объема и с изменением формы

- Среднее напряжение:

$$\sigma_{cp} = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

- Представим напряженное состояние в виде суммы:

$$\left\| \begin{matrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \sigma_{cp} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{cp} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{cp} \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} \sigma_1 - \sigma_{cp} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - \sigma_{cp} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 - \sigma_{cp} \end{matrix} \right\|$$

Изменение объема

Изменение формы

Почему так названы?

Деление потенциальной энергии на части, связанные с изменением объема и с изменением формы

- Среднее напряжение:

$$\sigma_{cp} = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

- Представим напряженное состояние в виде суммы:

$$\begin{Vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \sigma_{cp} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{cp} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{cp} \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} \sigma_1 - \sigma_{cp} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - \sigma_{cp} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 - \sigma_{cp} \end{Vmatrix}$$

Изменение объема равно

$$\theta = 3 \cdot \sigma_{cp} \cdot \frac{1 - 2\nu}{E}$$

$$\theta = \left[\sigma_1 - \sigma_{cp} + \sigma_2 - \sigma_{cp} + \sigma_3 - \sigma_{cp}\right]\frac{1 - 2\nu}{E} = 0$$

Деление потенциальной энергии на части, связанные с изменением объема и с изменением формы

- Среднее напряжение:

$$\sigma_{cp} = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

- Представим напряженное состояние в виде суммы:

Удельная потенциальная энергия деформации: $U_0 = U_0^{об} + U_0^{формы}$

$$U_0 = \frac{1}{2E}[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)]$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_{cp}$$

$$U_0^{об} = \frac{1-2\nu}{2E} \cdot 3 \cdot \sigma_{cp}^2 = \frac{1-2\nu}{6E}(\sigma_1 + \sigma_3 + \sigma_2)^2$$

Деление потенциальной энергии на части, связанные с изменением объема и с изменением формы

- Среднее напряжение:

$$\sigma_{cp} = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

- Представим напряженное состояние в виде суммы:

Удельная потенциальная энергия деформации: $U_0 = U_0^{об} + U_0^{формы}$

$$U_0 = \frac{1}{2E}[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)]$$

$$U_0^{об} = \frac{1-2\nu}{2E} \cdot 3 \cdot \sigma_{cp}^2 = \frac{1-2\nu}{6E}(\sigma_1 + \sigma_3 + \sigma_2)^2$$

$$U_0^{Формы} = U_0 - U_0^{об} = \frac{1+\nu}{6E}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]$$