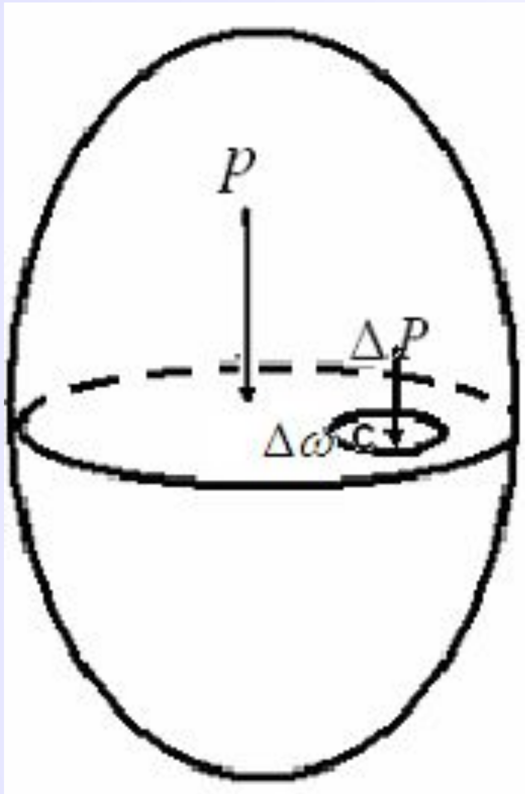
ГИДРОСТАТИКА

- **Гидростатика** - раздел гидравлики, в котором изучаются равновесие жидкости и воздействие покоящейся жидкости на погруженные в неё тела. Одна из основных задач гидростатики – изучение распределения давления в жидкости.

- В покоящейся жидкости всегда присутствует сила давления, которая называется *гидростатическим давлением*.
- Жидкость оказывает силовое воздействие на дно и стенки сосуда, водоема и др.. Частицы жидкости, расположенные в верхних слоях водоема, испытывают меньшие силы сжатия, чем частицы жидкости, находящиеся у дна.

Гидростатическое давление и его свойства



$$\eth_{\tilde{n}\eth} = \frac{Đ}{\omega}$$

- Выделим на плоскости А–В элементарную площадку , на которую будет приходиться некоторая сила *P*. Если будем уменьшать площадку таким образом, чтобы ее площадь стремилась к нулю, то **предел отношения силы к площади будет называться гидростатическим давлением в данной точке *C*:**

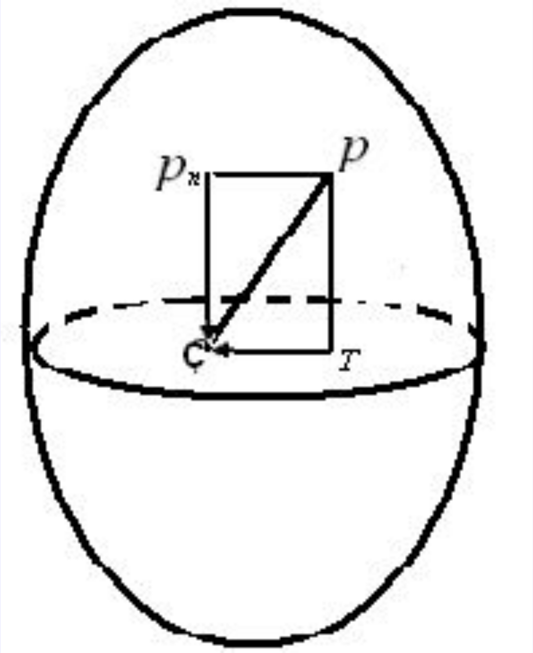
$$p = \lim_{\Delta\omega \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta\omega}$$

Давление в системе СИ измеряется в паскалях: ***Па = Н / м²*** .

Связь единиц давления в различных системах измерения такая:

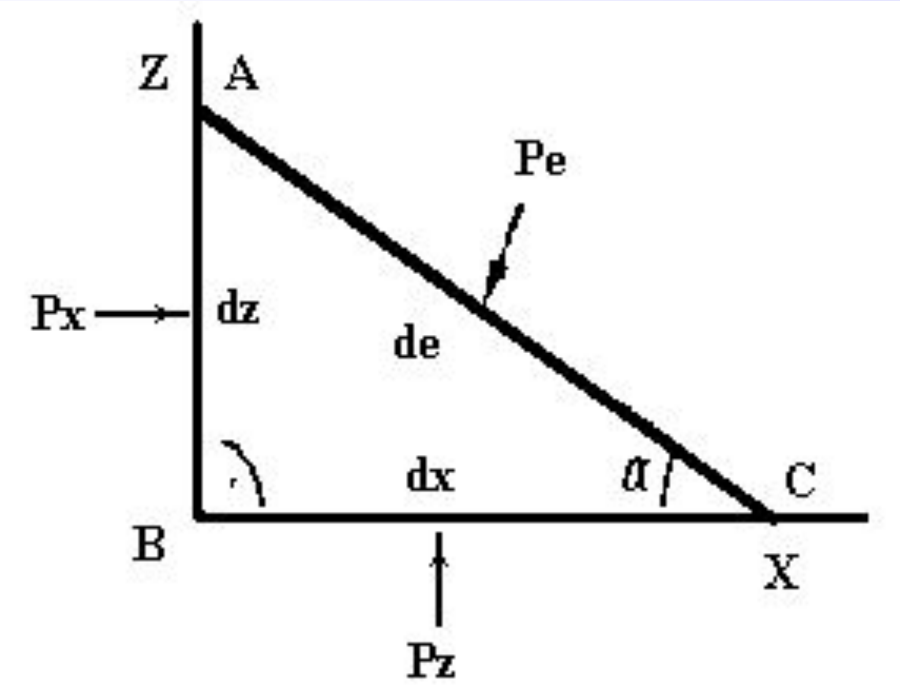
100000 Па = 0,1 МПа = 1 кгс/см² = 1 ат = 10 м

- Гидростатическое давление характеризуется тремя основными свойствами.
- **Первое свойство.** ***Гидростатическое давление направлено всегда по внутренней нормали к поверхности на которую оно действует.***



- Силу можно разложить на две составляющие: нормальную *Pn* и касательную *T* к поверхности АВ. ***Касательная составляющая*** – это равнодействующая сил трения, приходящихся на выделенную поверхность вокруг точки *С*.
- Так как жидкость находится в покое, то силы трения отсутствуют, т. е. *T=0*.
- *Следовательно,* сила гидростатического давления *P* в точке *С* действует лишь в направлении силы *Pn*, т. е. нормально к поверхности А–В. Причем направлена она только по внутренней нормали.

- **Второе свойство.** ***Гидростатическое давление в любой точке жидкости действует одинаково по всем направлениям***.
- *Выделим* в жидкости, находящейся в равновесии, частицу в форме треугольной призмы с основанием в виде прямоугольного треугольника АВС.
- *Заменим* действие жидкости вне призмы на ее боковые грани гидростатическим давлением соответственно *Px, Pz, Pe,* кроме этих сил на призму действует сила тяжести *dG,* равная *γdzdx/2* (с целью упрощения грань *dy* не рассматриваем).

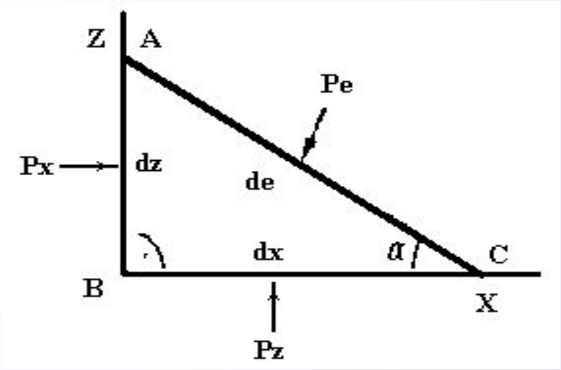


- Так как частица жидкости находится в равновесии, в покое, то сумма проекций всех сил, приложенных к ней, на любое направление равна нулю, т.е.:

$$\Sigma x=0; \quad p_x dz - p_e de\, sin\alpha=0,$$

$$\Sigma z=0; \quad p_z dx - p_e de\, cos\alpha - \gamma dzdx/2=0.$$

- *Подставляя $dz=de\, sin\alpha$ и $dx=de\, cos\alpha$, получим*

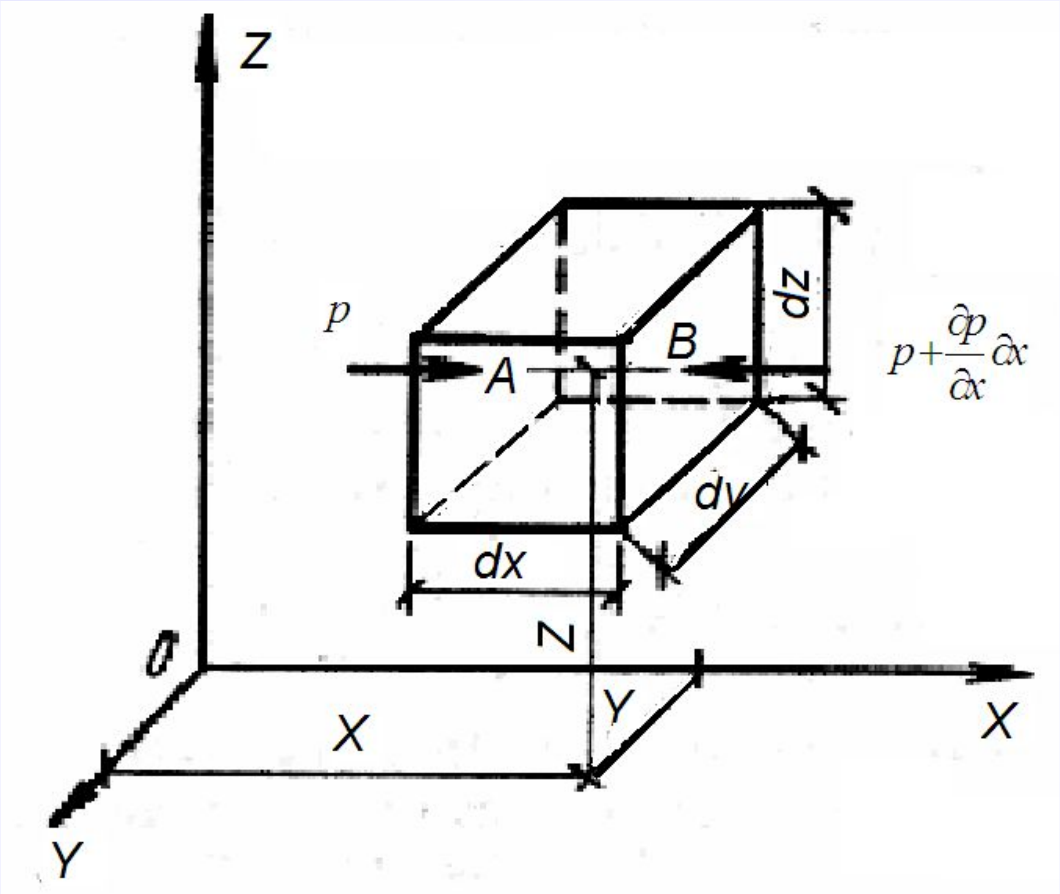


- $p_x=p_e$
- $p_z=p_e+\gamma dzdx/2.$
- $p_x=p_z=p_e$

- **<u>Следовательно,</u>** гидростатическое давление на наклонную грань p_e **одинаково** по величине с гидростатическим давлением на вертикальную и горизонтальную грани. Так как угол наклона грани *(α)* взят произвольно, то можно утверждать, что **гидростатическое давление в любой точке жидкости действует одинаково по всем направлениям.**

- **Третье свойство.** *Гидростатическое давление в точке зависит только от ее координат в пространстве, т.е.*
- $p=f(x, y, z)$.

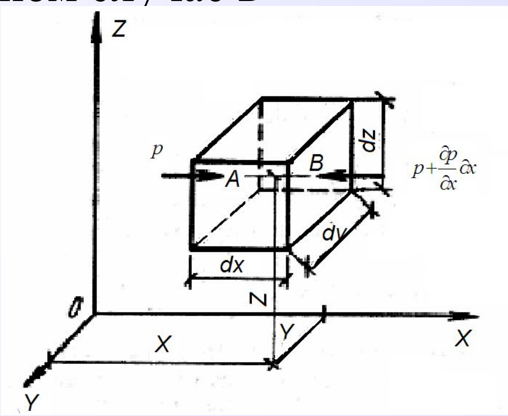
Дифференциальные уравнения равновесия жидкости (уравнения Эйлера)



- Предположим, что гидростатическое давление в точке *A* с координатами *x, y, z* будет *p*. Тогда гидростатическое давление (p_1) в точке В, лежащей на линии А–В на расстоянии *dx* вправо от точки *A,* изменится на *dp* и будет равно:

$$p_1 = f(x+dx, y, z) = f(x, y, z) + \frac{df(x,y,z)}{\partial x}dx = p + \frac{\partial p}{\partial x}dx$$

- Тогда поверхностная сила давления на левую грань параллелепипеда равна гидростатическому давлению в одной из точек этой грани (в данном случае в точке А), умноженному на площадь грани:



$$P = pdydz,$$

- и на правую грань

- $$P_1 = -\left(p + \frac{\partial p}{\partial x}dx\right)dydz.$$

- Объемной или массовой силой называется сила, приложенная к массе жидкости в объеме параллелепипеда т.е. сила тяжести

- $$G = mg.$$

- При постоянной плотности масса жидкости выделенного объема равна

- $$m = \rho dxdydz.$$

- Проекцией объемных сил на ось ОХ будет величина – $\rho dxdydzX.$

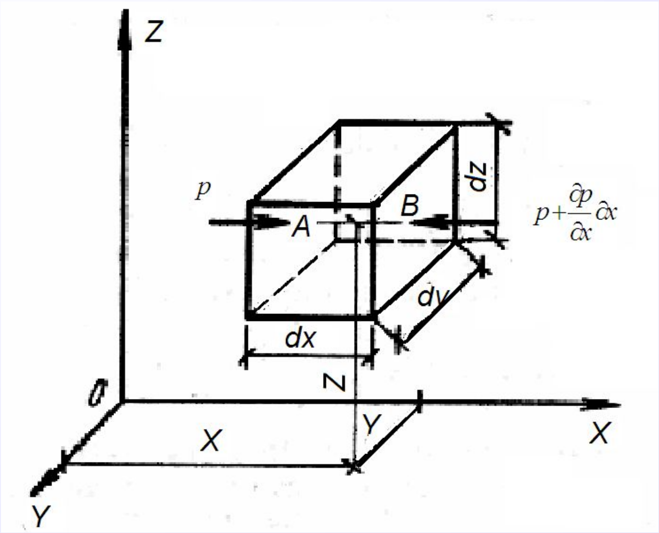
- Суммируя проекции всех действующих на параллелепипед сил на ось *X* и приравнивая эту сумму к 0, получим:

- $$pdydz\left(-ð+\frac{\partial ð}{\partial õ}dõ\right) \qquad dydz+\rho dxdydzX=0,$$

- откуда $$X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=0.$$
-
- По аналогии с этим можно получить подобные уравнения для осей *У* и *Z*:

$$У-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}=0$$

$$Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}=0.$$



Поверхности равного давления

- Поверхности равного давления, представляют собой семейство горизонтальных плоскостей, во всех точках которой давление одинаково.
- Свободная поверхность жидкости для ограниченного объема, т.е. поверхность на границе жидкой и газообразной сред, в данном случае – одна из плоскостей равного давления, на которую приложено постоянное давление равное атмосферному.

- Для нахождения величины давления p по его трем частным производным по координатам умножим уравнения Эйлера соответственно на dx, dy, dz и сложим:

$$\underbrace{\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz}_{dp} = \rho\left(Xdx + Ydy + Zdz\right)$$

- Левая часть полученного уравнения представляет собой полный дифференциал dp, так как гидростатическое давление – это лишь функция координат x, y, z, т. е.

- $$dp=\rho(Xdx+Ydy+Zdz).$$

- ***- основное уравнение гидростатического давления в дифференциальной форме.***

- В правой части уравнения выражение в скобках также полный дифференциал некоторой потенциальной функции $П=П(x, y, z)$, частные производные которой по координатам x, y, z соответственно равны проекциям единичных массовых сил X, Y, Z.

- Уравнение можно переписать в следующем виде:
-
- $$dp = \rho\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Pi}{\partial y}dy + \frac{\partial \Pi}{\partial z}dz\right),$$

  d

  П
- или
  $$dp = \rho d\Pi$$
- Интегрируя уравнение получим:
  $$p = \rho\Pi + C$$
- где C – произвольная постоянная интегрирования.

- Для поверхности равного давления из уравнения ***$dp=\rho(Xdx+Ydy+Zdz)$***, при $p=const$,
- $\rho \neq 0$ принимая $dp = 0$ и тогда
  - ***$Xdx+Ydy+Zdz= 0$.***
- Это уравнение называется ***уравнением поверхности жидкости равного или постоянного давления***.
- При неравномерном или непрямолинейном движении на частицы жидкости кроме силы тяжести действуют еще и силы инерции, причем если они постоянны по времени, то жидкость принимает новое положение равновесия. Такое равновесие жидкости называется ***относительным покоем***.

- Если на покоящуюся жидкость действует внешняя сила, сила тяжести, тогда $X = 0$, $У = 0$, $Z = -g$. В этом случае ***уравнение поверхности жидкости равного давления*** имеет вид
- $-\,gdz = 0$ или $Z = C = const$,
- т.е. получаем поверхности равного давления, представляющие собой семейство горизонтальных плоскостей, во всех точках которой давление одинаково.
- Основное уравнение гидростатического давления в дифференциальной форме для жидкости, находящейся под действием силы тяжести, запишется таким образом:
- $dp = -\rho g dz$, т.е. $$\frac{dp}{\rho g} + dz = 0$$
- интегрируя которое получим
- . $$\frac{\partial}{\rho g} + z = C = const$$
- Для двух точек одного и того же объема покоящейся жидкости уравнение можно представить в виде: $$\boxed{z_1 + \frac{p_1}{\rho g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g}}$$

Геометрическая интерпретация основного уравнения гидростатики

- Рассмотрим уравнение основное уравнение гидростатики для точек А и В :
- $z + \dfrac{p}{\gamma} = z_0 + \dfrac{p_0}{\gamma}$, или $p = p_0 + \gamma\,(z_0 - z)$.
- где p – полное или абсолютное давление, иногда обозначаемое как $p_{абс}$,
- z и z_0 – геометрические высоты расположения точек А и В относительно произвольной плоскости 0–0, называемой плоскостью сравнения, γh – давление, равное весу столба жидкости при единичной площади и высоте
- $h = z_0 - z$,
- $\dfrac{p}{\gamma}$ и $\dfrac{p_0}{\gamma}$
- – высоты соответствующие гидростатическому давлению p и p_0 в точках А и В.
- С учетом глубины погружения точки А под уровень свободной поверхности h, получим наиболее часто встречающуюся запись основного уравнения гидростатики:
- $p = p_0 + \gamma h$

Высоту H называют ***гидростатическим напором.***

Для данного объема жидкости гидростатический напор относительно выбранной плоскости сравнения – величина постоянная:

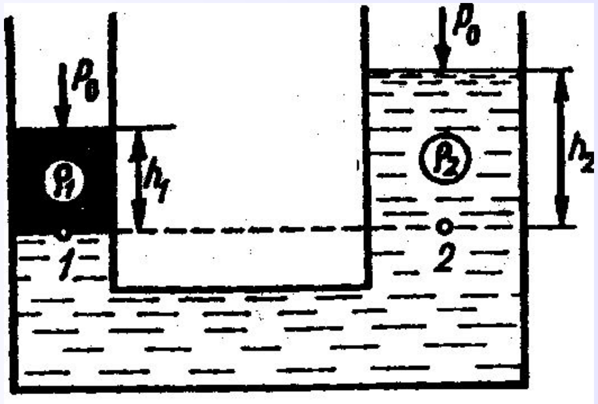
$$H = z + \frac{p}{\gamma} = z_0 + \frac{p_0}{\gamma} = const.$$

- **С энергетической точки зрения** уравнение представляет собой постоянную величину суммы удельной потенциальной энергии положения z и z_0 и удельной потенциальной энергии давления $\frac{p}{\gamma}$ *и* $\frac{p_0}{\gamma}$ во всех точках покоящейся жидкости относительно плоскости сравнения.
- Из уравнения следует, что гидростатическое давление p в любой точке жидкости и на любой глубине h зависит от внешнего давления p_0 на свободной поверхности.
- Т. е. *всякое внешнее давление, действующее на свободную поверхность жидкости, находящейся в равновесии, передается внутрь во все точки жидкости без изменения.*

закон Паскаля

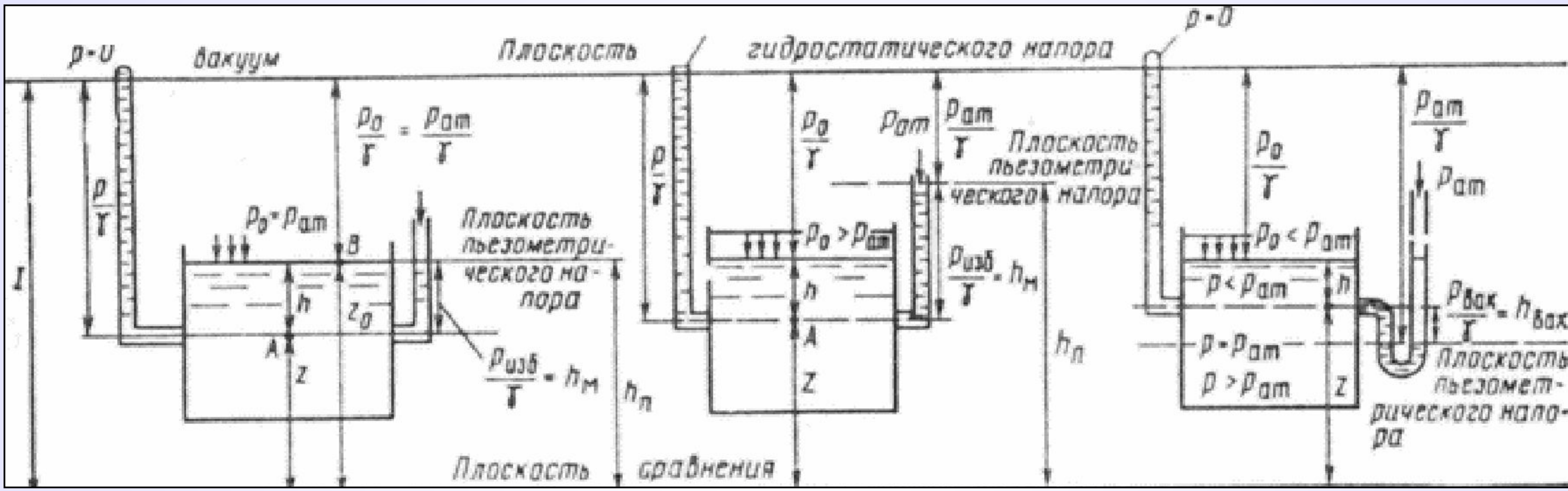
Равновесие двух неоднородных жидкостей в сообщающихся сосудах

- Рассмотрим равновесие двух неоднородных жидкостей покоящихся в сообщающихся сосудах (рис):
- $p_1+\gamma_1 h_1= p_2+\gamma_2 h_2$,
- если $p_1= p_2=p_0$, т. о. $\gamma_1 h_1= \gamma_2 h_2$
- или $h_1/h_2=\gamma_2/\gamma_1$.



- При неоднородных жидкостях и одинаковом внешнем давлении в сообщающихся сосудах уровень жидкостей обратно пропорционален удельному весу этих жидкостей.
- Для однородных жидкостей $(\gamma_1=\gamma_2)$ свободная поверхность в сообщающихся сосудах устанавливается на одном уровне $(h_1=h_2)$.

Избыточное и вакуумметрическое давление

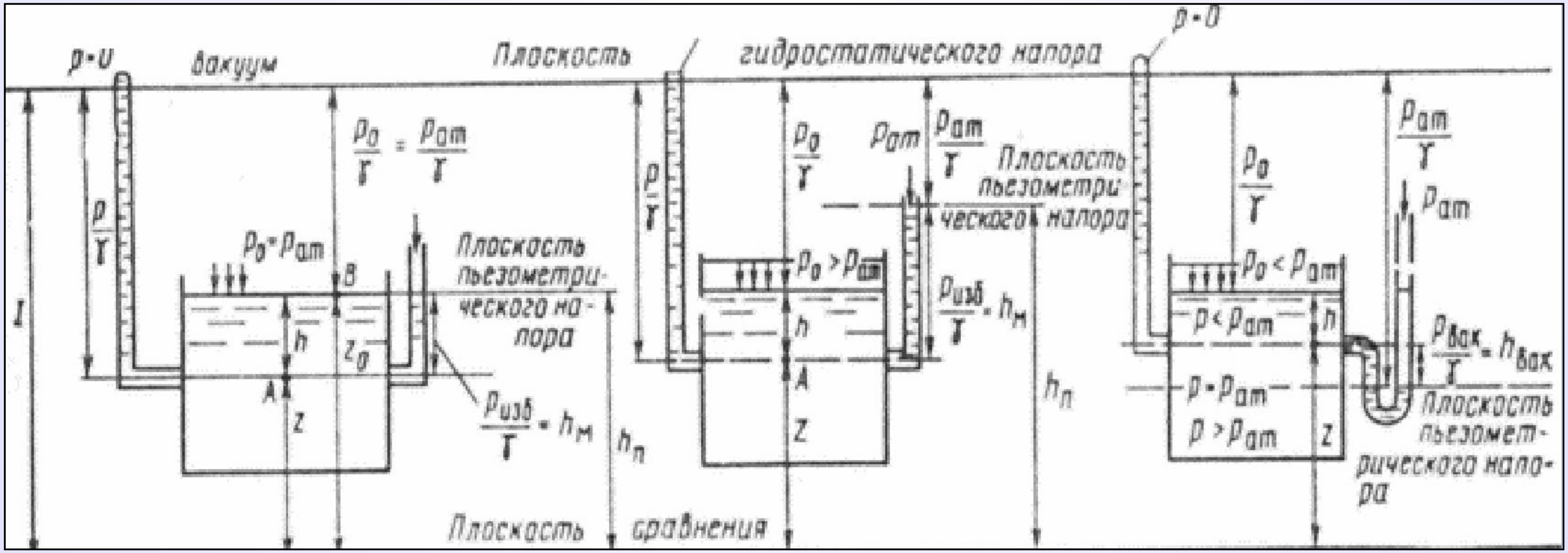


- Возможны три случая (рис.):
- а) $p_0 = p_{am}$;
- б) $p_0 > p_{am}$;
- в) $p_0 < p_{am}$.

- Рассмотрим случай, когда $p_0 > p_{am}$.
- Для точки А давление, действующее слева и справа:
- $p_0 + \gamma h = p_{am} + \gamma h_м$
- затем найдем $h_м$

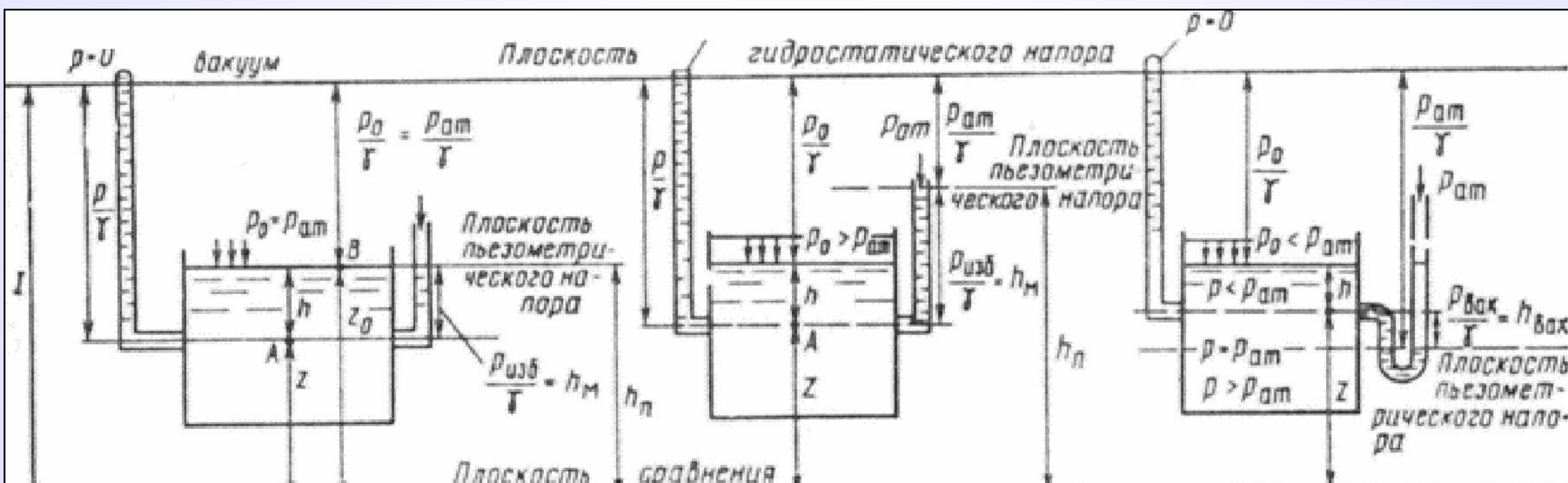
$$h_м = \frac{p_0 - p_{am}}{\gamma} + h = \frac{p_0 - p_{am} + \gamma h}{\gamma}$$

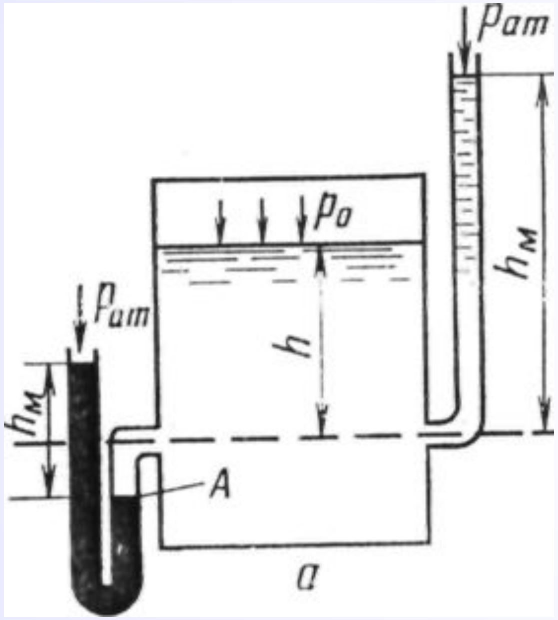
$$\gamma h_м = p_0 + \gamma h - p_{am} = p - p_{am} = p_м.$$



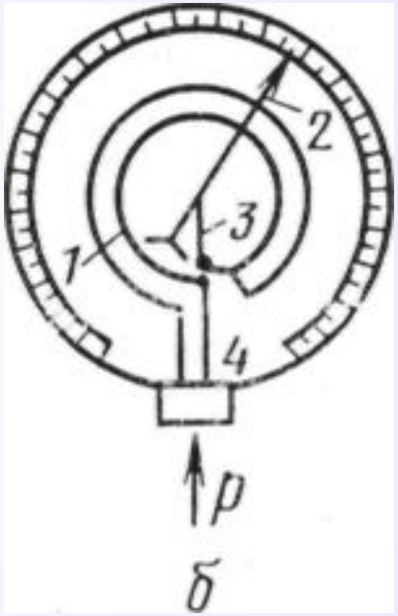
- В инженерной практике часто давление и жидкости бывает меньше атмосферного, т.е. $p_0<p_{атм}$. В этом случае манометрическое давление будет отрицательным и называется вакуумом, а высота столба жидкости, измеряющая вакуум, называется вакуумметрической высотой $h_{вак}$. Запишем равенство давления для точки А, действующего слева и справа:
- $$p_0+\gamma h+\gamma h_{\text{âàê.}} = p_{\text{àò}}.$$,
- тогда

$$h_{\text{âàê}} = \frac{\text{ð}_{\text{àò}} - \text{ð}_0 - \gamma h}{\gamma} = \frac{p_{\text{àò}} - \text{ð}}{\gamma}$$



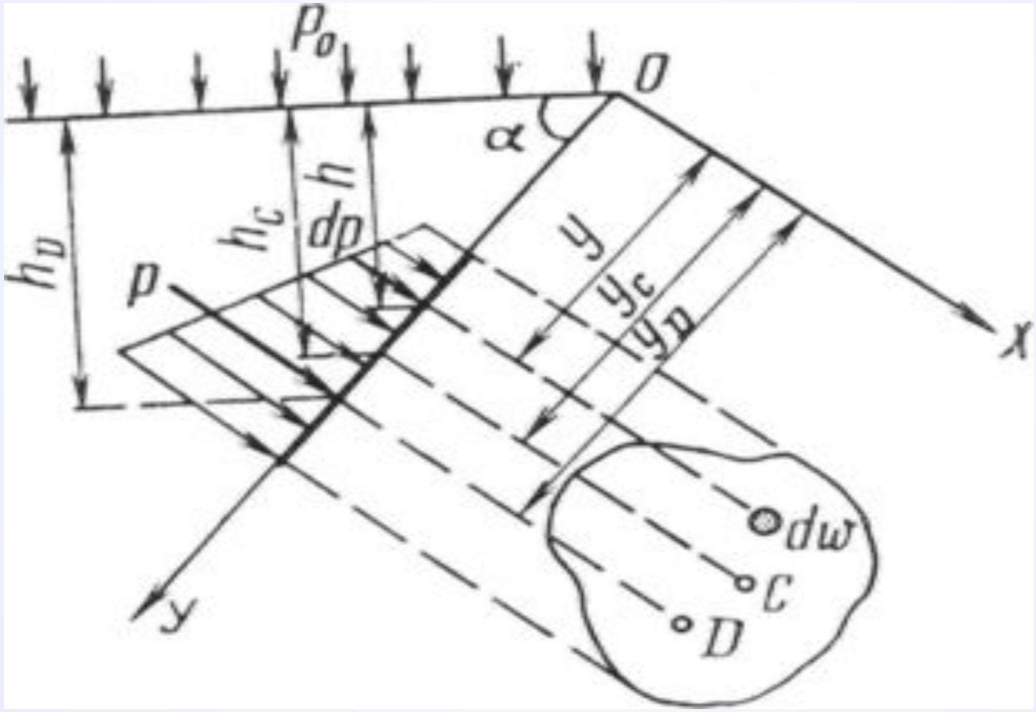


p_{am}
p_o
p_{am}
$h_м$
h
$h_м$
A
a



2
3
1
4
p
б

Давление жидкости на плоские и криволинейные поверхности



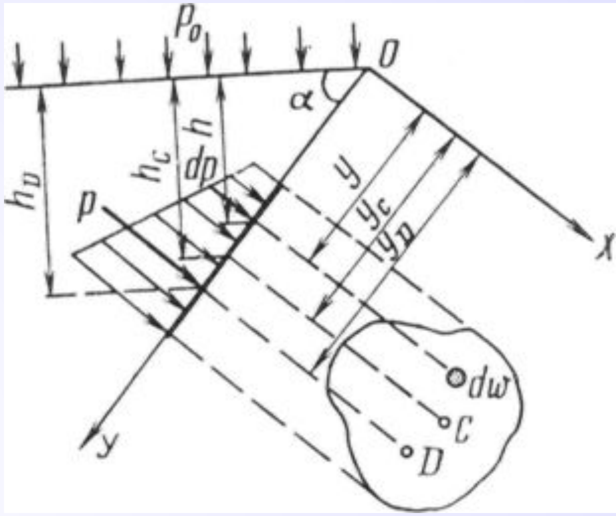
Определим бесконечно малую силу гидростатического давления на элементарную площадку dw:

$$dp = pdw = \left(p_0 + \gamma h\right) dw = p_0 dw + \gamma h dw$$

Для определения силы гидростатического давления необходимо проинтегрировать полученное выражение по всей площади w:

$$Đ = ð_0 \int_w dw + \gamma \int_w h dw = p_0 w + \gamma \sin\alpha \int_w y dw$$

где y – координата площадки dw.



Интеграл $\int_w y dw$ представляет собой статический момент смоченной поверхности фигуры относительно уреза воды - оси O–X и равен произведению площади этой фигуры на координату ***центра тяжести*** y_c,

т. е.

$$\int_w y dw = y_c w$$

Следовательно,

$$\boxed{P = p_0 w + \gamma \sin\alpha \, y_c w = p_0 w + \gamma \, h_c w},$$

где h_c – глубина погружения центра тяжести площади w в жидкость.

- Установим точку приложения *силы избыточного гидростатического давления* – y_D. Сила гидростатического давления жидкости P – это равнодействующая множества параллельных ей сил dp, действующих на элементарные площадки dw. Используем теорему Вариньона, согласно которой ***момент равнодействующей силы относительно какой-либо оси равен сумме моментов ее составляющих относительно той же оси:***
- $$\text{Đ} y_D = \int_w y dp \quad ,$$
- откуда

$$y_D = \frac{\int_\omega y d\eth}{P}.$$

- С учетом того, что $dp = \gamma h dw = \gamma y \sin\alpha dw$ и $\text{Đ} = \gamma h_c w = \gamma y_c \sin\alpha w$
- получим $$y_D = \frac{\int_w y^2 dw}{y_c w} = \frac{I_x}{y_c w}$$,
- где $I_x = \int_w y^2 dw$ - осевой момент инерции смоченной площадки *(w)* относительно оси *0–X*.

- В расчетах удобнее использовать **осевой момент инерции плоской фигуры** I_{xo} относительно центральной оси, для этого воспользуемся известной формулой перехода

  - $I_x = I_{xo} + y_c{}^2 w,$

- Подставляя это выражение в формулу получим

$$\boxed{y_D = y_c + \frac{I_{x\hat{\imath}}}{y_c w} = y_c + \frac{I_{x\hat{\imath}}}{S}}$$

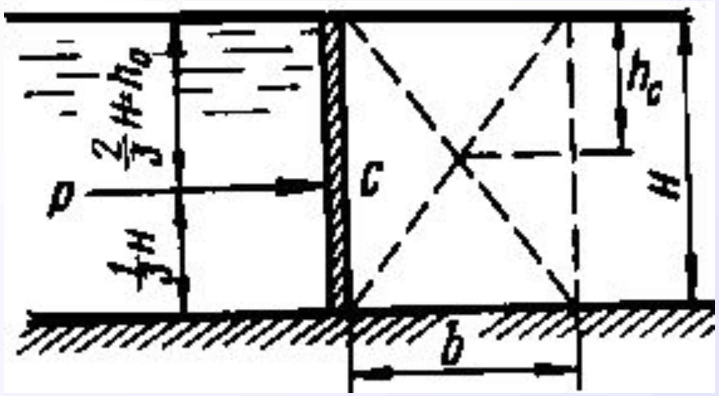
- где $S = y_c w$ – статический момент смоченной площади относительно оси 0 –X.

- Для вертикальной плоской стены, когда *sina=1:*
- $$h_D = h_c + \frac{I_{x_0}}{h_c w}$$, так как $y_D = \frac{h_D}{\sin\alpha}$ и $y_c = \frac{h_c}{\sin\alpha}$

.

- Т.о. для **плоской прямоугольной стенки (рис.)** сила гидростатического давления будет равна:

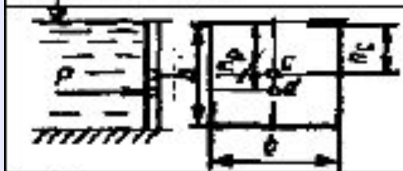
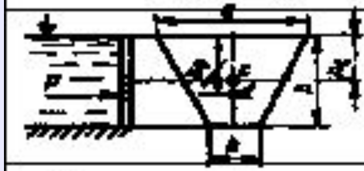
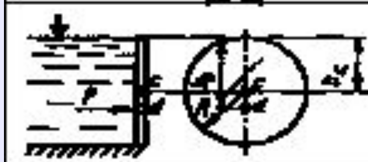
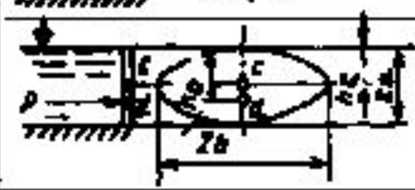
$$P = \gamma h_c w = \gamma \frac{H}{2} bH = \frac{1}{2}\gamma b H^2$$



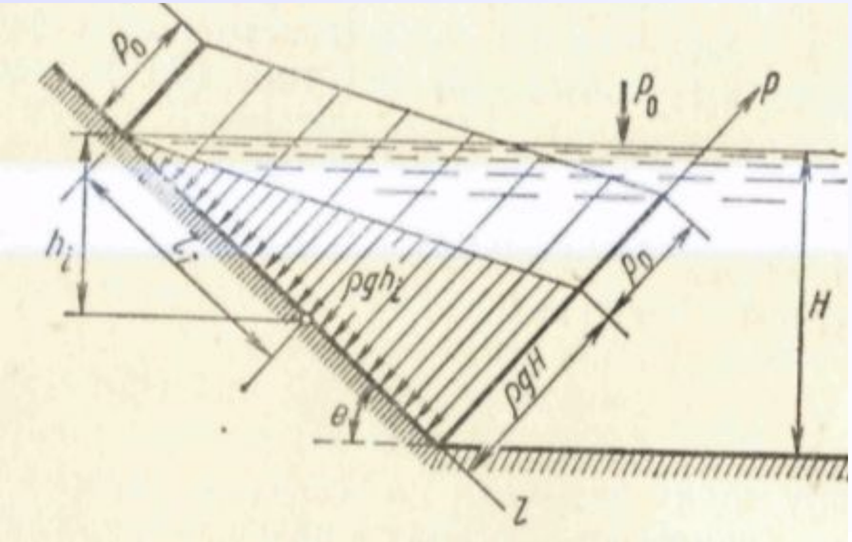
- Центр давления находится по формуле

$$\boxed{y_D = \frac{H}{2} + \frac{bH^3/12}{H/2bH} = \frac{2}{3}H}$$

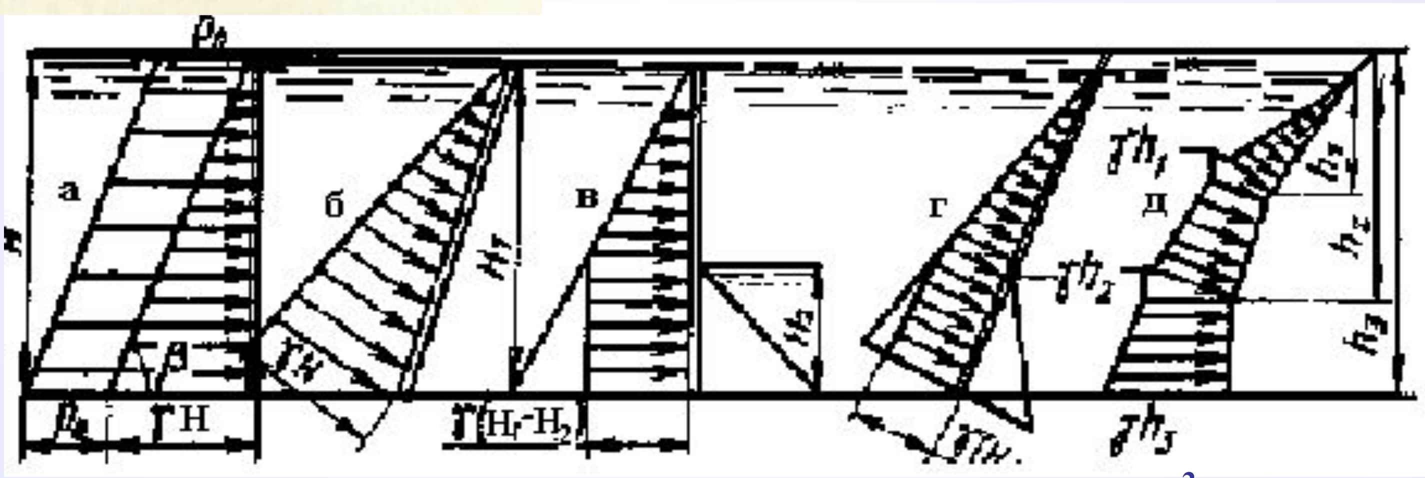
В табл. приведены формулы для расчета момента инерции *Ixo* координат центра тяжести h_c и центра давления h_D, площади и силы *P*.

Форма фигуры	I_{xo}	h_c	ω	h_D	P
	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{h}{2}$	bh	$\frac{2}{3}h$	$\rho g\frac{bh^2}{2}$
	$\frac{bh}{36}$	$\frac{2}{3}h$	bh	$\frac{3}{4}h$	$\rho g\frac{bh^2}{3}$
	$\frac{1}{36}h^3\frac{a^2+4ab+b^2}{a+b}$	$\frac{1}{3}h\frac{a+2b}{a+b}$	$\frac{1}{2}h(a+b)$	$\frac{h}{2}\frac{a+3b}{a+2b}$	$\rho g\frac{h^2}{6}(a+2b)$
	$\frac{1}{4}\pi R^2$	R	πR^2	$\frac{5}{4}R$	$\rho g\pi R^3$
	$\frac{1}{4}\pi(R^4-r^4)$	**R**	$\pi(R^2-r^2)$	$R+\frac{R^2+r^2}{4R}$	$\rho g\pi R(R^2-r^2)$
	$\frac{1}{4}\pi a^3 b$	**a**	πab	$\frac{5}{4}a$	$\rho g\pi a^2 b$

Эпюры давления



- если $p_0 = p_{ат}$, то
- $P = \gamma\ h_i$
- если $h_i = 0$, то $p = 0$, если $h_i = H$, то $p = \gamma H$.



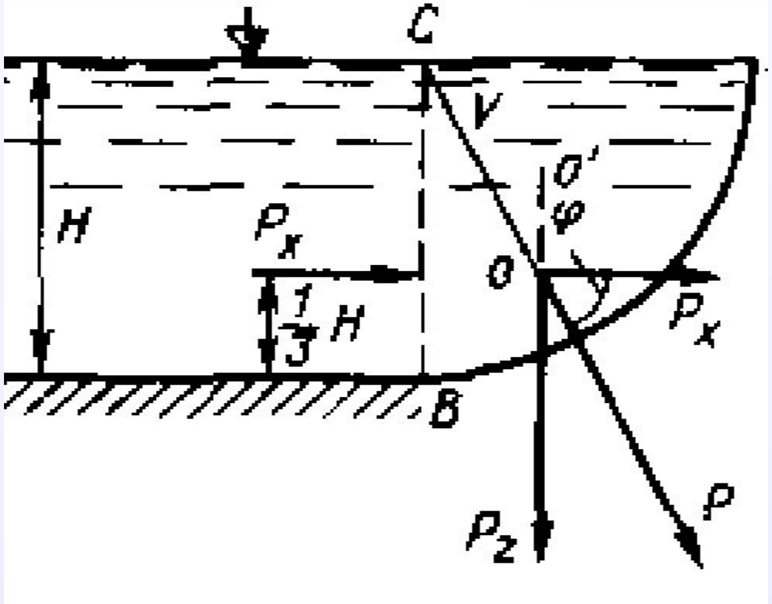
Давление в системе СИ измеряется в паскалях: ***Па = Н / м²*** .

100000 Па = 0,1 МПа = 1 кгс/см² = 1 ат = 10 м

- Для горизонтально расположенной стенки, в виде горизонтального дна сосуда, сила давления жидкости на все дно площадью *w* может быть определена по формуле
  - $P=\gamma\ wH.$

Давление на криволинейные поверхности

- *Значение силы давления на цилиндрическую поверхность определяется по формуле:*
- $P = \sqrt{P_x^2 + P_z^2}$,
- *где* P_x *и* P_z – горизонтальная и вертикальная составляющие силы давления.



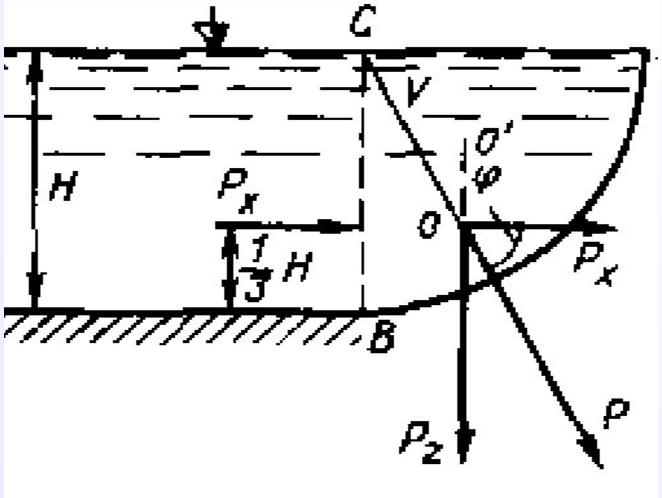
- ***После интегрирования для горизонтальной составляющей силы*** **получим**

$$P_x = \gamma h_c w_x$$

- где w_x – проекция всей цилиндрической поверхности на плоскость, нормальную к оси 0–X, h_c – глубина центра тяжести проекции w_x под пьезометрической плоскостью.
- ***Вертикальная составляющая численно равна весу жидкости в объеме тела давления***

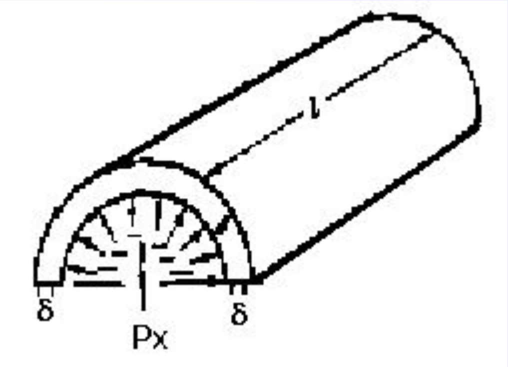
- $$P_z = \gamma W.$$

- Горизонтальная составляющая P_x проходит **через центр давления проекции w_x**, а вертикальная составляющая P_z проходит через центр тяжести тела давления.



Давление жидкости на криволинейную внутреннюю стенку трубы

- Рассмотрим давление жидкости на криволинейную внутреннюю стенку трубы (рис.), где
  - H – напор, под которым в трубе находится жидкость с заданной величиной ρg,
  - d – диаметр,
  - δ - толщина стенки,
  - L – длина труб,
  - P_x – горизонтальная составляющая силы давления жидкости внутри трубы.
- Величина P_x рассчитывается по формуле



- $P_x = \rho g H L d.$

- Обозначим гидростатическое давление
- $P=\rho g H,$ тогда P_x рассчитывается по формуле

- $P_x = P L d.$

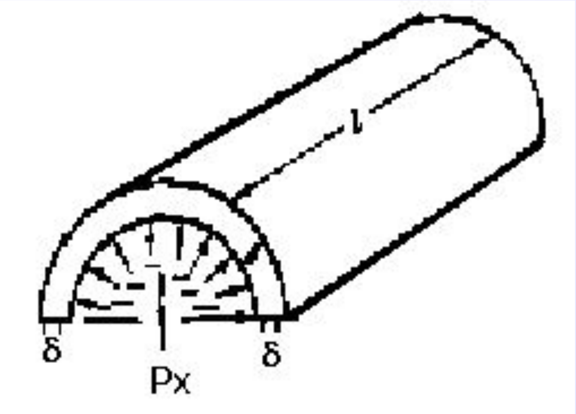
- Разрывающей силе давления жидкости противодействует сила сопротивления материала стенки *M*:

  - $M = 2\sigma_p \delta L,$
  - где σ_p – напряжение материала на разрыв,
  - δ – толщина стенки,
  - L – длина трубы,
  - 2 – сила сопротивления действует с двух сторон.
- При условии, что система находится в равновесии, приравняем силы давления жидкости и сопротивления материала стенки $P_x = M$ получим:

$$P\,Ld = 2\sigma_p\,\delta L$$

$$Pd = 2\sigma_p\,\delta,$$

$$P = 2\sigma_p\,\delta/d.$$



- Уравнение позволяет рассчитать толщину стенку трубопровода и напряжение на разрыв, по которому можно подобрать материал трубопровода.

- Если жидкость находится в закрытом сосуде, передвигающемся по вертикали с ускорением *a,* то проекции ускорений массовых сил в этом случае будут равны: $X=0$, $Y=0$, $Z=a-g$, а **уравнение *поверхности жидкости равного давления*** будет иметь вид

- $$dp=\rho\,(a-g)dz,$$

- интегрируя его получим:

- $$p=\rho\,(a-g)Z+C,$$

- из условия $Z=0$, $p=p_0=C$, с учетом погружения точки на глубину
- $h=-z$ получим:

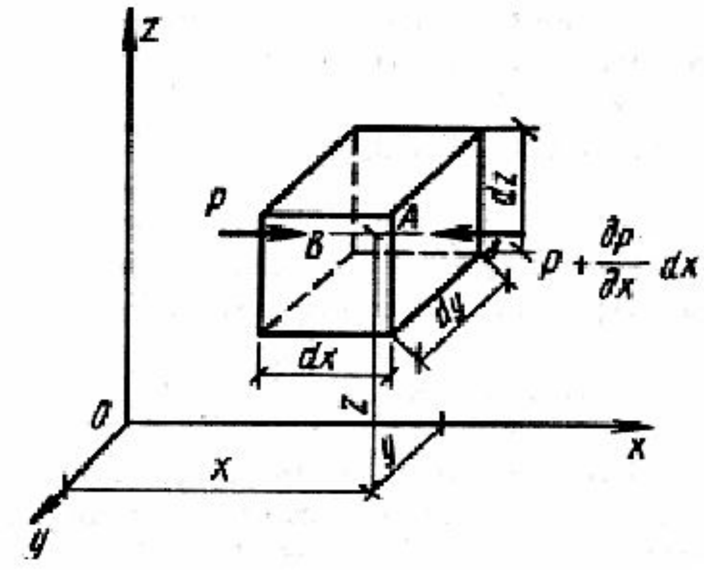
- $$p=p_0+\rho\,(g-a)h.$$

- При движении сосуда с жидкостью вниз с ускорением или вверх с замедлением ускорения силы инерции будет уменьшать действие ускорения свободного падения g и давление в жидкости будет меньше, чем в сосуде с жидкостью находящемся в состоянии покоя.
- При $a=g$ жидкость станет невесомой, т.е. во всех точках жидкости $p=p_0$.

Дифференциальные уравнения равновесия жидкости (уравнения Эйлера)

- Предположим, что гидростатическое давление в точке *A* с координатами *x, y, z* будет *p*. Тогда гидростатическое давление (p_1) в точке В, лежащей на линии А–В на расстоянии *dx* вправо от точки *A,* изменится на *dp* и будет равно:

$$p_1 = f(x+dx, y, z) = f(x,y,z) + \frac{df(x,y,z)}{\partial x}dx = p + \frac{\partial p}{\partial x}dx$$



- Тогда поверхностная сила давления на левую грань параллелепипеда равна гидростатическому давлению в одной из точек этой грани (в данном случае в точке А), умноженному на площадь грани:

$$P = pdydz,$$

- и на правую грань

- $$P_1 = -\left(p + \frac{\partial p}{\partial x}dx\right) dydz.$$

- Объемной или массовой силой называется сила, приложенная к массе жидкости в объеме параллелепипеда т.е. сила тяжести
  - $G = mg.$
- При постоянной плотности масса жидкости выделенного объема равна $m = \rho dxdydz.$
- Проекцией объемных сил на ось ОХ будет величина – $\rho dxdydzX.$
- Суммируя проекции всех действующих на параллелепипед сил на ось *X* и приравнивая эту сумму к 0, получим:
  - $pdydz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}dx\right) dydz + \rho dxdydzX = 0,$

- откуда
- $$X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0.$$
- По аналогии с этим можно получить подобные уравнения для осей *У* и *Z*:

$$У - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

$$Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = 0.$$

Поверхности равного давления

- Для нахождения величины давления p по его трем частным производным по координатам умножим уравнения Эйлера соответственно на dx, dy, dz и сложим:

$$\frac{\partial p}{\partial x}dx+\frac{\partial p}{\partial y}dy+\frac{\partial p}{\partial z}dz=\rho(Xdx+Ydy+Zdz)$$

- Левая часть полученного уравнения представляет собой полный дифференциал dp, так как гидростатическое давление – это лишь функция координат x, y, z, т. е.
  - ***$dp=\rho(Xdx+Ydy+Zdz)$.***
- ***- основное уравнение гидростатического давления в дифференциальной форме.***
- В правой части уравнения выражение в скобках также полный дифференциал некоторой потенциальной функции $\Pi=\Pi(x, y, z)$, частные производные которой по координатам x, y, z соответственно равны проекциям единичных массовых сил X, Y, Z. Уравнение можно переписать в следующем виде:
- $$dp=\rho\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}dx+\frac{\partial \Pi}{\partial y}dy+\frac{\partial \Pi}{\partial z}dz\right)$$
- $$dp=\rho d\Pi$$,
- или
- Интегрируя уравнение получим:

$$p=\rho\Pi+C$$

- где C – произвольная постоянная интегрирования.
- Для поверхности равного давления из уравнения ***$dp=\rho(Xdx+Ydy+Zdz)$.*** при $p=const$,
- $\rho \neq 0$ найдем $dp = 0$ и тогда
  - ***$Xdx+Ydy+Zdz=0$.***
- Это уравнение называется ***уравнением поверхности жидкости равного или постоянного давления***.
- При неравномерном или непрямолинейном движении на частицы жидкости кроме силы тяжести действуют еще и силы инерции, причем если они постоянны по времени, то жидкость принимает новое положение равновесия. Такое равновесие жидкости называется *относительным покоем*.

- **Первый случай**, когда на покоящуюся жидкость действует внешняя сила, сила тяжести, тогда *Х = 0, У = 0, Z = –g* . В этом случае **уравнение *поверхности жидкости равного давления*** имеет вид
- $-gdz = 0$ или $Z = C = const,$
- т.е. получаем поверхности равного давления, представляющие собой семейство горизонтальных плоскостей, во всех точках которой давление одинаково.
- Основное уравнение гидростатического давления в дифференциальной форме для жидкости, находящейся под действием силы тяжести, запишется таким образом:
- $dp = -\rho g dz,$ т.е.

$$\frac{dp}{\rho g} + dz = 0$$

- интегрируя которое получим
- .

$$\frac{\eth}{\rho g} + z = C = const$$

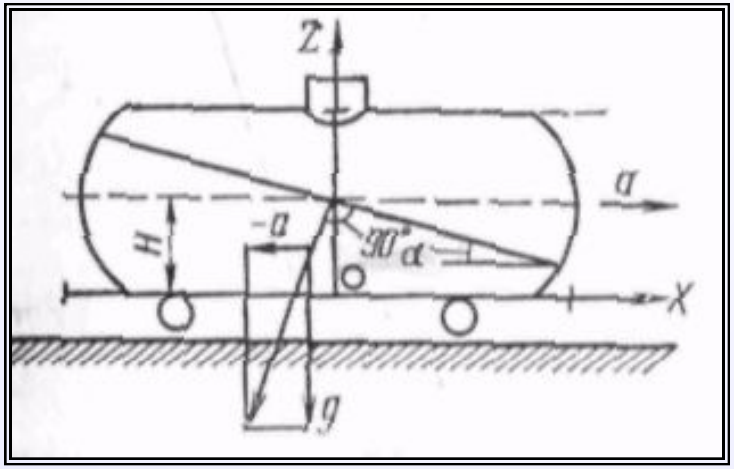
- Для двух точек одного и того же объема покоящейся жидкости уравнение можно представить в виде:

$$\boxed{z_1 + \frac{p_1}{\rho g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g}}$$

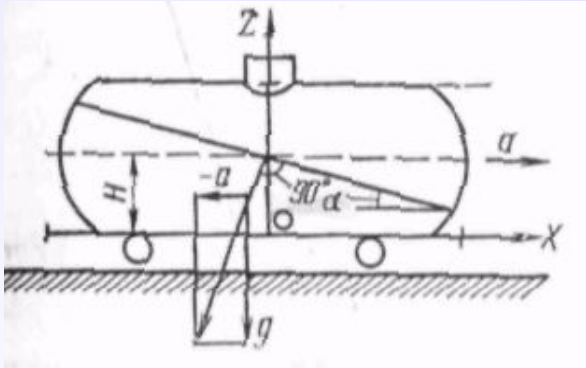
- Это выражение называется ***основным уравнением гидростатики.***

- Если жидкость находится в закрытом сосуде, передвигающемся по вертикали с ускорением *a,* то проекции ускорений массовых сил в этом случае будут равны: $X=0$, $Y=0$, $Z=a-g$, а **уравнение *поверхности жидкости равного давления*** будет иметь вид
    - $dp=\rho\,(a-g)dz,$
- интегрируя его получим:
    - $p=\rho\,(a-g)Z+C,$
- из условия $Z=0$, $p=p_0=C$, с учетом погружения точки на глубину
- $h=-z$ получим:
    - $p=p_0+\rho\,(g-a)h.$
- При движении сосуда с жидкостью вниз с ускорением или вверх с замедлением ускорения силы инерции будет уменьшать действие ускорения свободного падения g и давление в жидкости будет меньше, чем в сосуде с жидкостью находящемся в состоянии покоя.
- При $a=g$ жидкость станет невесомой, т.е. во всех точках жидкости $p=p_0$.

- **Второй случай,** когда поверхность равного давления может быть наклонной.
- *Например,* свободная поверхность бензина в железнодорожной цистерне, движущейся горизонтально с ускорением a. К каждой частице жидкости массы m должны быть в этом случае приложены ее вес $G = mg$ и сила инерции, равная по величине ma. Равнодействующая этих сил направлена к вертикали под углом α.
- В этом случае единичная масса жидкости находится под действием силы тяжести $Z=–g$ и горизонтального ускорения силы инерции $X = –1 \cdot a$ (к цистерне приложена сила с ускорением (a), а к жидкости – такая же по величине сила инерции с ускорением ($– a$).



- Составляющие массовых сил в уравнении получают значения:
- $X = -a;$
- $Y = 0;$
- $Z = -g,$
- тогда уравнение свободной поверхности примет вид:
- $-adx - gdz = 0$ или
- После интегрирования уравнения получим
- $-ax - gz = C.$
- При $x = 0$; $z = H$; $C = -gH,$ тогда



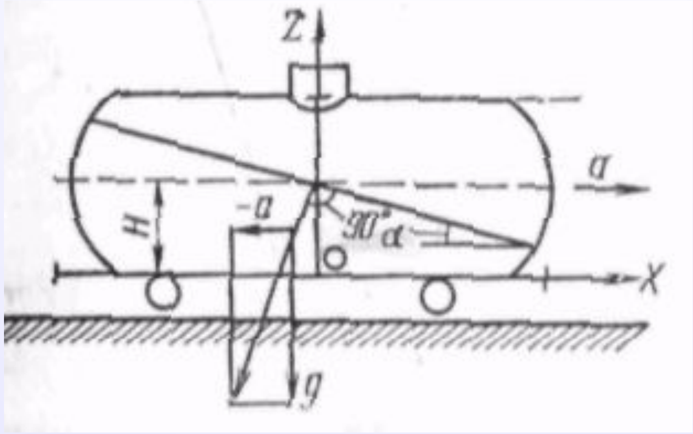
$$Z = H - \frac{a}{g}x.$$

- Из вышеизложенного следует, что свободная поверхность бензина в цистерне представляет собой плоскость с углом наклона

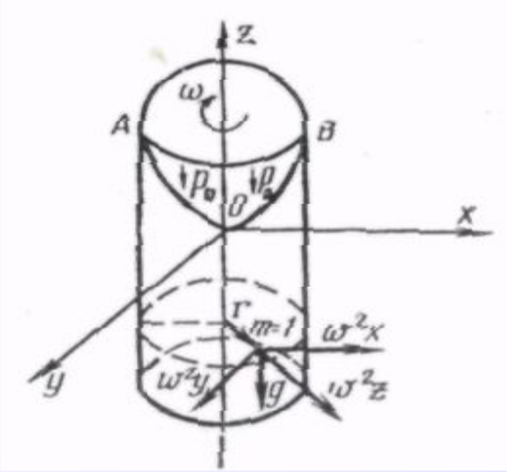
$$\alpha = arctg\left(-\frac{a}{g}\right).$$

- Так как свободная поверхность, как поверхность равного давления, должна быть нормальна к указанной равнодействующей, то она в данном случае представит собой уже не горизонтальную плоскость, а наклонную, составляющую угол α с горизонтом. Учитывая, что величина этого угла зависит только от ускорений, приходим к выводу, что положение свободной поверхности не <u>будет зависеть от рода находящейся в цистерне жидкости.</u> Любая другая поверхность уровня в жидкости также будет плоскостью, наклоненной к горизонту под углом α. Если бы движение цистерны было не равноускоренным, а равнозамедленным, направление ускорения изменилось бы на обратное, и наклон свободной поверхности обратился бы в другую сторону.

- Основное уравнение гидростатики в этом случае примет вид
  - $dp = -\rho\,(adx + gdz).$
- После интегрирования получим зависимость распределения давления в любой точке цистерны с бензином:
- $p = -\rho ax - \rho gz + C$
- При $x=0;\ z = 0,\ C = p_0 = \rho gH$ и тогда
- $p = \rho gH - \rho ax - \rho gz = \rho[g(H-z) - ax].$
- Из выражения следует, что наибольшее давление будет в точке $z = 0$ и максимальным отрицательным значением x.



- **Третий случай**, когда жидкость находится в открытом цилиндрическом сосуде, вращающемся вокруг его вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω. В этом случае на частицу жидкости массой $m=1$ действуют сила тяжести $G= -1g$, параллельная оси Z, и перпендикулярная к оси Z центробежная сила (рис.)
- $F=1 \cdot \omega^2/r = \omega^2 r.$
- Определим проекции составляющих равнодействующей массовых сил X, $У$, Z на оси x, y, z:
- $X= \omega^2 r \cos(r \wedge x)= \omega^2 r\, x/r= \omega^2 x;$
- $Y= \omega^2 r \cos(r \wedge y)= \omega^2 r\, y/r= \omega^2 y;$
- $Z= -g.$
- Подставляем эти величины в **уравнение *поверхности жидкости равного давления***, получим
- $dp=\rho\ (\omega^2 x dx+ \omega^2 y dy-gdz)$. Интегрируя это выражение, будем иметь
- $p=\rho \left(\frac{\omega^2 x^2}{2}+\frac{\omega^2 \acute{o}^2}{2}-gz\right)+C$ или $p=\rho\ (\frac{\omega^2 r^2}{2}-gz)+C$
- так как $r^2=x^2+y^2$.



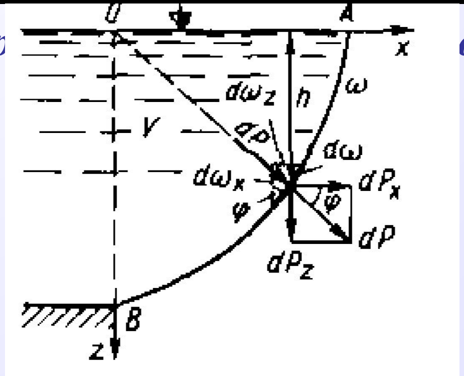
- При $x=y=z=0$, $p=0$ и $C=0$
- $p=\rho\left(\dfrac{\omega^2 r^2}{2}-gz\right)$
- Из уравнения видно, что при вращении сосуда наибольшее давление будет в точках у дна и на боковых стенках сосуда.
- Уравнение свободной поверхности можно получить при p=0 из выражения
- $p=\rho\left(\dfrac{\omega^2 r^2}{2}-gz\right)$ при $\rho \neq 0$

$$z=\frac{\omega^2 r^2}{2g}.$$

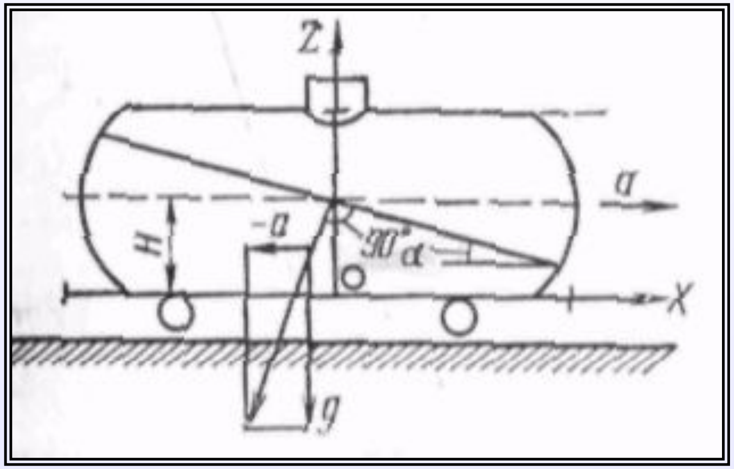
- Разложим силу давления dP на две составляющие: горизонтальную dP_x и вертикальную dP_z. Направим ось OY параллельно образующей (рис.).
- *Значение силы давления на цилиндрическую поверхность в данном случае определяется по формуле:*
- $P = \sqrt{P_x^2 + P_z^2}$,
- *где* P_x *и* P_z – горизонтальная и вертикальная составляющие силы давления.

- Выделив на цилиндрической поверхности элементарную площадку dw, на которую действует направленная по нормали элементарная сила
- $dP = \gamma dw$, найдем ***горизонтальную*** $\boldsymbol{dP_x}$ ***и вертикальную*** $\boldsymbol{dP_z}$***, составляющие силы dP;***
  - $dP_x = dP \cos\varphi = \gamma\, hdw \cos\varphi$;
  - $dP_z = dP \sin\varphi = \gamma\, hdw \sin\varphi$.
- *Учитывая, что* $dw\cos\varphi = dw_x$ *и* $dw \sin\varphi = dw_z$ *имеем*
  - $dP_x = \gamma h\, dw_x$
  - $dP_z = \gamma h\, dw_z$,
- *где* dw_x *– проекция элементарной площадки* dw *<u>на плоскость, перпендикулярную оси O-X;</u>*
- dw_z *– проекция элементарной площадки* dw *<u>на плоскость, перпендикулярную оси O - Z.</u>*
- *Проинтегрировав формулу* $\boldsymbol{dP_x = \gamma h\, dw_x}$ *, получим* ***для гор*** ***ощей силы***

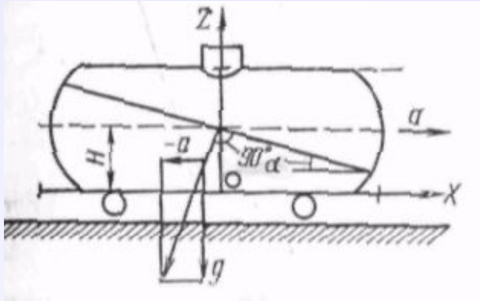
$$\int dP_x = \int_\omega \gamma h dw_x = \gamma \int_\omega h dw_x$$



- **Второй случай,** когда поверхность равного давления может быть наклонной.
- ***Например,*** свободная поверхность бензина в железнодорожной цистерне, движущейся горизонтально с ускорением *a*. К каждой частице жидкости массы *m* должны быть в этом случае приложены ее вес $G = mg$ и сила инерции, равная по величине *ma*. Равнодействующая этих сил направлена к вертикали под углом α.
- В этом случае единичная масса жидкости находится под действием силы тяжести $Z = -g$ и горизонтального ускорения силы инерции $X = -1 \cdot a$ (к цистерне приложена сила с ускорением (*a*), а к жидкости – такая же по величине сила инерции с ускорением (– *a*).



- Составляющие массовых сил в уравнении получают значения:
- $X = -a;$
- $Y = 0;$
- $Z = -g,$
- тогда уравнение свободной поверхности примет вид:
- $-adx - gdz = 0$ или
- После интегрирования уравнения получим
- $-ax - gz = C.$
- При $x = 0$; $z = H$; $C = -gH$, тогда

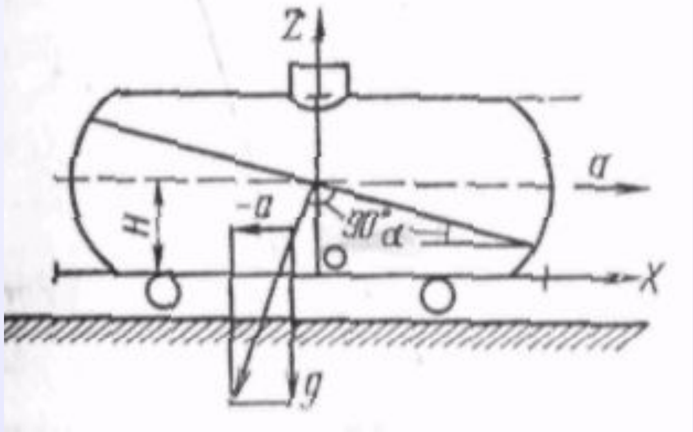


$$Z = H - \frac{a}{g}x.$$

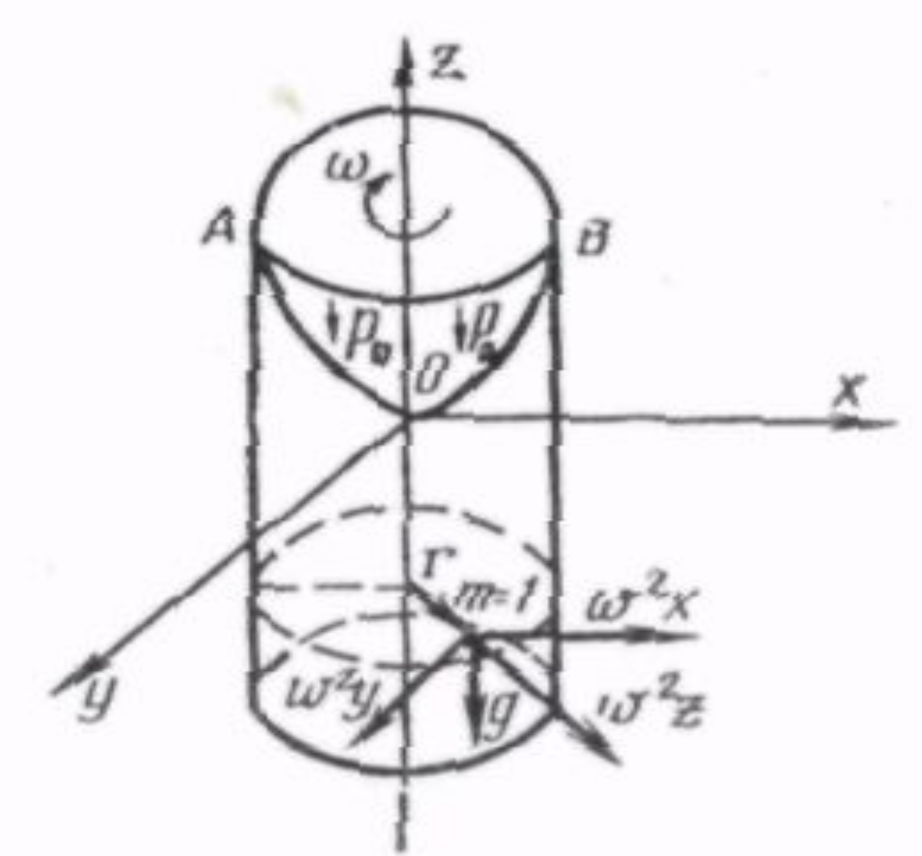
- Из вышеизложенного следует, что свободная поверхность бензина в цистерне представляет собой плоскость с углом наклона $\alpha = arctg\left(-\frac{a}{g}\right).$

- Так как свободная поверхность, как поверхность равного давления, должна быть нормальна к указанной равнодействующей, то она в данном случае представит собой уже не горизонтальную плоскость, а наклонную, составляющую угол α с горизонтом. Учитывая, что величина этого угла зависит только от ускорений, приходим к выводу, что положение свободной поверхности не будет зависеть от рода находящейся в цистерне жидкости. Любая другая поверхность уровня в жидкости также будет плоскостью, наклоненной к горизонту под углом α. Если бы движение цистерны было не равноускоренным, а равнозамедленным, направление ускорения изменилось бы на обратное, и наклон свободной поверхности обратился бы в другую сторону.

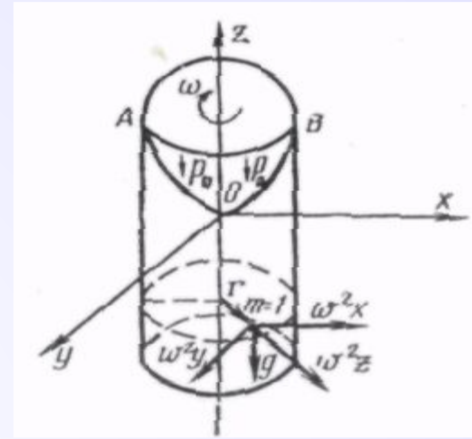
- Основное уравнение гидростатики в этом случае примет вид
- $dp = -\rho\ (adx+gdz).$
- После интегрирования получим зависимость распределения давления в любой точке цистерны с бензином:
- $p = -\rho ax - \rho gz + C$
- При $x=0;\ z = 0,\ C = p_0 = \rho\ gH$ и тогда
- $p = \rho\ gH - \rho\ ax - \rho gz = \rho[g\ (H-z) - ax].$
- Из выражения следует, что наибольшее давление будет в точке $z = 0$ и максимальным отрицательным значением x.



- **Третий случай**, когда жидкость находится в открытом цилиндрическом сосуде, вращающемся вокруг его вертикальной оси с постоянной угловой скоростью *ω*.
- В этом случае на частицу жидкости массой *m=1* действуют сила тяжести *G= –1g*, параллельная оси *Z*, и перпендикулярная к оси *Z* центробежная сила (рис.)
- $F=1 \cdot \omega^2/r = \omega^2 r$.



- Определим проекции составляющих равнодействующей массовых сил *X, У, Z* на оси *x, y, z:*



- $X= \omega^2 r \cos(r\,\hat{}\,x)= \omega^2 r\, x/r= \omega^2 x;$
- $Y= \omega^2 r \cos(r\,\hat{}\,y)= \omega^2 r\, y/r= \omega^2 y;$
- $Z= -g.$
- Подставляем эти величины *в* ***уравнение поверхности жидкости равного давления***, получим
- $dp=\rho\ (\omega^2 xdx+ \omega^2 ydy-gdz).$ Интегрируя это выражение, будем иметь
- $p=\rho\left(\frac{\omega^2x^2}{2}+\frac{\omega^2\acute{o}^2}{2}-gz\right)+C$ или $p=\rho\ (\frac{\omega^2r^2}{2}-gz)+C$
- так как $r^2=x^2+y^2$.

- При $x=y=z=0$, $p=0$ и $C=0$

- $p=\rho\left(\dfrac{\omega^2 r^2}{2}-gz\right)$

- Из уравнения видно, что при вращении сосуда наибольшее давление будет в точках у дна и на боковых стенках сосуда.
- Уравнение свободной поверхности можно получить при p=0 из выражения $p=\rho\left(\dfrac{\omega^2 r^2}{2}-gz\right)$

- *при* $\rho\neq 0$

$$z=\frac{\omega^2 r^2}{2g}.$$

Закон Архимеда

Существование гидростатического давления приводит к тому, что на любое тело, находящееся в жидкости или газе, действует выталкивающая сила. Впервые значение этой силы в жидкостях определил на опыте Архимед. Закон Архимеда формулируется так: на тело, погруженное в жидкость или газ, действует выталкивающая сила, равная весу того количества жидкости или газа, которое вытеснено погруженной частью тела.

Сила Архимеда, действующая на погруженное в жидкость тело, может быть рассчитана по формуле:

$$F_{\text{А}} = \rho_{\text{ж}} g V_{\text{пт}},$$

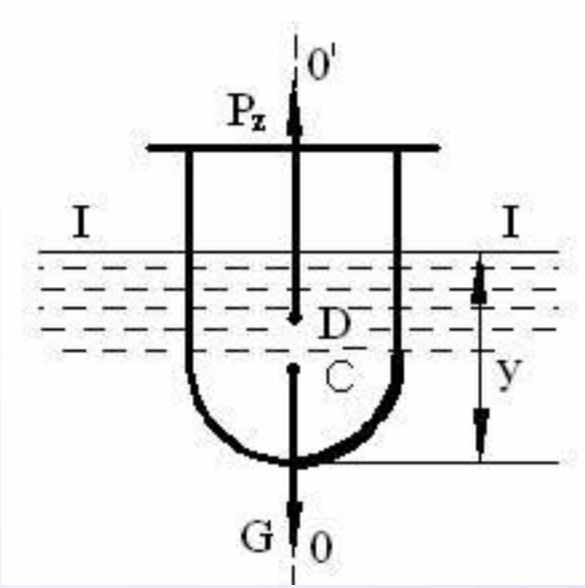
где ρж – плотность жидкости, Vпт – объем погруженной в жидкость части тела.

Поведение тела, находящегося в жидкости или газе, зависит от соотношения между модулями силы тяжести Fт и архимедовой силы FA, которые действуют на это тело. Возможны следующие три случая:

1) Fт > FA – тело тонет;
2) Fт = FA – тело плавает в жидкости или газе;
3) Fт < FA – тело всплывает до тех пор, пока не начнет плавать, выступая частично над поверхностью жидкости (данное утверждение верно только для жидкости).

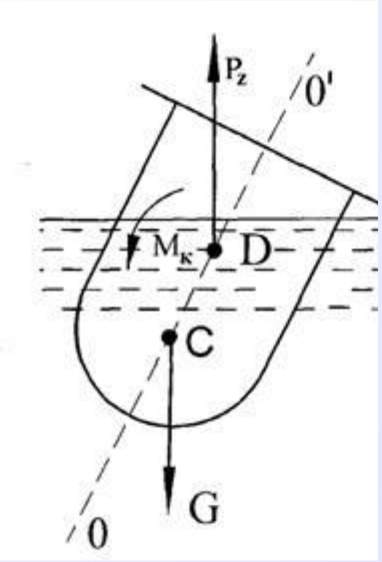
К основным понятиям теории плавания относятся следующие:

- *плоскость плавания* (I-I) - пересекающая тело плоскость свободной поверхности жидкости;
- *ватерлиния* – линия пересечения поверхности тела и плоскости плавания;
- *осадка (y)* – глубина погружения низшей точки тела. Наибольшая допустимая осадка судна отмечается на нём красной ватерлинией;
- *водоизмещение* – вес воды, вытесненный судном. Водоизмещение судна при полной нагрузке является его основной технической характеристикой;
- центр водоизмещения (точ. D, рис.) – центр тяжести водоизмещения, через который проходит линия действия выталкивающей архимедовой силы;
- ось плавания (O O') – линия проходящая через центр тяжести C и центр водоизмещения D при равновесии тела.



Для сохранения равновесия ось плавления должна быть вертикальна. Если на плавающее судно в поперечном направлении действует внешняя сила, например сила давления ветра, то судно накренится, ось плавания повернётся относительно точки С и возникнет крутящий момент $М_{к,}$ вращающий судно относительно продольной оси против часовой стрелки. После прекращения действия внешней силы судно может вернуться в исходное положение, или опрокинуться в зависимости от его остойчивости.

Остойчивость - способность плавающего тела, выведенного из равновесия, возвращаться в исходное положение после прекращения действия сил вызвавших крен.



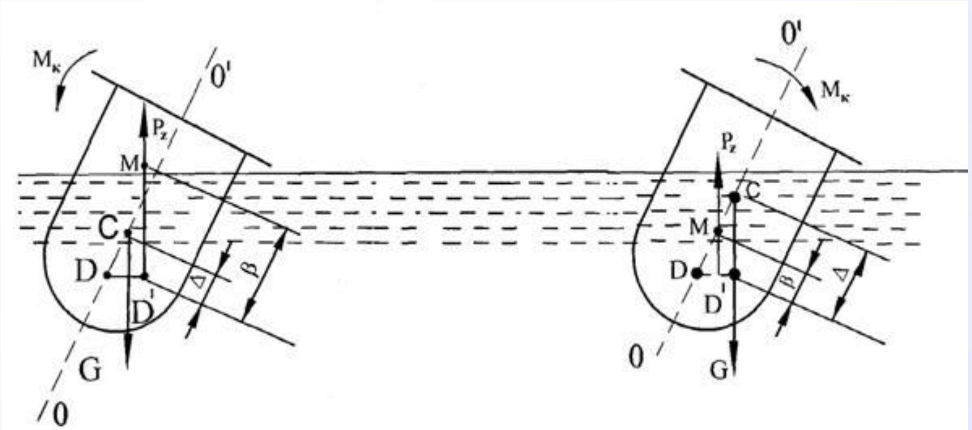
Остойчивость плавающего тела зависит от взаимного положения точек С и D. Если центр тяжести С находится ниже центра водоизмещения D, то при надводном плавании тело всегда остойчиво, так как возникающий при крене крутящий момент $М_к$ всегда направлен в сторону противоположную крену. Если точка С находится выше точки D (рис.), то плавающее тело может быть остойчивым и неостойчивым.

b - *метацентрический радиус*;

Δ- *эксцентриситет*.

Условие остойчивости: тело остойчиво, если его метацентрический радиус больше эксцентриситета, т.е. $b > \Delta$.

В случае а) $b > \Delta$ и возникший крутящий момент направлен в сторону противоположную крену, а в случае б) имеем: $b < \Delta$ и момент $M_к$ вращает тело в сторону крена, т.е. тело не остойчиво.



а) б)