Последовательности.

1.Арифметическая прогрессия.

2.Геометрическая прогрессия.

Составила преподаватель Мещенко Н.В., *2007-2008*уч. год

(x_n)

Определение:

Числа, выписанные в определенном порядке, называются последовательностью чисел.

Обозначим её (x_n): $x_1; x_2; x_3; \ldots, x_n$

где $x_1; x_2; x_3$ - члены последовательности .

Например:

1) Выпишем в порядке возрастания положительные четные числа.

Это последовательность: $2;4;6;8;$ … .

Очевидно, что на пятом месте будет число 10, т.е $x_5 = 10$; а на десятом – число 20, т.е. $x_{10} = 20$.

В последовательности будет содержаться бесконечное число членов.

2) Рассмотрим последовательность двузначных чисел

(a_n): $10; 11; 12; …; 98; 99$ - является конечной.

$a_{17} = 26$, $a_{25} = 34$.

Чтобы задать последовательность, нужно указать способ, позволяющий найти член последовательности с любым номером.

Способы задания числовых **последовательностей**

- рекуррентная формула
- формула n-го члена последовательности
- описанием ее членов

I. Часто последовательность задается при помощи *__рекуррентной формулы__*, позволяющей определить каждый член последовательности по одному или нескольким предыдущим; при этом необходимо задание одного или нескольких первых членов последовательности.

Например: Пусть первый член последовательности (a_n) равен 3, а каждый следующий член равен квадрату предыдущего, т.е. $a_1=3$, $a_{n+1}=a_n^2$.

Имеем, $a_2=9$, $a_3=81$, $a_4=6561$, …

Формулу, выражающую любой член последовательности, начиная с некоторого, через предыдущие называют ***рекуррентной***

II. Последовательность может быть задана при помощи <u>*формулы n-го члена последовательности*</u>.

- Например, $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$

$$x_1 = \frac{(-1)^1}{1} = -1, \qquad x_2 = \frac{(-1)^2}{2} = \frac{1}{2},$$

$$x_3 = -\frac{1}{3}, \qquad x_4 = \frac{1}{4}, \quad и\ т.д.$$

III. Иногда последовательность задается <u>***описанием ее членов***</u>,

- Например,

последовательность, у которой x_n равен n-му

знаку после запятой в десятичной записи числа

π = *3,14159265358979323...*, задается

следующим образом:

$X_1 = 1,\ X_2 = 4,\ X_3 = 1,\ X_4 = 5,\ X_5 = 9,\ X_6 = 2,\ X_7 = 6,$

$X_8 = 5,\ X_9 = 3,\ X_{10} = 5$ и т. д.

Виды последовательностей.

- Конечная
- Бесконечная
- Возрастающей
- Убывающей

Последовательность (x_n) называется *возрастающей,* если для любого $n \in N$ выполняется неравенство $x_{n+1} > x_n$.

Последовательность (x_n) называется убывающей, если для любого $n \in N$ выполняется неравенство $x_{n+1} < x_n$.

Если в этих определениях неравенство будет нестрогим, то последовательности будут называться соответственно *неубывающей* и *невозрастающей*.

Возрастающие и убывающие последовательности называют *строго монотонными*.

Неубывающие и невозрастающие последовательности называют *монотонными*

Контроль знаний 15

1. Определение числовой последовательности

2. Что значит, следующий и предыдущий члены последовательности?

3. Что значит, n - ый член последовательности?

4. Какие способы задания последовательности ?

5. Что значит, аналитический способ задания?

6. Что значит, рекуррентный способ задания?

563. Какой член последовательности $a_1, a_2, a_3, \ldots$:

а) следует за членом $a_{99}, a_{200}, a_n, a_{n-1}, a_{n+1}, a_{2n}$;

б) предшествует члену $a_{71}, a_{100}, a_{n-2}, a_{n+3}, a_{3n}$?

564. Перечислите члены последовательности (x_n), которые расположены между:

а) x_{31} и x_{35}; б) x_n и x_{n+6}; в) x_{n-4} и x_n; г) x_{n-2} и x_{n+2}.

561. Известно, что (c_n) — последовательность, все члены которой с нечетными номерами равны -1, а с четными равны 0. Выпишите первые восемь членов этой последовательности. Найдите c_{10}, c_{25}, c_{200}, c_{253}, c_{2k}, c_{2k+1} (k — произвольное натуральное число).

562. Пусть (a_n) — последовательность квадратов натуральных чисел. Выпишите первые десять ее членов. Найдите a_{20}, a_{40}, a_n.

Арифметическая прогрессия.

- Определение:

Числовую последовательность (a_n), каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом d, называют ***арифметической прогрессией.***

$a_{n+1} = a_n + d$ (рекуррентная формула арифметической прогрессии).

Число d называется разностью арифметической прогрессии:

$$d = a_{n+1} - a_n$$

Арифметическая прогрессия

- Так как $a_{n-1} = a_n - \mathbf{d}$ и $a_{n+1} = a_n + \mathbf{d}$,

  то $a_{n+1} + a_{n-1} = 2a_n$

  (характеристическое свойство арифметической прогрессии)

Верно и обратное.

- Последовательность является арифметической тогда и только тогда, когда для любого $n > 1$ выполняется рекуррентное соотношение $a_n = \dfrac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}$

- Формула n-го члена арифметической прогрессии (a_n) такова: $a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$

Арифметическая прогрессия

Пример 1.

Дано: (c_n) – арифметическая прогрессия, $c_1=0,62$, $d=0,24$. Найти: c_{50}

Решение: Так как $c_n = c_1 + (n-1)\cdot d$, то

$$c_{50} = c_1 + (50-1)\cdot d,\ c_{50} = 0,62 + 0,24\cdot 49 = 12,38.$$

Ответ: $c_{50}=12,38.$

Пример 2.

Дано: (c_n) – арифметическая прогрессия, $c_1=10$, $c_5=22$.

Найти: d, составить формулу n-го члена.

Решение: Так как $c_n = c_1 + (n-1)\cdot d$,

то $c_5=10+d(5-1)$, имеем $22=10+4d$, то $d=3$

Имеем

$$c_n = 10+3(n-1),\ c_n = 7+3n.$$

Ответ: $d=3$, $c_n = 7+3n$

Пример 3.

Найдите первый член и разность арифметической прогрессии (c_n), если $c_{16} = -7$, $c_{26} = 55$.

Решение: Так как $c_n = c_1 + (n-1)\cdot d$,

то $c_{16} = c_1 + d(16-1)$, т.е. $-7 = c_1 + 15d$.

$c_{26} = c_1 + d(26-1)$, т.е. $55 = c_1 + 25d$

Составим и решим систему уравнений

$$\begin{cases} c_1 + 15d = -7, \\ c_1 + 25d = 55. \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 + 15d = -7, \\ 10d = 62. \end{cases} \begin{cases} c_1 = -100, \\ d = 6{,}2. \end{cases} \quad Ответ: c_1 = -100, d = 6.$$

Арифметическая прогрессия

Пример 4.

Дано: (a_n) - арифметическая прогрессия: 23; 17,2; 11,4; 5,6; …

Определить, принадлежит ли число -122 этой последовательности?

$$d = a_{n+1} - a_n$$

Решение: Так как $a_1 = 23$, $a_2 = 17,2$ и

то $d = a_2 - a_1 = 17,2 - 23 = -5,8$

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$, то

$$a_n = 23 - 5,8(n-1),\ a_n = 28,8 - 5,8n$$

Число -122 будет являться членом этой прогрессии, если существует

такое натуральное число n, при котором значение выражения $28,8 - 5,8n$ равно -122. Решим уравнение

$$28,8 - 5,8n = -122,$$

$$5,8n = 150,8,$$

$$n = 26.$$

Значит, число -122 является 26 –м членом данной прогрессии

Ответ: a_{26} =

Пример 5.

Между числами 5 и 1 вставьте семь таких чисел, чтобы они вместе с данными числами образовали арифметическую прогрессию.

Дано: (a_n) - арифметическая прогрессия:

$5; a_2; a_3; a_4; a_5; a_6; a_7; a_8; 1.$

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$$

Решение: Заметим, что $a_1 = 5$, $a_9 = 1$,

По определению арифметической прогрессии $a_{n+1} = a_n + d$,

то $a_9 = 5 + 8d$, т.е. $1 = 5 + 8d$, то $d = -0,5$

$a_2 = 4,5$; $a_3 = 4,0$; $a_4 = 3,5$; $a_5 = 3,0$; $a_6 = 2,5$; $a_7 = 2,0$; $a_8 = 1,5$.

Ответ: $4,5; 4; 3,5; 3; 2,5; 2; 1,5$.

Формула суммы n первых членов арифметической прогрессии.

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \quad или \quad S_n = \frac{2 \cdot a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$$

Пример 6. Арифметическая прогрессия (a_n) задана формулой **а** $_n = 3n+2$.

Найдите сумму двадцати первых её членов.

Решение: Так как **а** $_n = 3n+2$, то **а** $_1 = 5$, **а** $_2 = 8$, то $d = 3$,

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1) \cdot d}{2} \cdot n, \quad S_{20} = \frac{2 \cdot 5 + 19 \cdot 3}{2} \cdot 20 = 670.$$

Ответ: 670

Формула суммы n первых членов арифметической прогрессии.

Пример 4.

Найдите сумму натуральных чисел от 20 до 120 включительно.

Решение: 1 способ: (b_n): 1, 2, …,19, 20, …, 119, 120.

$b_1 = 1$, $b_2 = 2$, $b_{120} = 120$, $d = 1$,

$$S_{с\,20\,по\,120} = S_{120} - S_{19}.$$

$$S_{120} = \frac{2\cdot 1 + 119\cdot 1}{2}\cdot 120 = 7260. \qquad S_{19} = \frac{2\cdot 1 + 18}{2}\cdot 19 = 190.$$

$$S_{с\,20\,по\,120} = 7260 - 190 = 7070.$$

Ответ: 7070

Формула суммы n первых членов арифметической прогрессии.

2способ:

(**b** $_n$): 20; 21;…;120, т.е. **b** $_1$ = 20, **b** $_2$ = 21, **b** $_{101}$ = 120, то ***d*** **=** 1,

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)\cdot d}{2}\cdot n, \qquad S_{101} = \frac{2\cdot 20 + 1\cdot(101-1)}{2}\cdot 101 = 7070.$$

Ответ: *7070*.

Пример *8*. Найдите сумму натуральных чисел, кратных *7* и не превосходящих *130*.

Решение: Числа, кратные *7*, задаются формулой

$b_n = 7n$, $b_1 = 7$, $b_2 = 14$, $d = 7$, так как $b_n \le 130$ и

$$7n \le 130,$$
$$n \le 18\frac{4}{7},$$

так как $n \in N$, то $n=18$.

Тогда $S_{18} = \frac{2\cdot 7 + 7\cdot(18-1)}{2}\cdot 18 = 1197.$

Ответ: *1197*.

Геометрическая прогрессия.

- **Определение:**

Числовую последовательность (b_n), первый член которой отличен от нуля, а каждый член, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же число $q \neq 0$, называют ***геометрической прогрессией.***

$$b_{n+1} = b_n \cdot q$$ (***рекуррентная формула геометрической прогрессии***).

Число q, которое называется ***знаменателем прогрессии***, отлично от нуля и $q = \frac{b_{n+1}}{b_n}$.

Геометрическая прогрессия.

- Так как $b_{n-1} = \frac{b_n}{q},\ b_{n+1} = b_n \cdot q,\ то\ b_{n+1} \cdot b_{n-1} = b_n^2$ характеристическое свойство геометрической прогрессии

Верна и обратная теорема

Последовательность (b_n) является геометрической тогда и только тогда, когда для любого $n > 1$, где $b_n \neq 0$

при всех n выполняется соотношение $b^2_n = b_{n+1} \cdot b_{n-1}$

Тем не менее, важно понимать, что формула $b_n = \sqrt{b_{n+1} \cdot b_{n-1}}$

справедлива только для геометрической прогрессии с положительными членами, а предыдущее соотношение верно для произвольной геометрической прогрессии.

Каждый член геометрической прогрессии (b_n) определяется формулой n-го члена последовательности $\boxed{b_n = b_1 \cdot q^{n-1}}$

Геометрическая прогрессия.

Сумма n первых членов геометрической прогрессии (b_n) равна

при $q \neq 1$

$$S_n = \frac{b_1\left(q^n - 1\right)}{q - 1}$$

и при $q = 1$ равна

$$S_n = n \cdot b_1.$$

При $|q| < 1$ геометрическая прогрессия называется ***бесконечно убывающей***.

Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии $(|q| < 1)$ равна

$$S = \frac{b_1}{1 - q}$$

Геометрическая прогрессия.

Пример 1. Дано: (c_n) – геометрическая прогрессия, $c_1=16$, $q=0,5$.

Найти: c_7.

Решение: Так как $c_n = c_1 \cdot q^{n-1}$, то

$$c_7 = c_1 \cdot q^6, \; c_7 = 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{4}.$$

Ответ: $c_7 = 0,25$.

Пример 2. Дано: (c_n) – геометрическая прогрессия, $c_5 = -6$, $c_7 = -54$.

Найти: q.

Решение: Так как $c_n = c_1 \cdot q^{n-1}$, то

$$c_5 = c_1 \cdot q^4, \; -6 = c_1 \cdot q^4; \quad c_7 = c_1 \cdot q^6, \; -54 = c_1 \cdot q^6$$

Геометрическая прогрессия.

Составим и решим систему уравнений

$$\begin{cases} c_1 \cdot q^4 = -6, \\ c_1 \cdot q^6 = -54; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 \cdot q^4 = -6, \\ (c_1 \cdot q^4) \cdot q^2 = -54; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 \cdot q^4 = -6, \\ -6 \cdot q^2 = -54; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = -\dfrac{6}{q^4}, \\ \left[\begin{array}{l} q = 3, \\ q = -3. \end{array}\right. \end{cases}$$

Существуют две геометрические прогрессии, у которой

с$_5$ $= -6$, с$_7$ $= -54$. Это геометрические прогрессии ,у

которых или $q=3$ или $q=-3$.

Ответ: $-3; 3$

Пример 3. Найдите сумму геометрической прогрессии: $12; -4; \frac{4}{3}; \ldots$

Решение:

Так как дана бесконечная геометрическая прогрессия, то $q = -\frac{1}{3}$, значит, $|q| < 1$

Тогда по формуле $S = \frac{b_1}{1-q}$ получим:

$$S = \frac{12}{1+\frac{1}{3}} = 9$$

Ответ: 9.

Пример 4.

Представьте в виде обыкновенной дроби число:

а) 0,(6); б) 0,(36); в) 1,(81); г) 0,2(3).

Решение: I способ

а) $0,(6) = 0,6666\ldots = 0,6 + 0,06 + 0,006 + 0,0006 + \ldots$.

Рассмотрим последовательность: $0,6;\ 0,06;\ 0,006;\ 0,0006;\ \ldots$.

Так как $0,06^2 = 0,6 \cdot 0,006$ то эта последовательность является бесконечной геометрической прогрессией, то $q = 0,1,$ *значит,* $|q| < 1$

Тогда сумма этой прогрессии:

$$S = \frac{0,6}{1 - 0,1} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

Ответ: $\frac{2}{3}$.

II способ

Пусть $x = 0,6666\ldots$. Период состоит из одной цифры

Умножим обе части равенства на *10*.

Получим $10x = 6,666\ldots$.

Вычтем из $10x = 6,666\ldots$

$x = 0,666\ldots,$

получим $9x = 6,000\ldots,$

$$x = \frac{6}{9}.$$

$$Ответ: \frac{2}{3}.$$

б) Пусть $x = 0,363636\ldots$. Период состоит из двух цифр

Умножим обе части равенства на 100.

Получим $100x = 36,363636\ldots$.

Вычтем из $100x = 36,363636\ldots$

$x = 0,363636\ldots,$

получим $99x = 36,00000\ldots,$

$$x = \frac{4}{11}. \quad Ответ: \frac{4}{11}.$$

в) Пусть $x = 1,818181\ldots$. Период состоит из двух цифр

Умножим обе части равенства на 100.

Получим $100x = 181,8181\ldots$.

Вычтем из $100x = 181,8181\ldots$

$x = 1,8181\ldots,$

получим $99x$

$$x = \frac{20}{11}. \quad Ответ: 1\frac{9}{11}.$$

г) $0,2(3)$.

Пусть $x = 0,\ 2333\ldots$. Период состоит из одной цифры

Умножим обе части равенства на 10.

Получим $10x = 2,333\ldots$.

Вычтем из $10x = 2,3333\ldots$

$x = 0,2333\ldots,$

получим $9x = 2,1000\ldots,$

$$x = \frac{2,1}{9}$$

$$x = \frac{21}{90}.$$

$$Ответ: \frac{7}{30}.$$

Домашнее задание.

- ЦТ-2006,Б4
- ЦТ-2007,Б6
- Никольский10,стр.307 №60(а, в, г), №106
- Повторить формулы нахождения производных