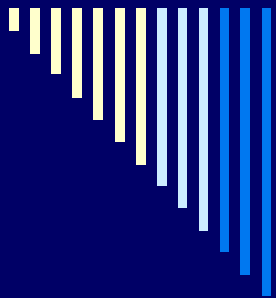



Последовательности.

1. Арифметическая прогрессия.
2. Геометрическая прогрессия.

Составила преподаватель Мещенко Н.В.,
2007-2008уч. год

(x_n)



Определение:

Числа, выписанные в определенном порядке, называются последовательностью чисел.

Обозначим её $x_1; x_2; x_3; \dots, x_n$

где $x_1; x_2; x_3$ - члены последовательности .



Наприме

1) Выпишем в порядке возрастания
положительные
четные числа.

Это последовательность: $2; 4; 6; 8; \dots$

Очевидно, что на пятом месте будет число 10 ,
т.е. $x_5 = 10$; а на десятом – число 20 , т.е. $x_{10} = 20$.

В последовательности будет содержаться

бесконечное
двузначных чисел.

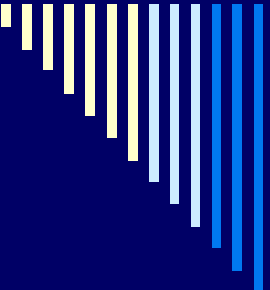
$(a_n): 10; 11; 12; \dots; 98; 99$ - является

конечной.

Чтобы задать последовательность, нужно указать

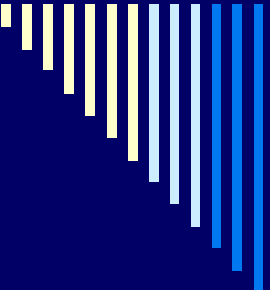
способ, позволяющий найти член

последовательности с любым номером.



Способы задания числовых последовательностей

- рекуррентная формула
 - формула n -го члена последовательности
 - описанием ее членов
-

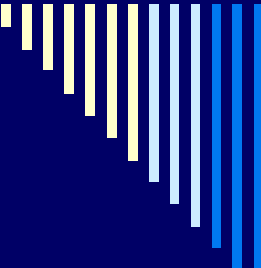


I. Часто последовательность задается при помощи рекуррентной формулы, позволяющей определить каждый член последовательности по одному или

нескольким предыдущим; при этом необходимо задать одно или несколько первых членов. Например, пусть первый член последовательности (a_1) равен 3, а каждый следующий член равен квадрату предыдущего, т.е. $a_1 = 3$, $a_{n+1} = a_n^2$.

Иногда, выражающую любой член последовательности, начиная с некоторого, через предыдущие называют

рекуррентной



II. Последовательность может быть задана при помощи формулы n -го члена последовательности.

□ Например, $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$

$$x_1 = \frac{(-1)^1}{1} = -1,$$

$$x_2 = \frac{(-1)^2}{2} = \frac{1}{2},$$

$$x_3 = -\frac{1}{3},$$

$$x_4 = \frac{1}{4}, \text{ и т.д.}$$



III. Иногда последовательность задается описанием ее членов,

- Например,
последовательность, у которой x_n
равен n -му
знаку после запятой в десятичной
записи числа

$\pi = 3,14159265358979323\dots$, задается
следующим образом:

$$X_1 = 1, X_2 = 4, X_3 = 1, X_4 = 5, X_5 = 9, X_6 = 2, X_7 = 6,$$

$$X_8 = 5, X_9 = 3, X_{10} = 5 \text{ и т. д.}$$

Виды

- Конечная
- Бесконечная
- Возрастающей
- Убывающей

Последовательность (x_n) называется возрастающей, если для

$$x_{n+1} > x_n$$

любого n выполняется неравенство

убывающей, если для

$$x_{n+1} < x_n$$

любого n выполняется неравенство. Если в этих определениях неравенство будет возрастание и убывание соответственно нестрогим, то последовательности будут называться

называют строго

соответственно

монотонными
неубывающими и невозрастающими.

Неубывающие и невозрастающие

последовательности

называют монотонными

Контроль знаний 15

1. Определение числовой последовательности

2. Что значит, следующий и предыдущий члены последовательности?

3. Что значит, n - ый член последовательности?

4. Какие способы задания последовательности ?

5. Что значит, аналитический способ задания?

6. Что значит, рекуррентный способ задания?

563. Какой член последовательности a_1, a_2, a_3, \dots :

а) следует за членом $a_{99}, a_{200}, a_n, a_{n-1}, a_{n+1}, a_{2n}$;

б) предшествует члену $a_{71}, a_{100}, a_{n-2}, a_{n+3}, a_{3n}$?

564. Перечислите члены последовательности (x_n) , которые расположены между:

а) x_{31} и x_{35} ;

б) x_n и x_{n+6} ;

в) x_{n-4} и x_n ;

г) x_{n-2} и x_{n+2} .

561. Известно, что (c_n) — последовательность, все члены которой с нечетными номерами равны -1 , а с четными равны 0 . Выпишите первые восемь членов этой последовательности. Найдите c_{10} , c_{25} , c_{200} , c_{253} , c_{2k} , c_{2k+1} (k — произвольное натуральное число).

562. Пусть (a_n) — последовательность квадратов натуральных чисел. Выпишите первые десять ее членов. Найдите a_{20} , a_{40} , a_n .



Арифметическая прогрессия.

□ Определение:

Числовую последовательность (a_n) , каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом d ,

называют **арифметической**
 $a_{n+1} = a_n + d$ (рекуррентная формула арифметической прогрессии).
прогрессией.

Число d называется разностью арифметической прогрессии:

$$d = a_{n+1} - a_n$$

Арифметическая прогрессия

□ Так как $a_{n-1} = a_n - d$ и $a_{n+1} = a_n + d$,

$$\text{то } a_{n+1} + a_{n-1} = 2a_n$$

(характеристическое свойство арифметической
прогрессии)

Верно и обратное.

□ Последовательность является арифметической тогда и только тогда, когда для любого $n > 1$ выполняется рекуррентное соотношение $a_n = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}$

□ Формула n -го члена арифметической прогрессии

(a_n) такова:
$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

Арифметическая прогрессия

□ Пример 1.

Дано: (c_n) -арифметическая прогрессия,

$$c_1 = 0,62, \quad d = 0,24. \quad \text{Найти: } c_{50}$$

Решение: Так как $c_n = c_1 + (n-1) \cdot d$, то

$$c_{50} = c_1 + (50-1) \cdot d, \quad c_{50} = 0,62 + 0,24 \cdot 49 = 12,38.$$

Ответ:

Пример 2.

Дано: (c_n) -арифметическая прогрессия, $c_1 = 10, c_5 = 22.$

Найти: d , составить формулу n -го члена.

Решение: Так как $c_n = c_1 + (n-1) \cdot d$,

то $c_5 = 10 + d(5-1)$, имеем $22 = 10 + 4d$, то $d = 3$

Имеем

$$c_n = 10 + 3(n-1), \quad c_n = 7 + 3n.$$

Ответ:

$$d = 3, \quad c_n = 7 + 3n$$

Арифметическая прогрессия

Пример 3.

Найдите первый член и разность
арифметической

прогрессии (c_n) , если $c_{16} = -7, c_{26} = 55$.

Решение: Так как $c_n = c_1 + (n-1) \cdot d$,

то $c_{16} = c_1 + d(16-1)$, т.е. $-7 = c_1 + 15d$.

$c_{26} = c_1 + d(26-1)$, т.е. $55 = c_1 + 25d$

Составим и решим систему
уравнений

$$\begin{cases} c_1 + 15d = -7, \\ c_1 + 25d = 55. \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 + 15d = -7, \\ 10d = 62. \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = -100, \\ d = 6,2. \end{cases}$$

Ответ: $c_1 = -100, d = 6$.

Арифметическая прогрессия

Пример

Дано: (a_n) - арифметическая прогрессия: 23; 17,2; 11,4; 5,6; ...

Определить, принадлежит ли число -122 этой последовательности?

Решение: Так как $a_1 = 23$, $a_2 = 17,2$ и $d = a_{n+1} - a_n$
то $d = a_2 - a_1 = 17,2 - 23 = -5,8$

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \quad \text{то}$$

$$a_n = 23 - 5,8(n-1), \quad a_n = 28,8 - 5,8n$$

Число -122 будет являться членом этой прогрессии, если существует

такое натуральное число n , при котором значение выражения $28,8 - 5,8n$ равно -122. Решим уравнение $28,8 - 5,8n = -122$,

значит, число -122 является

26 -м членом данной

прогрессии

$$5,8n = 150,8,$$

$$n = 26.$$

Ответ: $a_{26} =$

Арифметическая прогрессия

Пример

Между числами 5 и 1 вставьте семь таких чисел, чтобы они вместе с данными числами образовали арифметическую прогрессию.

Дано: (a_n) - арифметическая прогрессия:

$$5; a_2; a_3; a_4; a_5; a_6; a_7; a_8; 1. \quad a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

Решение: Заметим, что $a_1 = 5$, $a_8 = 1$,
по определению арифметической прогрессии

$$a_{n+1} = a_n + d,$$

$$a_2 = 4,5; a_3 = 4,0; a_4 = 3,5; a_5 = 3,0; a_6 = 2,5; a_7 = 2,0; a_8 = 1,5.$$

Ответ: 4,5; 4; 3,5; 3; 2,5; 2; 1,5.

Формула суммы n первых

членов

арифметической

прогрессии.

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \text{ или } S_n = \frac{2 \cdot a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$$

Пример

6. Арифметическая прогрессия (a_n) задана формулой $a_n = 3n + 2$.

Найдите сумму двадцати первых её членов.

Решение: Так как $a_n = 3n + 2$, то $a_1 = 5$, $a_2 = 8$, то $d = 3$,

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n, \quad S_{20} = \frac{2 \cdot 5 + 19 \cdot 3}{2} \cdot 20 = 670.$$

Ответ:

670

Формула суммы n первых членов

арифметической прогрессии.

Пример Найдите сумму натуральных чисел от 20

до 120

включительно.

Решение: 1 способ: (b_n): 1, 2, ..., 19, 20, ..., 119, 120.

$$S_{c20no120} = b_1 = 1, b_2 = 2, b_{120} = 120, d = 1,$$

$$S_{120} = \frac{2 \cdot 1 + 119 \cdot 1}{2} \cdot 120 = 7260. \quad S_{19} = \frac{2 \cdot 1 + 18}{2} \cdot 19 = 190.$$

$$S_{c20no120} = 7260 - 190 = 7070.$$

Ответ: 7070

Формула суммы n первых членов арифметической прогрессии.

(b_n): 20; 21; ...; 120, т.е. $b_1 = 20$, $b_2 = 21$, $b_{101} = 120$, то $d = 1$,

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1) \cdot d}{2} \cdot n, \quad S_{101} = \frac{2 \cdot 20 + 1 \cdot (101-1)}{2} \cdot 101 = 7070.$$

Ответ: 7070.

Пример

8.

Найдите сумму натуральных чисел,
кратных 7 и

Решение: Прогрессия b_n задается
формулой

$b_n = 7n$, $b_1 = 7$, $b_2 = 14$, $d = 7$, так как $b_n \leq 130$ и
так как $n \in \mathbb{N}$, то $n = 18$.

$$7n \leq 130,$$

$$n \leq 18 \frac{4}{7},$$

Тогда $S_{18} = \frac{2 \cdot 7 + 7 \cdot (18-1)}{2} \cdot 18 = 1197.$

Ответ:

1197.



Геометрическая прогрессия.

□ **Определение:**

Числовую последовательность (b_n) , первый член которой отличен от нуля, а каждый член, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же число $q \neq 0$, называют геометрической прогрессией.

$$b_{n+1} = b_n \cdot q \text{ (рекуррентная формула геометрической прогрессии).}$$

Число q , которое называется **знаменателем прогрессии**,

отлично от нуля и $q = \frac{b_{n+1}}{b_n}$.

Геометрическая прогрессия.

□ Так как $b_{n-1} = \frac{b}{q^{n-1}}$, $b_{n+1} = b_n \cdot q$, то $b_{n+1} \cdot b_{n-1} = b_n^2$
характеристическое свойство геометрической

Верна ли обратная

теорема? Последовательность (b_n) является геометрической тогда и только

тогда, когда для любого $n > 1$, где $b_n \neq 0$

при всех n выполняется соотношение $b_n^2 = b_{n+1} \cdot b_{n-1}$

Тем не менее, важно понимать, что формула

$$b_n = \sqrt{b_{n+1} \cdot b_{n-1}}$$

справедлива только для геометрической прогрессии с положительными членами, а предыдущее соотношение верно для произвольной геометрической прогрессии.

Каждый член геометрической прогрессии (b_n) определяется формулой n -го члена последовательности

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

Геометрическая прогрессия.

Сумма n первых членов геометрической
прогрессии (b_n) равна
при $q \neq 1$

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

и при $q = 1$ равна

При $|q| < 1$ геометрическая прогрессия
называется

бесконечно

убывающей.
Сумма бесконечно убывающей
геометрической прогрессии

($|q| < 1$) равна

$$S = \frac{b_1}{1 - q}$$

Геометрическая прогрессия.

Пример

1. Дано: (c_n) - геометрическая прогрессия,
 $c_1 = 16, q = 0,5$.

Найти: c_7

Решение: Так как $c_n = c_1 \cdot q^{n-1}$, то

$$c_7 = c_1 \cdot q^6, c_7 = 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{4}.$$

Ответ: $c_7 = 0,25$.

Пример

Дано: (c_n) - геометрическая прогрессия, $c_5 = -6, c_7 = -54$.

Найти: q

Решение: Так

как

$$c_n = c_1 \cdot q^{n-1}, \text{ то}$$

$$c_5 = c_1 \cdot q^4, -6 = c_1 \cdot q^4; \quad c_7 = c_1 \cdot q^6, -54 = c_1 \cdot q^6$$

Геометрическая прогрессия.

Составим и решим систему уравнений

$$\begin{cases} c_1 \cdot q^4 = -6, \\ c_1 \cdot q^6 = -54; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 \cdot q^4 = -6, \\ (c_1 \cdot q^4) \cdot q^2 = -54; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 \cdot q^4 = -6, \\ -6 \cdot q^2 = -54; \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = -\frac{6}{q^4}, \\ q = 3, \\ q = -3. \end{cases}$$

Существуют две геометрические прогрессии, у которой $c_5 = -6$, $c_7 = -54$. Это геометрические прогрессии, у которых или $q=3$ или $q=-3$.

Ответ: -3; 3

Пример

3. Найдите сумму геометрической

$$12; -4; \frac{4}{3}; \dots$$

прогрессии:

Так как дана бесконечная геометрическая прогрессия, то

$$q = -\frac{1}{3}, \text{ значит, } |q| < 1$$

Тогда по формуле

$$S = \frac{b_1}{1 - q} \quad \text{получи м:}$$

$$S = \frac{12}{1 + \frac{1}{3}} = 9$$

Ответ:

9



Пример

⁴Представьте в виде обыкновенной дроби число:

Решение: способ; б) 0,(36); в) 1,(81); г) 0,2(3).

$$а) 0,(6) = 0,6666... = 0,6 + 0,06 + 0,006 + 0,0006 + \dots$$

Рассмотрим последовательность: 0,6; 0,06; 0,006; 0,0006; ... $0,06^2 = 0,6 \cdot 0,006$

Так как $q = 0,1$, значит, $|q| < 1$ то эта последовательность является бесконечной геометрической прогрессией, то

Тогда сумма этой прогрессии:

$$S = \frac{0,6}{1 - 0,1} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

Ответ: $\frac{2}{3}$.



II

способ

Пусть $x = 0,6666\dots$. Период состоит из одной
цифры

Умножим обе части равенства на 10 .

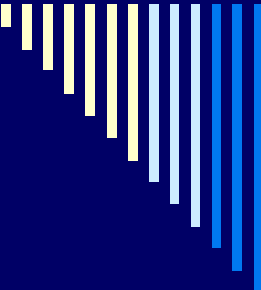
Получим $10x = 6,666\dots$
Вычтем из $10x =$

$6,666\dots$

$$x = 0,666\dots,$$

получим $9x =$
 $6,000\dots,$ $x = \frac{6}{9}.$

Ответ: $\frac{2}{3}.$



б) Пусть $x = 0,363636\dots$. Период состоит из двух цифр

Умножим обе части равенства на 100.

Вычтем из $100x = 36,363636\dots$

$36,363636\dots$

получим $x = 0,363636\dots$, $x = \frac{4}{11}$. Ответ: $\frac{4}{11}$.

получим $99x = 36,00000\dots$

в) Пусть $x = 1,818181\dots$. Период состоит из двух цифр

Умножим обе части равенства на 100.

Вычтем из $100x = 181,8181\dots$

...

получим $x = 1,8181\dots$, $x = 1\frac{20}{11}$. Ответ: $1\frac{9}{11}$.

получим $99x = 181,8181\dots$



г) $0,2(3)$.

Пусть $x = 0,2333\dots$. Период состоит из одной цифры

Умножим обе части равенства на 10 .

Получим $10x = 2,333\dots$.

Вычтем из $10x =$

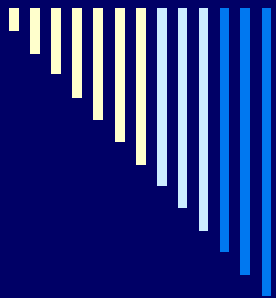
$2,3333\dots$

$$x = 0,2333\dots,$$

получим $9x \stackrel{=}{=} 2,1$
 $2,1000\dots,$ $x = \frac{2,1}{9}$

$$x = \frac{21}{90}.$$

Ответ: $\frac{7}{30}$.



Домашнее задание.

- ❑ ЦТ-2006,Б4
- ❑ ЦТ-2007,Б6
- ❑ Никольский 10,стр.307 №60(а, в, г), №106
- ❑ Повторить формулы нахождения производных