Потенциальное (упругое) рассеяние

Частица массы m **в поле рассеивающего потенциала** $U(r)$**:**

$$\left(\frac{p^2}{2m}+U(r)\right)\psi(r)=\varepsilon\psi(r)$$

Волновая функция $\psi(r)$ **вдали от рассеивателя** $\mathbf{r}\to\infty$

$$\psi(\mathbf{r})=e^{i\mathbf{kr}}+\frac{f(\vartheta)}{r}e^{ikr}$$

$k=(2m\varepsilon)^{1/2}$ - волновой вектор, $\hbar=1$, $f(\theta)$ - амплитуда рассеяния

Поток рассеянных частиц, сечение рассеяния

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{dN}{jd\Omega},\qquad dN=v|\psi|^2dS=\frac{v|f|^2}{r^2}r^2d\Omega$$

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega}=|f(\vartheta)|^2,}\qquad \boxed{\sigma=\int|f(\vartheta)|^2d\Omega}$$

Фазовая теория рассеяния

Рассеяние на изотропном потенциале

Разложение волновой функции по парциальным волнам

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_{l,m} A_{lm} R_l(r) Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$$

Радиальная часть R_l

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dR_l}{dr}\right) + \left(k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - 2mU(r)\right)R_l = 0,$$

$$r \to 0: \quad \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dR_l}{dr}\right) - \frac{l(l+1)}{r^2} R_l = 0, \quad R_l \propto r^l, 1/r^{l+1}$$

Асимптотическое поведение

$$r \to \infty: \quad \frac{d^2(rR_l)}{dr^2} = k^2 rR, \quad R_l^{(\pm)} = \frac{e^{\pm i(kr - \frac{\pi l}{2})}}{r}, \quad R_l^{(-)} = R_l^{(+)*}$$

$$R_l^{(\pm)}(r \to 0) \propto 1/r^{l+1}, \quad R_l = CR_l^{(+)} + C^* R_l^{(-)}, \quad C = -ie^{i\delta_l},$$

$$\boxed{R_l(r \to \infty) = \frac{2\sin(kr - \frac{\pi l}{2} + \delta_l)}{r}, \quad R_l = -i(e^{i\delta_l} R_l^{(+)} - e^{-i\delta_l} R_l^{(-)}).}$$

$Rl^{(-)}$ - сходящаяся, $Rl^{(+)}$ расходящаяся, волна, $\boxed{\delta_l}$ - фаза рассеяния.

Разложение плоской волны

$$e^{i\mathbf{kr}} = 4\pi \sum_{l,m} i^l j_l(kr) Y^*_{lm}(\mathbf{k}) Y_{lm}(\mathbf{r})$$

Сферические функции Бесселя j_l, $j_0(x)=\sin(x)/x$

$j_l(x)=(\pi/2x)J_{l+1/2}(x)$

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dj_l(kr)}{dr}\right)+\left(k^2-\frac{l(l+1)}{r^2}\right)j_l(kr)=0,$$

$$j_l(kr\to\infty)=\sin(kr-\pi l/2)/kr,$$

$$\mathbf{k}\uparrow\mathbf{z} \quad Y_{lm}(\mathbf{k})=\sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi}}\delta_{m0}, \quad e^{i\mathbf{kr}}=\sum_l i^l\sqrt{4\pi(2l+1)}\,j_l(kr)Y_{l0}(\mathbf{r})$$

Разложение $\psi(r)$

$$\psi(\mathbf{r})=\sum_{l,m}A_{lm}R_l(r)Y_{lm}(\vartheta,\varphi), \quad A_{lm}=\delta_{m0}\sqrt{4\pi(2l+1)}\frac{i^l e^{i\delta_l}}{2k}$$

$$\psi(\mathbf{r}\to\infty)=\sum_l\sqrt{4\pi(2l+1)}\frac{i^l e^{i\delta_l}}{2k}\frac{2\sin(kr-\frac{\pi l}{2}+\delta_l)}{r}Y_{0m}(\vartheta,\varphi)$$

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{kr}} + \sqrt{4\pi}\sum_l \frac{\sqrt{(2l+1)}}{2k}\frac{e^{ikr}}{r}\left(e^{i2\delta_l}-1\right)Y_{lm}(\vartheta,\varphi) = e^{i\mathbf{kr}} + \frac{f(\vartheta)}{r}e^{ikr}$$

Амплитуда рассеяния $f(\vartheta) = \sum_l (2l+1)\frac{\left(e^{i2\delta_l}-1\right)}{2ik}P_l(\cos(\vartheta))$

S матрица $S_l = e^{i2\delta_l}$ **Парциальная амплитуда** $f_l = \frac{S_l - 1}{2ik}$

Разложение амплитуды рассеяния

$$\boxed{f(\vartheta) = \sum_l (2l+1)\, f_l P_l(\cos\vartheta)}$$

Сечение рассеяния

$$\sigma = \int |f(\vartheta)|^2 d\Omega = 2\pi \int_0^{\pi} |f(\vartheta)|^2 \sin(\vartheta) d\vartheta$$

$$\int_0^{\pi} P_l(\cos\vartheta) P_{l'}(\cos\vartheta) \sin(\vartheta) d\vartheta = \frac{2\delta_{ll'}}{2l+1}$$

$$\sigma = \sum_l \sigma_l = 4\pi \sum_l (2l+1) |f_l|^2 = \frac{4\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) \sin^2 \delta_l$$

Парциальное сечение $\boxed{\sigma_l = 4\pi (2l+1) |f_l|^2 = \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) \sin^2 \delta_l}$

Максимальное парциальное сечение $\sigma_{l\,\max} = \frac{4\pi}{k^2} (2l+1)$

$$\boxed{R_l(r) \to \delta_l \to \sigma}$$

Условие унитарности

Парциальная волна $\psi_l = e^{2i\delta_l}\psi_l^{(+)} - \psi_l^{(-)} = S_l\psi_l^{(+)} - \psi_l^{(-)}$

Расходящаяся волна $\psi_l^{(+)} = R_l^{(+)}(r)Y_{l0}(\mathbf{n})$

Сходящаяся волна $\psi_l^{(-)} = R_l^{(-)}(r)Y_{l0}(\mathbf{n})$

Суперпозиция парциальных волн

$$\psi = \sum_l A_l\psi_l = \sum_l A_l S_l\psi_l^{(+)} - A_l\psi_l^{(-)} = \sum_l B_l\psi_l^{(+)} - A_l\psi_l^{(-)}$$

Матрица рассеяния S $\boxed{(B) = (S)(A), \quad S_{ll'} = \delta_{ll'}e^{2i\delta_l}}$

Унитарность S матрицы $\boxed{|S_{ll}| = 1, \quad SS^+ = 1}$

Сохранение числа частиц $|B_l| = |A_l|, \quad j_l^{(-)} = j_l^{(+)}$

Оптическая теорема

$$S_l = 1 + 2ikf_l, \quad S_l S_l^* = 1, \quad f_l - f_l^* = 2i f_l f_l^*, \quad \boxed{\mathrm{Im}\{f_l\} = k|f_l|^2}$$

$$\mathrm{Im}\{1/f_l\} = -k, \quad \boxed{f_l = \frac{1}{g_l - ik}}$$

$$\mathrm{Im}\{f(0)\} = \sum_l (2l+1)\,\mathrm{Im}\{f_l\} = \sum_l (2l+1)k|f_l|^2 = \frac{k\sigma}{4\pi}$$

$$\boxed{\mathrm{Im}\{f(0)\} = \frac{k\sigma}{4\pi}}$$

Закон сохранения числа частиц

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{kr}} + \frac{f(\vartheta)}{r} e^{ikr}$$

Плотность потока частиц $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \mathbf{v} + v\frac{|f(\vartheta)|^2}{r^3}\mathbf{r} + \mathbf{j}_{\text{int}}$

$$\oint \mathbf{j}\,d\mathbf{S} = 0, \quad \oint \mathbf{v}\,d\mathbf{S} = 0, \quad \oint v\frac{|f(\vartheta)|^2}{r^3}\mathbf{r}\,d\mathbf{S} = v\sigma, \quad \oint \mathbf{j}_{\text{int}}\,d\mathbf{S} + v\sigma = 0$$

$$\oint \mathbf{j}_{\text{int}}\,d\mathbf{S} = 2\pi v\int_0^1 \left(e^{ikr(\cos\vartheta - 1)} f^*(\vartheta) + e^{-ikr(\cos\vartheta - 1)} f(\vartheta)\right) r\,d\cos\vartheta =$$

$$\frac{2\pi v}{ik}\left(f^*(0) - f(0)\right) = -\sigma v, \quad \boxed{\operatorname{Im}\{f(0)\} = \frac{k}{4\pi}\sigma}$$

Условие унитарности S матрицы в представлении плоских волн

$$\psi_{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) = e^{ikr\mathbf{n}\mathbf{n}'} + \frac{f(\mathbf{n},\mathbf{n}')}{r}e^{ikr}, \quad |\mathbf{n}| = |\mathbf{n}'| = 1, \mathbf{n} \uparrow \mathbf{k}, \mathbf{n} \uparrow \mathbf{n}' \uparrow \mathbf{r}$$

$$\psi = \int F(\mathbf{n})\psi_{\mathbf{n}} d\mathbf{n} = \int F(\mathbf{n}) e^{ikr\mathbf{n}\mathbf{n}'} d\mathbf{n} + \frac{e^{ikr}}{r}\int F(\mathbf{n}) f(\mathbf{n},\mathbf{n}') d\mathbf{n} =$$

$$2\pi i F(-\mathbf{n}')\frac{e^{-ikr}}{kr} - 2\pi i F(\mathbf{n}')\frac{e^{ikr}}{kr} + \frac{e^{ikr}}{r}\int F(\mathbf{n}) f(\mathbf{n},\mathbf{n}') d\mathbf{n} =$$

$$-\frac{2\pi i}{k}\left(\frac{e^{ikr}}{r}SF(\mathbf{n}') - F(-\mathbf{n}')\frac{e^{-ikr}}{r}\right),$$

$$S = 1 + 2ikf, \quad fF(\mathbf{n}') = \frac{1}{4\pi}\int F(\mathbf{n}) f(\mathbf{n},\mathbf{n}') d\mathbf{n},$$

$$SS^{+} = 1. \quad f - f^{+} = 2ikff^{+},$$

$$f(\mathbf{n},\mathbf{n}') - f^{*}(\mathbf{n}',\mathbf{n}) = \frac{ik}{2\pi}\int f(\mathbf{n},\mathbf{n}'') f^{*}(\mathbf{n}'',\mathbf{n}') d\mathbf{n}'',$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}', \quad \mathrm{Im}\{f(\mathbf{n},\mathbf{n})\} = \frac{k\sigma}{4\pi}$$

Приближение Борна

Условие приближения $mUa^2 << 1, \quad Ua \ /v << 1 \quad ka >> 1$

Вероятность рассеяния $dW = 2\pi \left| \langle \mathbf{k}' | U | \mathbf{k} \rangle \right|^2 \delta\left(\frac{k^2}{2} - \frac{k'^2}{2} \right) \frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3}$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{dW}{jd\Omega} = \frac{2\pi}{v} \int \left| \langle \mathbf{k}' | U | \mathbf{k} \rangle \right|^2 \delta\left(\frac{k^2}{2m} - \frac{k'^2}{2m} \right) \frac{k'^2 \, dk'}{(2\pi)^3} = \boxed{\frac{m^2}{(2\pi)^2} \left| \langle \mathbf{k}' | U | \mathbf{k} \rangle \right|^2},$$

$$\langle \mathbf{k}' | U | \mathbf{k} \rangle = \int U(\mathbf{r}) e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{r}} d\mathbf{r} = U(\mathbf{q}), \quad \mathbf{q} = \mathbf{k}' - \mathbf{k},$$

$$U(\mathbf{q}) = 4\pi \int_0^\infty U(r) \frac{\sin(qr)}{q} dr, \quad \boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = 4m^2 \left[\int_0^\infty U(r) \frac{\sin(qr)}{q} dr \right]^2}$$

Квазиклассическое приближение

Квазиклассический предел

$$\lambda \ll a, \quad \lambda = h/p,$$

$$\hbar \to 0, \quad ka = pa/\hbar \gg 1,$$

$$l = \rho p/\hbar \gg 1, \quad \delta_l \gg 1,$$

$$\vartheta \approx U(\rho)/E \gg \hbar/\rho p = 1/l$$

Классические траектории движения

$$f(\vartheta) = \sum_l (2l+1) f_l P_l(\cos\vartheta) \approx$$

$$\approx \frac{1}{k} \sum_l \sqrt{\frac{l}{2\pi \sin\vartheta}} \left[e^{i\left(2\delta_l - (l+\frac{1}{2})\vartheta - \frac{\pi}{4}\right)} - e^{i\left(2\delta_l + (l+\frac{1}{2})\vartheta + \frac{\pi}{4}\right)} \right],$$

$$2\frac{d\delta_l}{dl} \pm \vartheta = 0, \quad l = k\rho, \quad \vartheta = \vartheta(\rho),$$

Классическое сечение рассеяния

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{l}{k^2 \sin(\vartheta)} \left| \frac{dl}{d\vartheta} \right| = \frac{\rho}{\sin(\vartheta)} \left| \frac{d\rho}{d\vartheta} \right|$$

Приближение WKB, Приближение эйконала

$$E >> U, \quad ka >> 1$$

Квазиклассическая волновая функция

$$rR_l \propto \sin\left(\frac{1}{\hbar}\int_{r_0}^{r}\sqrt{2m(E-U(r)) - \frac{\hbar^2(l+1/2)^2}{r^2}}\,dr + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\delta_l = \frac{1}{\hbar}\int_{r_0}^{\infty}\sqrt{2m(E-U(r)) - \frac{\hbar^2(l+1/2)^2}{r^2}}\,dr + \frac{\pi}{4} -$$

$$-\frac{1}{\hbar}\int_{r_0}^{\infty}\sqrt{2mE - \frac{\hbar^2(l+1/2)^2}{r^2}}\,dr - \frac{\pi}{4}. \quad 2m(E-U(r_0)) = \frac{\hbar^2(l+1/2)^2}{r_0^{\;2}}$$

Квазиклассическая фаза рассеяния

$$\delta_l \approx -\frac{1}{\hbar^2}\int_{r_0}^{\infty}\frac{mU(r)\,dr}{\sqrt{k^2 - \frac{l^2}{r^2}}}, \quad k^2 = \frac{l^2}{r_0^{\;2}}$$

Квазиклассическая фаза рассеяния

$$\delta_l \approx -\frac{1}{\hbar^2}\int\limits_{l/k}^{\infty}\frac{mU(r)dr}{\sqrt{k^2-\dfrac{l^2}{r^2}}}, \quad r^2 = z^2+\rho^2 = z^2+\left(\frac{l}{k}\right)^2,$$

$$\delta_l \approx -\frac{m}{\hbar^2 k}\int\limits_0^{\infty} U\left(\sqrt{z^2+(l/k)^2}\right)dz, \quad \rho = \frac{l}{k}$$

$$\delta(\rho) = -\frac{1}{2\hbar v}\int\limits_{-\infty}^{\infty} U\left(\sqrt{z^2+\rho^2}\right)dz,$$

$$2\delta = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\sqrt{k^2-\frac{2m}{\hbar^2}U}\,dz-\int\limits_{-\infty}^{\infty}kdz \approx -\frac{m}{\hbar^2 k}\int\limits_{-\infty}^{\infty}Udz.$$

Эйконал

Квазиклассическая амплитуда рассеяния

$$f(\vartheta) = \sum_l (2l+1) f_l P_l(\cos\vartheta)$$

$$P_l(\cos\vartheta) \approx J_0(\vartheta l) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-i\vartheta l \cos\varphi} d\varphi, \quad l >> 1, \quad \vartheta << 1$$

$$f(\vartheta) \approx \frac{1}{2\pi}\int 2l \frac{(e^{2i\delta_l} - 1)}{2ik} e^{-i\vartheta l \cos\varphi} d\varphi dl$$

Замена переменных

$$l \to \rho, \quad l = \rho k, \quad q = k\vartheta, \quad \delta_l = \delta(\rho = l/k), \quad S(\rho) = e^{2i\delta(\rho)},$$

$$f(\vartheta) \approx \frac{k}{2\pi i}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} (S(\rho) - 1) e^{-i\mathbf{q}\rho} \rho d\rho d\varphi \boxed{= \frac{k}{2\pi i}\int (S(\rho) - 1) e^{-i\mathbf{q}\rho} d^2\rho}$$

Борновский предел

$$\delta(\rho) << 1, \quad (e^{2i\delta(\rho)} - 1) = 2i\delta(\rho) = -\frac{i}{\hbar v}\int_{-\infty}^{\infty} U(\sqrt{z^2+\rho^2})dz,$$

$$f(\vartheta) \approx -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int U(r)e^{-i\mathbf{qr}}d\mathbf{r}$$

Сечение рассеяния

$$\sigma = \frac{4\pi}{k}\operatorname{Im}\{f(0)\} = 2\int \operatorname{Re}\{1 - S(\rho)\}d^2\rho = 4\int \sin^2(\delta(\rho))d^2\rho$$

Рассеяние медленных частиц

$ka \ll 1$

Волновая функция вне действия потенциала $r \gg a$

$$R_l(r \to \infty) = 2\sin(kr - \frac{\pi l}{2} + \delta_l)/r =$$

$$2\sin(kr - \frac{\pi l}{2})\cos(\delta_l)/r + 2\cos(kr - \frac{\pi l}{2})\sin(\delta_l)/r$$

$$R_l(r > a) = 2j_l(kr)\cos(\delta_l) + 2y_l(kr)\sin(\delta_l)$$

Волновая функция в области действия потенциала $r < a$

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR_l}{dr}\right) - \left(\frac{l(l+1)}{r^2} + 2mU(r)\right)R_l = 0$$

Сшивание волновых функций   a<r<1/k

$$\eta_l = \frac{R'_l}{R_l} = k\frac{j'_l(kr)\cos(\delta_l) + y'_l(kr)\sin(\delta_l)}{j_l(kr)\cos(\delta_l) + 2y_l(kr)\sin(\delta_l)}$$

$$tg(\delta_l) = -\frac{kj'_l(kr) - \eta_l j_l(kr)}{ky'_l(kr) - \eta_l y_l(kr)},$$

$$j_l(x \ll 1) \propto x^l,\ y_l(x \ll 1) \propto 1/x^{l+1},$$

$$tg(\delta_l) \approx (ka)^{2l+1}, \qquad f_l = \frac{e^{2i\delta_l} - 1}{2ik} \approx \frac{\delta_l}{k} \propto (ka)^{2l},$$

$$f(\vartheta) = f_0 = -\alpha,$$

$$\sigma = 4\pi\alpha^2$$

Резонансное рассеяние медленных частиц

резонанс в s - волне, l = 0

$$tg(\delta_0) = \frac{k\cos(ka) - \eta\sin(ka)}{k\sin(ka) + \eta\cos(ka)},$$

$$f_0 = \frac{1}{g_0 - ik} = \frac{1}{kctg(\delta_0) - ik},$$

$$g_0 = \frac{k\sin(ka) + \eta\cos(ka)}{k\cos(ka) - \eta\sin(ka)}k \approx \frac{\eta}{1 - \eta a},$$

$$\eta = \frac{\kappa\cos(\kappa a)}{\sin(\kappa a)}, \quad \kappa = \sqrt{2mU}$$

$$\alpha = -1/g_0 \approx a - 1/\eta = a - tg(\kappa a)/\kappa$$

Условие резонанса,

$$\eta = 0,\ g_0 = 0,\ \delta_0 = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$\alpha \approx -1/\eta >> a$$

$$\chi(r > a) = e^{-\kappa r}, \quad \varepsilon = -\frac{\kappa^2}{2m}$$

$$\eta = -\kappa = -1/\alpha, \quad -g_0(k=0) = \alpha = \kappa$$

$$f_0 = \frac{-1}{\kappa + ik},$$

$$\sigma = \frac{4\pi}{\kappa^2 + k^2} = \frac{2\pi}{m}\frac{1}{(E + |\varepsilon|)},$$

$$f_0 = \frac{1}{g_0(k) - ik} = \frac{1}{-\kappa + r_0 k^2/2 - ik}$$

резонанс с $l \neq 0$

$$f_l = \frac{1}{g_l(k) - ik} = \frac{1}{g_l(0) + \frac{1}{2} g''_l k^2 - ik},$$

$$f_l \propto k^{2l}, \quad g_l(k) \propto 1/k^{2l}, \quad g_l(k) \approx \frac{b}{E^l}(\varepsilon - E),$$

$$f_l = \frac{-1}{\frac{b}{E^l}(E - \varepsilon) + ik} = \frac{1}{k} \frac{-\Gamma/2}{E - \varepsilon + i\Gamma/2}, \quad \Gamma = 2kE^l/b \propto k^{2l+1},$$

$$S = \frac{E - \varepsilon - i\Gamma/2}{E - \varepsilon + i\Gamma/2},$$

$$\sigma_l = \frac{\pi(2l+1)}{k^2} \frac{\Gamma^2}{(E-\varepsilon)^2 + \Gamma^2/4}$$

Аналитические свойства S матрицы

$$\chi_{kl} = a_l(k)\chi_{kl}^{(+)}(r) - b_l(k)\chi_{kl}^{(-)}(r),$$

$$\chi_{kl}^{(\pm)}(r \to \infty) = e^{\pm i\left(kr - \frac{\pi l}{2}\right)}, \quad \chi_{kl}(0) = 0,$$

$$S_l(k) = \frac{b_l(k)}{a_l(k)} = \frac{\chi_{kl}^{(-)}(r)}{\chi_{kl}^{(+)}(r)}\Big|_{r=0}$$

k → -k $\qquad \chi_{-kl} = C\chi_{kl}$

$$\chi_{-kl}^{(\pm)} = (-1)^l \chi_{kl}^{(\mp)},$$

$$\boxed{S_l(-k) = 1/S_l(k)}$$

$t \longrightarrow -t$ $\qquad \chi_{kl}^{*} = C\chi_{kl}$

$$\chi_{kl}^{(\pm)*} = \chi_{kl}^{(\mp)},$$

$$\boxed{\begin{aligned} (S_l(k))^{*} &= 1/S_l(k) \\ S_l^{*}(k^{*}) &= 1/S_l(k) \end{aligned}}$$

$$\boxed{S_l(-k^{*}) = S_l^{*}(k),}$$

k

$-k^{*},\ S_l^{*}(k)$	$k,\ S_l(k)$
$-k\ ,\ 1/S_l(k)$	$k^{*},\ 1/S_l^{*}(k)$

Вещественная ось

$$S_l(k)S_l(k)^{*} = 1, \quad \mathrm{Im}\{\delta_l(k)\} = 0,$$

$$S_l(k) = 1 + 2ikf_l(k), \ \ f_l(k) = 1/(g_l - ik), \quad S_l(k) = \frac{g_l + ik}{g_l - ik},$$

$$g_l(-k) = g_l(k), \quad g_l = g_l(k^2)$$

Мнимая ось $\quad S_l^{*}(-k^{*}) = S_l(k), \quad \mathrm{Re}\{\delta_l(\pm i\,|k|)\} = 0$

Особенности S матрицы

Полюса S матрицы, связанные состояния $E=E_0<0$

$$k = k_0 = i\sqrt{-2mE_0}, \quad \chi^{(\pm)}_{k_0 l}(r \to \infty) = e^{\pm\left(|k_0| r + i\frac{\pi l}{2}\right)},$$

$$\chi_{k_0 l} \propto \chi^{(+)}_{k_0 l}, \quad \chi^{(+)}_{k_0 l}(0) = 0, \quad S_l(k \to k_0) \to \infty, \; S_l(-k_0) = 0$$

Пример: *резонанс в s - волне, ka << 1*

$$S_l(k) = \frac{g_l + ik}{g_l - ik}, \quad l = 0, \quad g = \eta = -\kappa < 0,$$

$$S_l(k) = \frac{-\kappa + ik}{-\kappa - ik}, \quad k_0 = i\kappa, \quad E_0 = -\frac{\kappa^2}{2m},$$

Положение полюсов $k_0=k'+ik''$:
$k''>0,\ k'=0;\quad k''<0,\ k'_1=-\,k'_2$

$$S_l^{-1}(k_0=k'+ik'')=0,\ \chi_{k_0 l}\propto\chi_{k_0 l}^{(+)}\xrightarrow[r\to\infty]{} e^{ik'r-k''r},$$

$$E_0=(k'+ik'')^2/2m,\quad \mathrm{Im}\{E_0\}=0,\quad k'k''=0$$

Условие непрерывности

$$\frac{\partial}{\partial t}\int|\Psi|^2 dV=-\oint \mathbf{j}\,d\mathbf{S}=\frac{i}{2m}\oint\left(\Psi^*\nabla\Psi-\Psi\nabla\Psi^*\right)d\mathbf{S}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^R|\chi|^2 dr=\frac{i}{2m}\left(\chi^*\frac{d}{dr}\chi-\chi\frac{d}{dr}\chi^*\right)_{r=R}$$

$$\chi_{k_0 l}=\chi_{k_0 l}^{(+)}\xrightarrow[r\to\infty]{} e^{ik'r-k''r-\frac{i}{2m}(k'^2-k''^2+2ik'k'')t},$$

$$\chi_{k_0 l} = \chi_{k_0 l}^{(+)} \xrightarrow[r\to\infty]{} e^{ik'r - k''r - \frac{i}{2m}(k'^2 - k''^2 + 2ik'k'')t},$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left|\chi\right|^2 = \frac{2k'k''}{m}\left|\chi\right|^2,$$

$$\frac{2k'k''}{m}\int_0^R \left|\chi\right|^2 dr = -\frac{k'}{m}e^{-2k''R},$$

$$\boxed{k'' < 0; \quad k'' > 0, k' = 0.}$$

Полюса на нефизическом листе k”<0, резонансы k”<<k’

$$S_l(k) = \frac{(k - k_0^*)(k - k_0)}{(k - k_0)(k + k_0^*)} e^{2i\delta^{(0)}(k)},$$

$$(k - k_0)(k + k_0^*) = (k - ik'')^2 - k'^2 \approx k^2 - k'^2 - 2ikk'',$$

$$E_0 = \frac{k'^2}{2m}, \Gamma = \frac{k\left|k''\right|}{m}, \quad \Gamma << E_0, \quad S_l(k) = \frac{E - E_0 - \frac{i\Gamma}{2}}{E - E_0 + \frac{i\Gamma}{2}} e^{2i\delta^{(0)}(k)}$$

Свойства вычетов

Полюс на физическом листе k_0=iκ

$$S_l(k) = \frac{C_l}{k - i\kappa}$$

Связанное состояние с энергией

$$E_0 = -\frac{\kappa^2}{2m}$$

и волновой функцией

$$\chi_l(r \to \infty) = A_l e^{-\kappa r}, \quad \int_0^\infty |\chi_l|^2 dr = 1$$

$$\boxed{C_l = (-1)^{l+1} i |A_l|^2}$$

Волновая функция задачи рассеяния с импульсом k= iκ + ε

$$\chi_{kl}(r \to \infty) = A_l \left(e^{-\kappa r + i\varepsilon r} - \frac{(-1)^l \varepsilon}{C_l} e^{\kappa r - i\varepsilon r} \right),$$

$$\chi_{k \to i\kappa, l} \to \chi_l, \int_0^\infty |\chi_l|^2 dr = 1$$

Условие непрерывности

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\left|\Psi\right|^{2}dV=-\oint \mathbf{j}\,d\mathbf{S}=\frac{i}{2m}\oint\left(\Psi^{*}\nabla\Psi-\Psi\nabla\Psi^{*}\right)d\mathbf{S}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{0}^{R}\left|\chi\right|^{2}dr=\frac{i}{2m}\left(\chi^{*}\frac{d}{dr}\chi-\chi\frac{d}{dr}\chi^{*}\right)_{r=R}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left|\chi\right|^{2}=\frac{2k'k''}{m}\left|\chi\right|^{2}=\frac{2\varepsilon\kappa}{m}\left|\chi\right|^{2},$$

$$\frac{i}{2m}\left(\chi^{*}\frac{d}{dr}\chi-\chi\frac{d}{dr}\chi^{*}\right)_{r=R}=\frac{2\varepsilon\kappa}{m}\left(-i\,\frac{(-1)^{l}}{C_{l}}\left|A_{l}\right|^{2}-\frac{\left|A_{l}\right|^{2}}{2\kappa}e^{-2\kappa R}\right)$$

$$\frac{2\varepsilon\kappa}{m}\int_{0}^{R}\left|\chi\right|^{2}dr=\frac{2i\varepsilon\kappa}{m}\frac{(-1)^{l+1}}{C_{l}}\left|A_{l}\right|^{2}.$$

Теорема Левинсона

$$\boxed{\delta_l(\infty)-\delta_l(0)=-\pi N_b}$$

$$\frac{S_l'}{S_l}=2i\delta'(k),\quad \delta(-k)=-\delta(k),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{S_l'}{S_l}dk=2i\int_{-\infty}^{+\infty}\delta'(k)dk=4i\int_{0}^{+\infty}\delta'(k)dk=4i\left(\delta(\infty)-\delta(0)\right)$$

Функция Йоста $D_l(k)$

$$D_l(k)=\chi_{kl}^{(+)}(0),\quad D_l^*(k)=\chi_{kl}^{(-)}(0),$$

$$D_l(-k)=(-1)^l D_l^*(k).$$

$$S_l=\frac{\chi_{kl}^{(-)}(0)}{\chi_{kl}^{(+)}(0)}=\frac{D_l^*(k)}{D_l(k)},\quad S_l'=\frac{D_l'^*D_l-D_l^*D_l'}{D_l^2}=-\frac{D_l^*(k)}{D_l(k)}\left(\frac{D_l'(k)}{D_l(k)}+\frac{D_l'(-k)}{D_l(-k)}\right),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{S_l'}{S_l}dk=-2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{D_l'(k)}{D_l(k)}dk=-4\pi iN_b,\ D_l(k\approx k_0)=B(k-k_0),\ \frac{D_l'(k)}{D_l(k)}=\frac{1}{(k-k_0)}.$$

Квазистационарные состояния

Волновая функция $\chi_{k_0 l} \propto \chi_{k_0 l}^{(+)}, \quad \chi_{k_0 l}^{(+)}(0) = 0.$

Энергия состояния $E = E_0 - i\Gamma/2, \quad \Gamma << E_0.$

Временная зависимость волновой функции

$$\Psi(t) \propto e^{-iEt} = e^{-iE_0 t - \frac{\Gamma}{2}t}, \quad \left|\Psi(t)\right|^2 \propto e^{-\Gamma t}, \quad N(t) = N_0 e^{-\Gamma t}.$$

Пространственная зависимость волновой функции

$$\chi(r) \propto e^{ikr}, k = \sqrt{2m(E_0 - i\Gamma/2)} = \sqrt{2mE_0} - i\frac{\Gamma}{4}\sqrt{\frac{2m}{E_0}},$$

$$\chi(r) = Ae^{ik'r + |k''|r}, \quad k' = \sqrt{2mE_0}, k'' = -\frac{\Gamma}{4}\sqrt{\frac{2m}{E_0}} = -\frac{\Gamma}{2v},$$

$$\left|\chi(r \to \infty)\right| = \left|A\right|^2 e^{2|k''|r} = \left|A\right|^2 e^{\frac{\Gamma}{v}r}.$$

Условие непрерывности

$$\frac{\partial}{\partial t}\int |\Psi|^2 dV = -\oint \mathbf{j}\,d\mathbf{S} = \frac{i}{2m}\oint\left(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*\right)d\mathbf{S}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^R |\chi|^2 dr = \frac{i}{2m}\left(\chi^*\frac{d}{dr}\chi - \chi\frac{d}{dr}\chi^*\right)_{r=R}$$

$$\chi_{k_0 l} = \chi^{(+)}_{k_0 l}\xrightarrow[r\to\infty]{} Ae^{ik'r - k''r - \frac{i}{2m}(k'^2 - k''^2 + 2ik'k'')t},$$

$$\frac{\partial}{\partial t}|\chi|^2 = \frac{2k'k''}{m}|\chi|^2, \quad \frac{2k'k''}{m}\int_0^R |\chi|^2 dr = -A\frac{k'}{m}e^{-2k''R},$$

$$|A|^2 = 2|k''|N(t), \quad |\Psi(t,r)|^2 = N_0 e^{-\Gamma t + \Gamma r/v}.$$

Квазистационарное состояние в задаче рассеяния

Полюса на нефизическом листе k”<0, резонансы k”<<k’

$$S_l(k)=\frac{(k-k_0^*)(k-k_0)}{(k-k_0)(k+k_0^*)}e^{2i\delta^{(0)}(k)},$$

$$(k-k_0)(k+k_0^*)=(k-ik'')^2-k'^2\approx k^2-k'^2-2ikk'',$$

$$E_0=\frac{k'^2}{2m},\ \Gamma=\frac{k|k''|}{m},\quad \Gamma \ll E_0,\quad S_l(k)=\frac{E-E_0-\frac{i\Gamma}{2}}{E-E_0+\frac{i\Gamma}{2}}e^{2i\delta^{(0)}(k)},$$

$$\delta_l(k)=\delta^{(0)}(k)+arctg\left(\frac{\Gamma}{2(E-E_0)}\right).$$

$$\sigma_l = \frac{\pi(2l+1)}{k^2}\left|S_l - 1\right|^2 =$$

$$\frac{\pi(2l+1)}{k^2}\left(\frac{\Gamma^2}{(E-E_0)^2+\frac{\Gamma^2}{4}} + 4\mathrm{Re}\left(\frac{\Gamma e^{i\delta^{(0)}}\sin\delta^{(0)}}{E-E_0+\frac{i\Gamma}{2}}\right) + 4\sin^2\delta^{(0)}\right)$$

Зависимость волновой функции рассеяния от энергии налетающий частицы в области резонанса

$$\chi''_{kl} - 2m(U(r) - E)\chi_{kl} = 0 \quad |\times \chi_{k'l}$$

$$\chi''_{k'l} - 2m(U(r) - E')\chi_{k'l} = 0 |\times \chi_{kl}$$

$$\left(\chi_{k'l}\chi'_{kl} - \chi_{kl}\chi'_{k'l}\right)' = 2m\Delta E \chi_{kl}\chi_{k'l}$$

$$\int_0^R |\chi_{kl}|^2 dr = \frac{1}{2m}\lim \frac{\chi_{k'l}\chi'_{kl} - \chi_{kl}\chi'_{k'l}}{\Delta E} = \frac{1}{2k}\left[\chi'_{kl}\frac{\partial \chi_{kl}}{\partial k} - \chi_{kl}\left(\frac{\partial \chi_{kl}}{\partial k}\right)'\right]$$

$$\chi_{kl}(R) = 2\sin(kR - \frac{\pi l}{2} + \delta_l)$$

$$\boxed{\int_0^R |\chi_{kl}|^2 dr = 2\left[\left(R + \frac{d\delta_l}{dk}\right) - \frac{1}{2k}\sin 2(kR - \frac{\pi l}{2} + \delta_l)\right]}$$

$$\int_0^R |\chi_{kl}|^2 dr = 2\left[\left(R + \frac{d\delta_l}{dk}\right) - \frac{1}{2k}\sin 2(kR - \frac{\pi l}{2} + \delta_l)\right],$$

$$\delta_l(k) = \delta^{(0)}(k) + arctg\left(\frac{\Gamma}{2(E - E_0)}\right) = \delta^{(0)}(k) - arctg\left(\frac{k''}{k - k'}\right),$$

$$\boxed{\int_0^R |\chi_{kl}|^2 dr = \frac{v\Gamma}{(E - E_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}},}$$

$$\int_0^R |\chi_{kl}|^2 dr \approx \frac{v}{\Gamma},$$

$$\overline{|\chi_{kl}|^2} \approx \frac{v}{\Gamma R} = \frac{T}{(R/v)} >> 1.$$

Время соударения

$$\int_0^R |\chi_{kl}|^2 dr = T(E) I_-, \; I_- = v$$

$$\boxed{T(E) = \frac{\Gamma}{(E - E_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}}$$

$$\boxed{T(E) = \frac{2}{v}\left[\left(R + \frac{d\delta_l}{dk}\right) - \frac{1}{2k}\sin 2(kR - \frac{\pi l}{2} + \delta_l)\right]}$$

Координатная и энергетическая зависимость волновой функции задачи рассеяния в области резонанса

$$\boxed{\chi_{kl}(r)=\sqrt{\frac{v\Gamma}{(E-E_0)^2+\frac{\Gamma^2}{4}}}\,\chi_0(r),\qquad \int_0^R\left|\chi_0\right|^2dr=1}$$

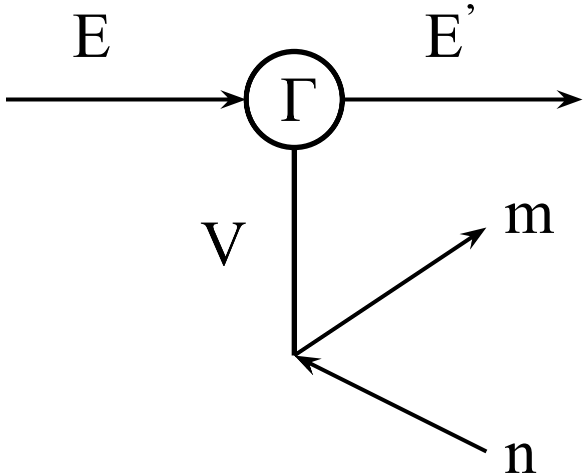
Резонанс в неупругом рассеянии

$$w=2\pi\int\left|\langle\Psi_f|V|\Psi_i\rangle\right|^2\delta(E_f-E_i)\,df,$$

$$\Psi_i=\Psi_{\mathbf{k}}(r)\Phi_0(r_a),$$

$$\Psi_{\mathbf{k}}(r)=\sum_l\sqrt{4\pi(2l+1)}\,\frac{i^l e^{i\delta_l}}{2k}\Psi_{kl}(r),$$

$$\Psi_f=\Psi_{\mathbf{k}'}(r)\Phi_{nm}(r_a)=e^{i\mathbf{k}'r}\Phi_{nm}(r_a)$$



$$\Psi_{kl}(r) = \sqrt{\frac{v\Gamma}{(E-E_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}}\Psi_0(r),$$

$$\Psi_i = \sqrt{4\pi(2l+1)}\frac{i^l e^{i\delta_l}}{2k}\sqrt{\frac{v\Gamma}{(E-E_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}}\Psi_0(r)\Phi_0(r_a),$$

$$w = \frac{\pi(2l+1)}{k^2}\frac{v\Gamma}{(E-E_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}2\pi\int\left|\langle\Psi_f|V|\Psi_0\rangle\right|^2\delta(E_f - E_i)df,$$

$$\Gamma_r = 2\pi\int\left|\langle\Psi_f|V|\Psi_0\rangle\right|^2\delta(E_f - E_i)df,$$

$$\boxed{\sigma_r = \frac{w}{v} = \frac{(2l+1)\pi}{k^2}\frac{\Gamma\Gamma_r}{(E-E_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}},} \quad \boxed{\sigma_r = \sigma_e\frac{\Gamma_r}{\Gamma}}$$

Многоканальное рассеяние

$$X_i + Y_i \leftrightarrow X_j + Y_j$$

Волновая функция многоканальной задачи

$$\Psi = \sum_i \left(\beta_i \psi_{k_i l}^{(+)}(\mathbf{r}_i) - \alpha_i \psi_{k_i l}^{(-)}(\mathbf{r}_i)\right)\Phi_i, \quad \Phi_i = \Phi_{X_i}\Phi_{Y_i},$$

$$\psi_{k_i l}^{(\pm)}(r_i > R) = \frac{1}{\sqrt{v_i}} \frac{e^{\pm i(k_i r_i - \frac{\pi l}{2})}}{r_i} Y_{lm}(\mathbf{n}_i),$$

$$k_i = \sqrt{2\mu_i(E - \Lambda_i)\mu_i}, \quad v_i = \frac{k_i}{\mu_i}, \quad \mu_i = \frac{m_{X_i} m_{Y_i}}{m_{X_i} + m_{Y_i}}$$

Если $E > \Lambda_i$ - i канал рассеяния открыт, $Im\{k_i\}=0$.
Если $E < \Lambda_i$ - i канал рассеяния закрыт, $Re\{k_i\}=0$, $\alpha_i=0$.

$$\boxed{(\beta) = (S)(\alpha)}$$

Размерность S - матрицы $m \otimes m$,
m - число открытых каналов.

Сечения рассеяния, разложение по парциальным волнам

$$\Psi = \frac{\sqrt{v_i}}{2ik_i}\sum_l \sqrt{4\pi(2l+1)}i^l\left(S_{ii}^{(l)}\psi_{k_i l}^{(+)}\Phi_i - \psi_{k_i l}^{(-)}\Phi_i + \sum_{j\neq i} S_{ji}^{(l)}\psi_{k_i l}^{(+)}\Phi_j\right) =$$

$$e^{i\mathbf{k}_i\mathbf{r}_i}\Phi_i + \frac{\sqrt{v_i}}{2ik_i}\sum_l \sqrt{4\pi(2l+1)}i^l\left((S_{ii}^{(l)}-1)\psi_{k_i l}^{(+)}\Phi_i + \sum_{j\neq i} S_{ji}^{(l)}\psi_{k_i l}^{(+)}\Phi_j\right).$$

Волновая функция на бесконечности

$$\Psi(r\to\infty) = e^{i\mathbf{k}_i\mathbf{r}_i}\Phi_i + \frac{e^{ik_i r_i}}{r_i}\sum_l (2l+1)P_l(\cos\vartheta_i)\frac{(S_{ii}^{(l)}-1)}{2ik_i}\Phi_i +$$

$$\sum_{j\neq i}\frac{e^{ik_j r_j}}{r_j}\sum_l (2l+1)P_l(\cos\vartheta_i)\frac{S_{ji}^{(l)}}{2i\sqrt{k_i k_j}}\Phi_j, \quad S_{ji}^{(l)} = \delta_{ij} + 2i\sqrt{k_i k_j}\, f_{ji}^{(l)}$$

$$f_{ji}^{(l)} = \frac{(S_{ji}^{(l)} - \delta_{ij})}{2i\sqrt{k_i k_j}}$$ *- амплитуда рассеяния*

Дифференциальные сечение рассеяния

$$\frac{d\sigma_e}{d\Omega_i} = \frac{d\sigma_{ii}}{d\Omega_i} = \left| f_{ii}(\vartheta) \right|^2, \quad \frac{d\sigma_{ji}}{d\Omega_i} = \frac{v_j}{v_i} \left| f_{ji}(\vartheta) \right|^2,$$

$$f_{ji}(\vartheta) = \sum_l (2l+1) P_l(\cos\vartheta)\, f_{ji}^{(l)}$$

Полные сечение рассеяния

$$\sigma_{ii} = \sum_l \sigma_{ii}^{(l)} = 4\pi \sum_l (2l+1) \left| f_{ii}^{(l)} \right|^2 = \frac{\pi}{k_i^2} \sum_l (2l+1) \left| S_{ii}^{(l)} - 1 \right|^2$$

$$\sigma_{ji} = \sum_l \sigma_{ji}^{(l)} = 4\pi \frac{v_j}{v_i} \sum_l (2l+1) \left| f_{ji}^{(l)} \right|^2 = \frac{\pi}{k_i^2} \sum_l (2l+1) \left| S_{ji}^{(l)} \right|^2$$

$$\sigma_{ji} = \sum_l \sigma_{ji}^{(l)} = \frac{\pi}{k_i^2} \sum_l (2l+1) \left| S_{ji}^{(l)} - \delta_{ij} \right|^2$$

Сечение упругого рассеяния

$$\sigma_e = \sigma_{ii},$$

Сечение неупругого рассеяния

$$\sigma_r = \sum_{j \neq i} \sigma_{ji},$$

Полное сечение

$$\sigma_t = \sigma_e + \sigma_r$$

Условие унитарности

$\Psi = \sum_i \left(\beta_i \psi_{i,l}^{(+)} - \alpha_i \psi_{i,l}^{(-)}\right)\Phi_i$ ***- парциальная волна с моментом l***

$$I^{(-)} = \sum_i \left|\alpha_i\right|^2, \quad I^{(+)} = \sum_j \left|\beta_j\right|^2 = \sum_j \left|\sum_i S_{ji}^{(l)} \alpha_i\right|^2 = \sum_{i,j} S_{jk}^{(l)*} S_{ji}^{(l)} \alpha_i \alpha_k^*$$

Закон сохранения числа частиц: $I^{(+)} = I^{(-)}$

$$\boxed{\sum_j S_{ji}^{(l)} S_{jk}^{(l)*} = \delta_{ik}, \quad \mathbf{S}^{(l)} \mathbf{S}^{(l)+} = \mathbf{1}}$$

$$\sum_j \left|S_{ji}^{(l)}\right|^2 = 1, \quad \left|S_{ii}^{(l)}\right|^2 = 1 - \sum_{j \neq i} \left|S_{ji}^{(l)}\right|^2 < 1, \quad \delta_l = \delta_l' + i\delta_l'',$$

$$\sum_{j \neq i} \left|S_{ji}^{(l)}\right|^2 = 1 - \left|S_{ii}^{(l)}\right|^2, \quad \sigma_e^{(l)} = \frac{\pi}{k_i^2}(2l+1)\left|S_{ii}^{(l)} - 1\right|^2,$$

$$\sigma_r^{(l)} = \frac{\pi}{k_i^2}(2l+1)\left(1 - \left|S_{ii}^{(l)}\right|^2\right), \quad \sigma_t^{(l)} = \frac{\pi}{k_i^2}(2l+1)\left(1 - 2\,\mathrm{Re}\, S_{ii}^{(l)}\right),$$

$$S_{ii}^{(l)} = 1, \quad \sigma_e^{(l)} = \sigma_r^{(l)} = 0,$$

$$\left|S_{ii}^{(l)}\right| = 1, \quad \sigma_e^{(l)} \neq 0, \quad \sigma_r^{(l)} = 0,$$

$$S_{ii}^{(l)} = 0, \quad \sigma_e^{(l)} = \sigma_r^{(l)} = \sigma_0^{(l)} = \frac{\pi}{k_i^2}(2l+1),$$

$$\sigma_r^{(l)} = \sigma_0^{(l)} - \frac{\pi}{k_i^2}(2l+1)\left|S_{ii}^{(l)}\right|^2,$$

$$1 - \left|S_{ii}^{(l)}\right| \leq \left|S_{ii}^{(l)} - 1\right| \leq \left|S_{ii}^{(l)}\right| + 1,$$

$$\sqrt{\sigma_0^{(l)}} - \sqrt{\sigma_0^{(l)} - \sigma_r^{(l)}} \leq \sqrt{\sigma_e^{(l)}} \leq \sqrt{\sigma_0^{(l)}} + \sqrt{\sigma_0^{(l)} - \sigma_r^{(l)}}.$$

Оптическая теорема

$$\sum_j \left| S_{ij}^{(l)} \right|^2 = 1,$$

$$\sum_j (\delta_{ij} - 2i\sqrt{k_i k_j}\, f_{ji}^{(l)*})(\delta_{ji} + 2i\sqrt{k_i k_j}\, f_{ji}^{(l)}) = 1,$$

$$\mathrm{Im}\{ f_{ii}^{(l)} \} = \sum_j k_j \left| f_{ji}^{(l)} \right|^2 = \frac{k_i}{4\pi} \frac{\sigma_t^{(l)}}{(2l+1)},$$

$$\mathrm{Im}\{ f_e(0) \} = \mathrm{Im}\{ \sum_l (2l+1) f_{ji}^{(l)} \} = \frac{k_i}{4\pi} \sigma_t\,,$$

$$\boxed{\mathrm{Im}\{ f_e(0) \} = \frac{k_i}{4\pi} \sigma_t}$$

Обратимость времени, теорема взаимности

$$t \rightarrow -t \qquad \Psi \rightarrow \Psi^{*}$$

$$\chi_{k_i l}^{(\pm)*} = \chi_{k_i l}^{(\mp)}, \quad \left(S_l(k)\right)^{*} = 1/S_l(k), \quad S_l^{*}(k^{*}) = 1/S_l(k)$$

Условие унитарности $\quad S_l(k)^{+} = 1/S_l(k)$

Симметричность S - матрицы $\quad \tilde{S}_l(k) = S_l(k), \quad S_{ij}^{(l)} = S_{ji}^{(l)}$

Теорема взаимности

$$f(\mathbf{p}_j, \mathbf{p}_i) = \frac{4\pi}{2i\sqrt{k_j k_i}} \sum_{lm} S_{ji}^{(l)} Y_{lm}(\mathbf{p}_i) Y_{lm}^{*}(\mathbf{p}_j), \quad Y_{lm}^{*}(\mathbf{n}) = (-1)^{l-m} Y_{l-m}^{*}(-\mathbf{n}),$$

$$\boxed{f(\mathbf{p}_j, \mathbf{p}_i) = f(-\mathbf{p}_i, -\mathbf{p}_j).}$$

Принцип детального равновесия

$$\boxed{\frac{d\sigma_{ji}}{p_j^2 d\Omega_j} = \frac{d\sigma_{ij}}{p_i^2 d\Omega_i}}$$

Аналитические свойства

Точки ветвления $E=\Lambda_i, \quad k_1=\sqrt{2m_1(\Lambda_i-\Lambda_1)}$

Полюса на физическом листе E < Λ₁, , Re{kᵢ}=0, Im{kᵢ}>0

Связанные состояния $E=E_0<\Lambda_1$, $\Psi \propto \Psi$

(+)

$$\Psi_0=\sum_i A_i\Psi_i^{(+)}\Phi_i \xrightarrow[r>R]{} \sum_i A_i\frac{e^{-|k_{0i}|r_i}}{r_i}Y_{lm}(\mathbf{n}_i)\Phi_i,$$

$$k_{0i}=\sqrt{2\mu_i(E_0+\Lambda_i)}.$$

Волновая функция задачи рассеяния $\Psi_i=-\psi^{(-)}_{k_il}\Phi_i+\sum_j S^{(l)}_{ji}\psi^{(+)}_{k_jl}\Phi_j$

$$\Psi_{k_i\to k_{i0}}\to\Psi_0, \quad S^{(l)}_{ji}=\frac{C_{ji}}{k_1-k_{10}}, \quad C_{ji}=\sqrt{v_j}A_jb_i,$$

$$\Psi_i(k_i\to k_{i0})=\frac{b_i}{\varepsilon_1}\Psi_0 \quad k_i=k_{i0}+\varepsilon_i, \quad \varepsilon_i=\varepsilon_j\frac{v_j}{v_i}$$

Условие непрерывности

$$\frac{\partial}{\partial t}\int |\Psi_i|^2 dV = -\oint \mathbf{j}d\mathbf{S} = \sum_j \frac{i}{2\mu_j}\oint\left(\psi^*_{k_jl}\nabla\psi_{k_jl} - \psi_{k_jl}\nabla\psi^*_{k_jl}\right)d\mathbf{S}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^R |\Psi_i|^2 dV = \sum_j \frac{i}{2\mu_j}\left(\chi^*_{k_jl}\frac{d}{dr}\chi_{k_jl} - \chi_{k_jl}\frac{d}{dr}\chi^*_{k_jl}\right)_{r=R}, \quad \Psi_i \to \frac{\varepsilon_1}{b_i}\Psi_i$$

$$\frac{\partial}{\partial t}|\Psi_i|^2 = \frac{2k_i'k_i''}{\mu_i}|\Psi_i|^2 = \frac{2\varepsilon_i\kappa_i}{\mu_i}|\Psi_i|^2, \quad \chi_{k_jl} = \left(A_j e^{-\kappa_j r_j + i\varepsilon_j r_j} - \delta_{ij}\frac{(-1)^l\varepsilon_1}{b_i\sqrt{v_i}}e^{\kappa_i r_i - i\varepsilon_i r_i}\right)$$

$$\frac{i}{2\mu_i}\left(\chi^*_{k_il}\frac{d}{dr}\chi_{k_il} - \chi_{k_jl}\frac{d}{dr}\chi^*_{k_il}\right)_{r=R} = i(-1)^l\frac{\varepsilon_1\kappa_i}{\mu_i}\left(\frac{A_i}{(\sqrt{v_i}b_i)^*} - \frac{A_i^*}{\sqrt{v_i}b_i}\right)$$

$$\frac{2\varepsilon_i\kappa_i}{\mu_i}\int_0^R |\Psi_i|^2 dr = i(-1)^l\frac{2\varepsilon_1\kappa_i}{\mu_i}\left(\frac{A_i}{(\sqrt{v_i}b_i)^*} - \frac{A_i^*}{\sqrt{v_i}b_i}\right), \quad b_i = i(-1)^{l+1}A_i^*\frac{\sqrt{v_i}}{v_1},$$

$$\boxed{C_{ji}^{(l)} = i(-1)^{l+1}A_i^* A_j\frac{\sqrt{v_j v_i}}{v_1}}$$

Формула Брейта - Вигнера

Резонансное рассеяние на квазидискретном уровне

$E = E_0 - i\Gamma/2$, Γ □ E_0.

$$S_{ji}^{(l)}(k_1 \to k_{10}) \approx \frac{i(-1)^{l+1}\sqrt{v_j v_i}A_i A_j}{v_1(k_1 - k_{10})} = \frac{i(-1)^{l+1}\sqrt{v_j v_i}A_i A_j}{E - E_0 + i\frac{\Gamma}{2}},$$

$$f_{ji}^{(l)} = \delta_{ij}\frac{(e^{2i\delta_i} - 1)}{2ik_i} - \frac{ie^{i(\delta_i + \delta_j)}\sqrt{\Gamma_j \Gamma_i}}{2i\sqrt{k_i k_j}\left(E - E_0 + i\frac{\Gamma}{2}\right)}, \quad \Gamma_i = v_i |A_i|^2$$ ***- поток частиц сорта i***

Условие унитарности $\mathrm{Im}\{f_{ii}^{(l)}\} = \sum_j k_j \left| f_{ji}^{(l)} \right|^2, \quad \Gamma = \sum_i \Gamma_i$

$\Gamma_i = v_i|A_i|^2$ - парциальная ширина, $\Gamma = \Sigma_i \Gamma_i$ - полная ширина.

$$\sigma_e^{(l)} = 4\pi(2l+1)\left| f_{ii}^{(l)} \right|^2, \quad \sigma_{rj}^{(l)} = \frac{\pi(2l+1)}{k_i^2}\frac{\Gamma_i \Gamma_j}{(E - E_0)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}$$

Рассеяние через образование промежуточного квазистационарного состояния, прямое рассеяние

$$\sigma_e = \frac{\pi(2l+1)}{k_i^2}\left(\frac{\Gamma_e^2}{(E-E_0)^2+\frac{\Gamma^2}{4}} + 4\,\mathrm{Re}\left(\frac{\Gamma_e e^{i\delta_e}\sin\delta_i}{E-E_0+\frac{i\Gamma}{2}}\right) + 4\sin^2\delta_e\right),$$

$$\sigma_r = \frac{\pi(2l+1)}{k_i^2}\frac{\Gamma_e\Gamma_r}{(E-E_0)^2+\frac{\Gamma^2}{4}},\quad \Gamma_r = \Gamma-\Gamma_e,\quad \Gamma_e=\Gamma_i,\quad \delta_e=\delta_i$$

Сечение образования промежуточного квазистационарного состояния в пренебрежении каналом прямого потенциального рассеяния

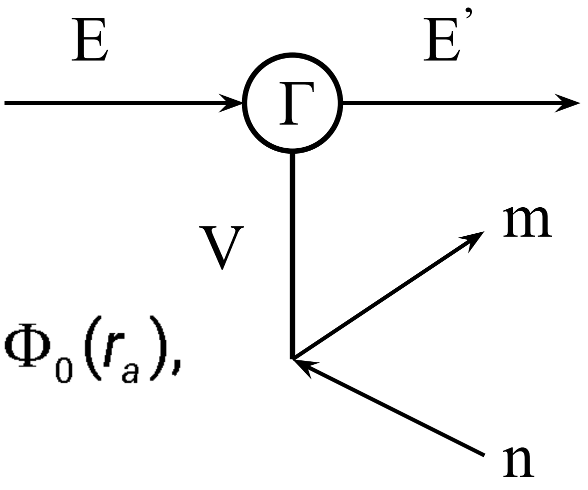
$$\sigma_t = \frac{\pi(2l+1)}{k_i^2}\frac{\Gamma_e\Gamma}{(E-E_0)^2+\frac{\Gamma^2}{4}},\quad \sigma_e=\frac{\Gamma_e}{\Gamma}\sigma_t,\quad \sigma_{ri}=\frac{\Gamma_{ri}}{\Gamma}\sigma_t.$$

Резонансы формы

Пример: ***Неупругое резонансное рассеяние с возбуждением мишени***

$$w = 2\pi \int \left| \langle \Psi_f | V | \Psi_i \rangle \right|^2 \delta(E_f - E_i) df,$$

$$\Psi_i = \psi_{\mathbf{k}}(r)\Phi_0(r_a), \quad \Psi_f = \psi_{\mathbf{k}'}(r)\Phi_{nm}(r_a).$$



$$\Psi_i = \sqrt{4\pi(2l+1)} \frac{i^l e^{i\delta_l}}{2k} \sqrt{\frac{v\Gamma}{(E-E_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}} \psi_0(r)\Phi_0(r_a),$$

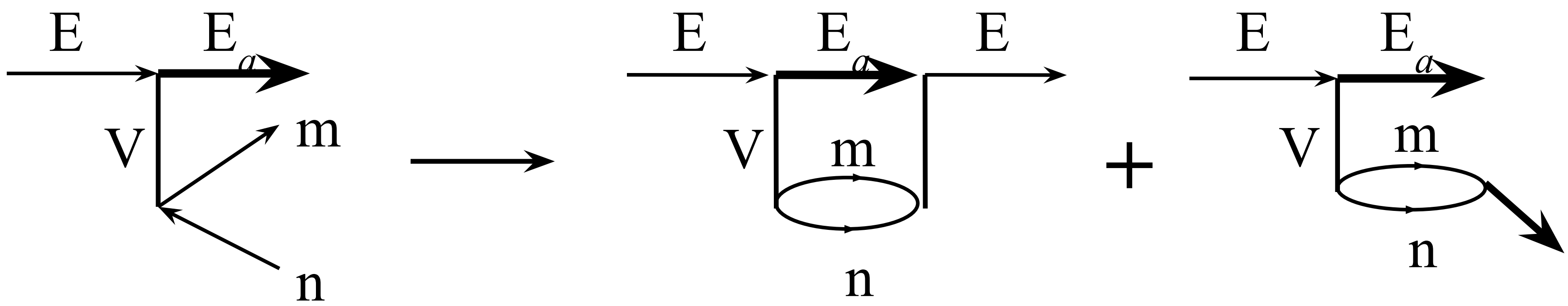
$$w = \frac{\pi(2l+1)}{k^2} \frac{v\Gamma}{(E-E_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} 2\pi \int \left| \langle \Psi_f | V | \Psi_0 \rangle \right|^2 \delta(E_f - E_i) df,$$

$$\Gamma_r = 2\pi \int \left| \langle \Psi_f | V | \Psi_0 \rangle \right|^2 \delta(E_f - E_i) df, \quad \Gamma_r << \Gamma_e = \Gamma,$$

$$\sigma_r = \frac{w}{v} = \frac{(2l+1)\pi}{k^2} \frac{\Gamma\Gamma_r}{(E-E_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}, \quad \sigma_r = \sigma_e \frac{\Gamma_r}{\Gamma}$$

Резонансы Фешбаха

Пример: *Резонансное рассеяние с образованием автоионизационного состояния.*



Автоионизационная ширина

$$\Gamma_e = \Gamma_a = 2\pi \int \left| \left\langle \psi_E \Phi_0 \middle| V \middle| \psi_a \Phi_{nm} \right\rangle \right|^2 \delta(E - E_a - E_{nm})\, dE,$$

Неупругая ширина

$$\Gamma_r = 2\pi \int \left| \left\langle \psi_a \Phi_f \middle| V \middle| \psi_a \Phi_{nm} \right\rangle \right|^2 \delta(E_f - E_a - E_{nm})\, df,$$

Сечение резонансного рассеяния

$$\sigma_e = \frac{\pi(2l+1)}{k_i^2} \frac{\Gamma_a^2}{(E-E_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}.$$

Сечение захвата

$$\sigma_{att} = \frac{\pi(2l+1)}{k^2} \frac{\Gamma_a \Gamma_r}{(E-E_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}, \quad \Gamma = \Gamma_a + \Gamma_r.$$

Оптическая модель рассеяния

Большое число плотно расположенных резонансов

Усредненные сечения, l=0 $\sigma_t = \frac{\pi}{k_i^2}(1 - 2\,\mathrm{Re}\, S_{ii}),$

$$\sigma_e^{opt} = \frac{\pi}{k_i^2}\left|S_{ii} - 1\right|^2, \quad \sigma_a^{opt} = \sigma_t - \sigma_e^{opt} = \frac{\pi}{k_i^2}\left(1 - \left|S_{ii}\right|^2\right).$$

Усреднение S матрицы, Γ << D.

$$S_{ii}^{(l)} = \left(1 - \frac{i\Gamma_e}{E - E_0 + i\frac{\Gamma}{2}}\right)e^{2i\delta_e}, \quad S_{ii}^{(l)} = \left(1 - \frac{\pi\Gamma_e}{D}\right)e^{2i\delta_e},$$

$$\boxed{\sigma_a^{opt} = \frac{\pi}{k_i^2}\frac{2\pi\Gamma_e}{D}.}$$

Принцип детального равновесия:

$$\frac{\sigma_{ji}p_i^2}{2\pi^2} = \frac{\sigma_{ij}p_j^2}{2\pi^2} = \sigma_{ij}v_j\rho_j = I_{ij}, \; \rho = \frac{4\pi p}{m(2\pi)^3}, \; w = \sigma v,$$

$$\sigma_a^{opt} \le \sigma_0 = \frac{\pi}{k_i^2},$$

$$\sigma_a^{opt} = \frac{2\pi^2}{k_i^2}w_d\rho = \frac{2\pi^2}{k_i^2}\frac{\Gamma_e}{D}$$

$$\frac{2\pi\Gamma_e}{D} \le 1$$

Пороговые явления

$$E \approx \Lambda_i,\ T_i = E - \Lambda_i \to 0$$

Пример: $i=1,2;\ E \approx \Lambda,\ T_2 \to 0,\ k_2R \ll 1$

Волновая функция задачи рассеяния частицы 1

$$\Psi_1 = -\psi^{(-)}_{k_1 l}\,\Phi_1 + S^{(l)}_{11}\psi^{(+)}_{k_1 l}\,\Phi_1 + S^{(l)}_{21}\psi^{(+)}_{k_2 l}\,\Phi_2$$

Условие сшивания при r=R

$$\psi^{(+)}_{k_2 l}(r_2 >> R) = \frac{1}{\sqrt{v_2}}\frac{e^{i(k_2 r_2 - \frac{\pi l}{2})}}{r_2}Y_{lm}(\mathbf{n}_i), \quad \psi^{(+)}_{k_2 l}(r_2 \approx R) \propto \frac{1}{k_2^{l+1/2}}, \quad k_2 R << 1,$$

$$S^{(l)}_{21}\psi^{(+)}_{k_2 l}(r_2 = R) = \psi^{(\mathrm{int})}_{2,l}, \quad S^{(l)}_{21} \approx \frac{1}{\psi^{(+)}_{k_2 l}(r_2 \approx R)} \propto k_2^{l+1/2},$$

$$\sigma^{(l)}_{21} = \frac{\pi}{k_1^2}\sum_l (2l+1)\left|S^{(l)}_{21}\right|^2 \propto k_2^{2l+1}, \quad \sigma^{(l)}_{12} = \frac{k_1^2}{k_2^2}\sigma^{(l)}_{21} \propto k_2^{2l-1},$$

$$\boxed{\sigma_{21} \propto v_2, \quad \sigma_{12} \propto 1/v_2}$$ *- закон 1/v*

Закон 1/v и теория возмущений

$$\sigma_{21}=\frac{2\pi}{v_1}\int\left|\left\langle\Psi_{k_2}\middle|V\middle|\Psi_{k_1}\right\rangle\right|^2\delta\left(\frac{k_2^2}{2\mu_2}+\Lambda-\frac{k_1^2}{2\mu_1}\right)\frac{dk_2^3}{(2\pi)^3}=$$

$$\frac{2\pi}{v_1}\left|\left\langle\Psi_{k_2}\middle|V\middle|\Psi_{k_1}\right\rangle\right|^2\frac{4\pi k_2\mu_2}{(2\pi)^3}\propto v_2=\sqrt{2(E-\Lambda)/\mu_2},$$

$$\sigma_{12}=\frac{2\pi}{v_2}\int\left|\left\langle\Psi_{k_1}\middle|V\middle|\Psi_{k_2}\right\rangle\right|^2\delta\left(\frac{k_2^2}{2\mu_2}+\Lambda-\frac{k_1^2}{2\mu_1}\right)\frac{dk_1^3}{(2\pi)^3}\propto 1/v_2$$

$$\sigma_t=\sigma_{22}+\sigma_{12}$$

Волновая функция $\psi^{(+)}$ в классически недоступной области $r<\rho=l/k$

$$\chi_{kl}^{(+)}(r>>\rho)=\frac{1}{\sqrt{v}}e^{i(kr-\frac{\pi l}{2})},\quad \chi_{kl}^{(+)}(r<\rho)\approx\frac{1}{\sqrt{v(r)}}e^{\int_r^\rho|k(r)|dr}=$$

$$\frac{1}{\sqrt{v(r)}}e^{\int_r^\rho\sqrt{2m(\frac{(l+1/2)^2}{2mr^2}-E)}dr}\approx\frac{1}{\sqrt{v(r)}}\left(\frac{\rho}{r}\right)^{l+\frac{1}{2}}\propto\frac{1}{k^{l+1/2}}$$

Пороговое поведение сечения рождения заряженных частиц.

1. Притяжение, $q_x q_y < 0$, отсутствие потенциального барьера $l^2 < |q_x q_y| mR$

$$\chi_{kl}^{(+)}(r >> R) = \frac{1}{\sqrt{v}} e^{i\left(kr + \frac{|q_x q_y|}{v}\ln(2kr) - \frac{\pi l}{2}\right)} \propto 1/\sqrt{v}, \quad \chi_{kl}^{(+)}(r \approx R) \propto const$$

$$S_{21}^{(l)} \approx \frac{1}{\psi_{k_2 l}^{(+)}(r_2 \approx R)} \propto const \quad \boxed{\sigma_{21}^{(l)} \propto const \quad \sigma_{12}^{(l)} = \frac{k_1^2}{k_2^2}\sigma_{21}^{(l)} \propto v_2^{-2}}$$

2. Отталкивание, $q_x q_y > 0$, отсутствие потенциального барьера $l^2 < |q_x q_y| mR$

Волновая функция $\psi^{(+)}$ в классически недоступной области $q_x q_y / r > (E - \Lambda_2)$

$$\chi_{kl}^{(+)}(r >> r_0 = q_x q_y / E) = \frac{1}{\sqrt{v}} e^{i\left(kr - \frac{q_x q_y}{v}\ln(2kr) - \frac{\pi l}{2}\right)} \propto 1/\sqrt{v},$$

$$\chi_{kl}^{(+)}(r < r_0) \approx \frac{1}{\sqrt{v(r)}} e^{\int_r^{r_0} |k(r)| dr} = \frac{1}{\sqrt{v(r)}} e^{\int_r^{r_0} \sqrt{2m\left(\frac{q_x q_y}{r} - E\right)} dr} \approx \frac{1}{\sqrt{v(r)}} e^{\frac{\pi q_x q_y}{\sqrt{2E/m}}} \propto e^{\frac{\pi q_x q_y}{v}},$$

$$S_{21}^{(l)} \approx \frac{1}{\psi_{k_2 l}^{(+)}(r_2 \approx R)} \propto e^{-\frac{\pi q_x q_y}{v_2}}, \quad \boxed{\sigma_{21}^{(l)} \propto e^{-\frac{2\pi q_x q_y}{v_2}}, \quad \sigma_{12}^{(l)} = \frac{k_1^2}{k_2^2}\sigma_{21}^{(l)} \propto v_2^{-2} e^{-\frac{2\pi q_x q_y}{v_2}}}$$

Поведение упругого сечения вблизи порога $E \approx \Lambda_2$

1. E □ Λ_2

$$S_{21}^{(l)} \propto k_2^{l+1/2}, \quad \left|S_{11}^{(l)}\right| = \sqrt{1-\left|S_{21}^{(l)}\right|^2} = 1-\frac{1}{2}Ak_2^{2l+1}, \quad A>0,$$

$$S_{11}^{(l)} = e^{2i\delta_l^{(0)}}\left(1-\frac{1}{2}Ak_2^{2l+1}\right), \quad \mathrm{Im}\{\delta_l^{(0)}\} = 0.$$

2. E □ Λ_2

$$S_{11}^{(l)} = e^{2i\delta_l^{(0)}}\left(1-\frac{1}{2}Ak_2^{2l+1}\right), \quad \left|S_{11}^{(l)}\right| = 1, \quad \mathrm{Im}\{\delta_l^{(0)}\} = O\left(k_2^{2(l+1)}\right),$$

$$\delta_l^{(0)}(k_2) = \delta_l^{(0)}(0) + ak_2^2 + \ldots \approx \delta_l^{(0)}(0) \equiv \delta_l\ ,$$

$$S_{11}^{(0)} = e^{2i\delta_0}\left(1-\frac{1}{2}Ak_2\right), \quad S_{11}^{(l)} = e^{2i\delta_l}\ ,$$

$$f_{11}(\vartheta,E) = f_{11}(\vartheta,\Lambda) - \frac{Ak_2}{4ik_1}e^{2i\delta_0} = f_{11}(\vartheta,\Lambda) - \frac{A\sqrt{2\mu_2(E-\Lambda)}}{4ik_1}e^{2i\delta_0}$$

Дифференциальное сечение рассеяния

$$\frac{d\sigma_e}{d\Omega} = \left| f_{11}(\vartheta, E) \right|^2 = \left| f_{11}(\vartheta, \Lambda) \right|^2 + \frac{A\sqrt{2\mu_2(E-\Lambda)}}{2k_1} \operatorname{Im}\{ f_{11}(\vartheta, \Lambda) e^{-2i\delta_0} \}, \; \boldsymbol{E \square \Lambda_2,}$$

$$\frac{d\sigma_e}{d\Omega} = \left| f_{11}(\vartheta, E) \right|^2 = \left| f_{11}(\vartheta, \Lambda) \right|^2 - \frac{A\sqrt{2\mu_2(\Lambda - E)}}{2k_1} \operatorname{Re}\{ f_{11}(\vartheta, \Lambda) e^{-2i\delta_0} \}, \; \boldsymbol{E \square \Lambda_2.}$$

$$\frac{d\sigma_e}{d\Omega} = \left| f_e(\vartheta, E) \right|^2 = \left| f_e(\vartheta, \Lambda) \right|^2 - \frac{A\sqrt{2\mu_2 \left| E - \Lambda \right|}}{2k_1} \left| f_e(\vartheta, \Lambda) \right| \bullet \begin{cases} \sin(2\delta_0\text{-}\alpha) \; \boldsymbol{E \square \Lambda_2,} \\ \cos(2\delta_0\text{-}\alpha) \; \boldsymbol{E \square \Lambda_2.} \end{cases}$$

$$f_e(\vartheta, \Lambda) = \left| f_e(\vartheta, \Lambda) \right| e^{i\alpha}$$

Полное сечение рассеяния

$$\sigma_e(E) = \sigma_e(\Lambda) - 2\pi A\sqrt{2\mu_2 \left| E - \Lambda \right|} \bullet \begin{cases} \sin^2(\delta_0) \; \boldsymbol{E \square \Lambda_2,} \\ \cos(2\delta_0)/2 \; \boldsymbol{E \square \Lambda_2.} \end{cases}$$

Взаимодействие в конечном состоянии при реакциях
Резонанс при рождении медленных частиц

$$\sigma_{21} = \frac{2\pi}{v_1} \int \left| \left\langle \Psi_{k_2} \middle| V \middle| \Psi_{k_1} \right\rangle \right|^2 \delta\left(\frac{k_2^2}{2\mu_2} + \Lambda - \frac{k_1^2}{2\mu_1} \right) \frac{dk_2^3}{(2\pi)^3} =$$

$$\frac{2\pi}{v_1} \left| \left\langle \Psi_{k_2} \middle| V \middle| \Psi_{k_1} \right\rangle \right|^2 \frac{4\pi k_2 \mu_2}{(2\pi)^3}, \quad \psi_{k_2} = e^{i\mathbf{k}_2\mathbf{r}_2} - \frac{1}{\kappa + ik_2} \frac{e^{ik_2 r_2}}{r},$$

$$\sigma_{21} \propto \frac{k_2}{k_2^2 + \kappa^2} \propto \frac{\sqrt{E - \Lambda}}{E - \Lambda + |\varepsilon|}, \quad \varepsilon = -\frac{\kappa^2}{2\mu_2}$$