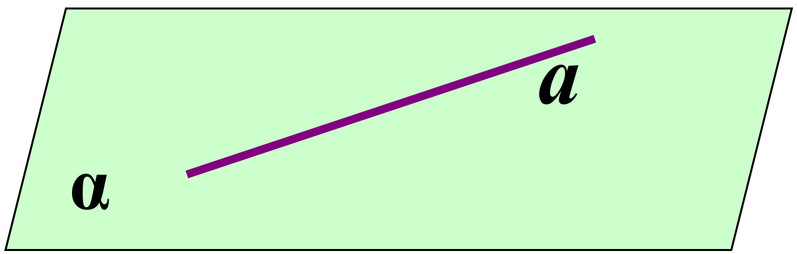
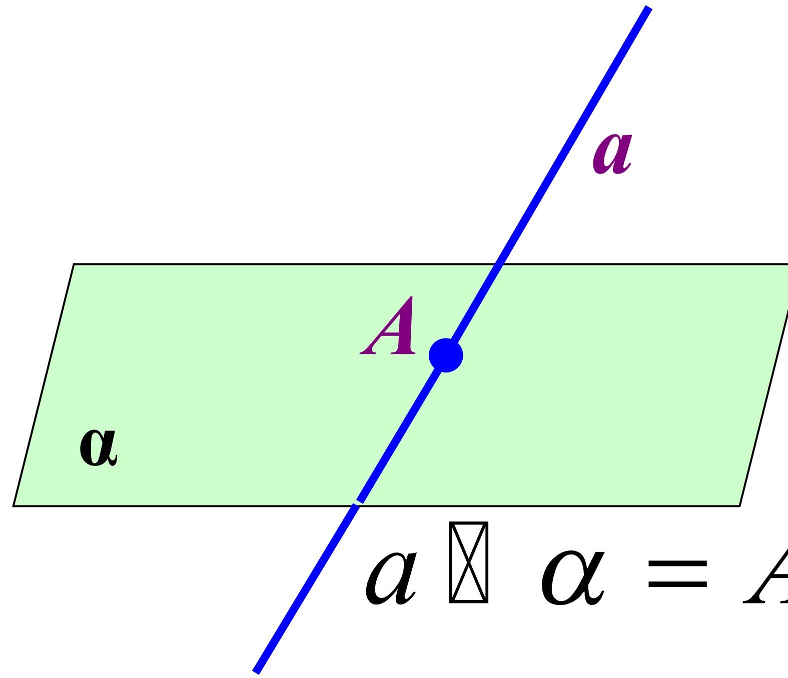
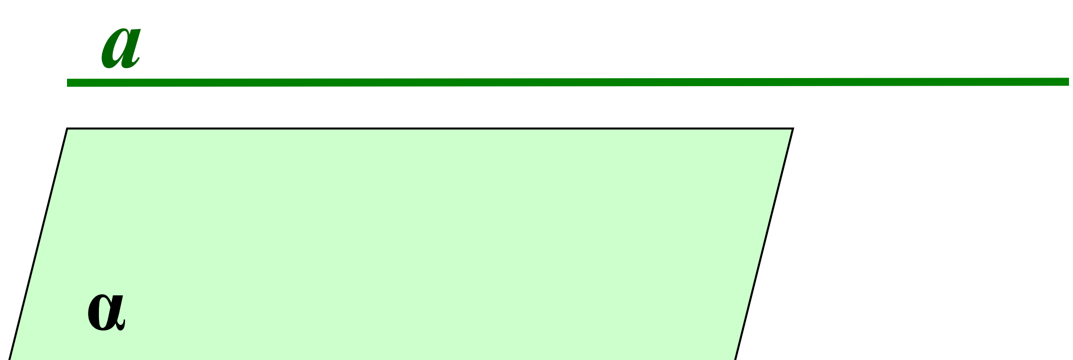
Взаимное расположение прямой и плоскости



$a \subset \alpha$



$a \cap \alpha = A$



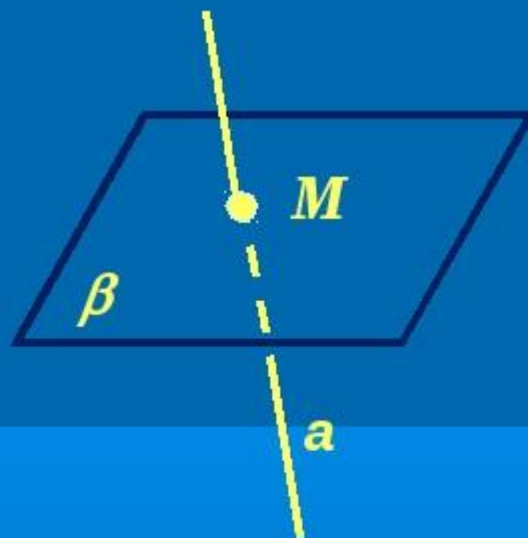
Взаимное расположение прямой и плоскости.

Прямая лежит в плоскости.

$a \in \alpha$

Множество общих точек.

Прямая пересекает плоскость.



$a \cap \beta = M$

Единственная общая точка.

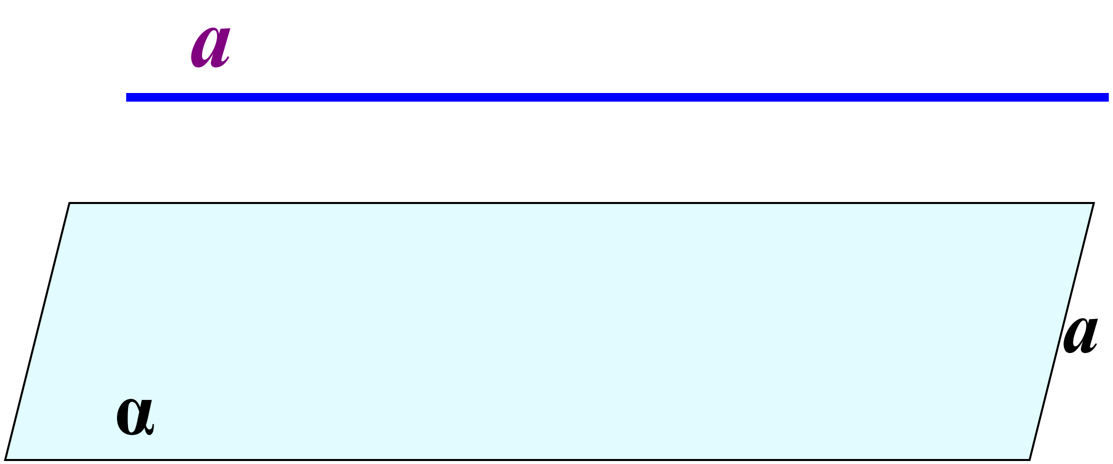
Прямая не пересекает плоскость.

$a \notin \gamma$

Нет общих точек.

Определение параллельности прямой и плоскости

Прямая и плоскость называются параллельными, если они не имеют общих точек

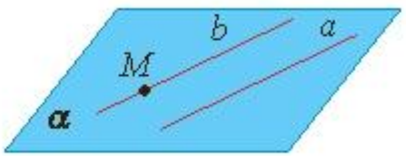


$a \parallel \alpha$

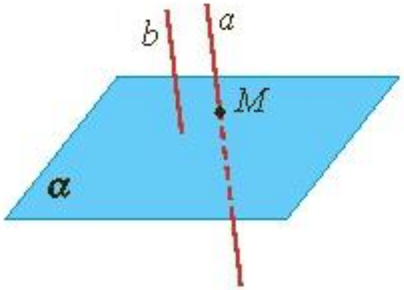
Параллельные прямые в пространстве

Две прямые в пространстве называются **параллельными**, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются

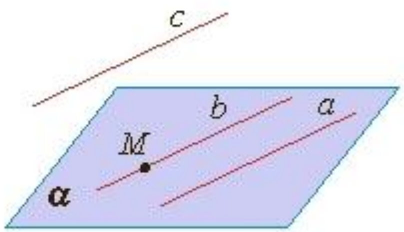
Теорема о параллельных прямых.
Через любую точку пространства, не лежащую на данной прямой, проходит прямая, параллельная данной, и притом только одна.



Лемма о пересечении плоскости параллельными прямыми. Если одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость.



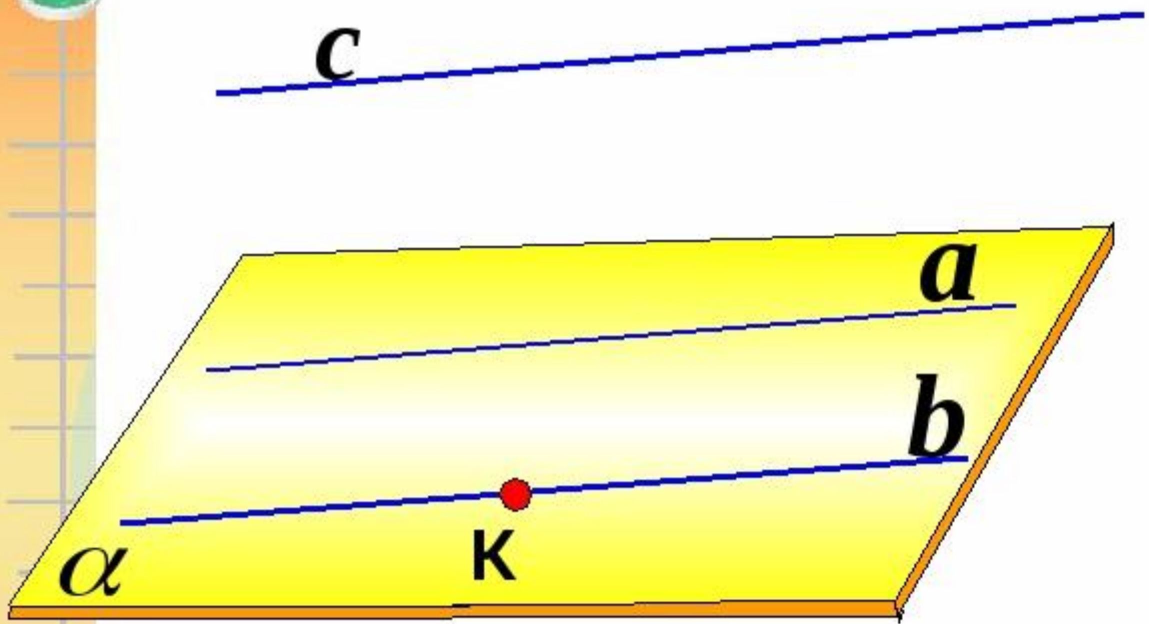
Теорема о трех прямых в пространстве. Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны



Теорема **Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны.**

$a \parallel c$, $b \parallel c$

Докажем, что $a \parallel b$



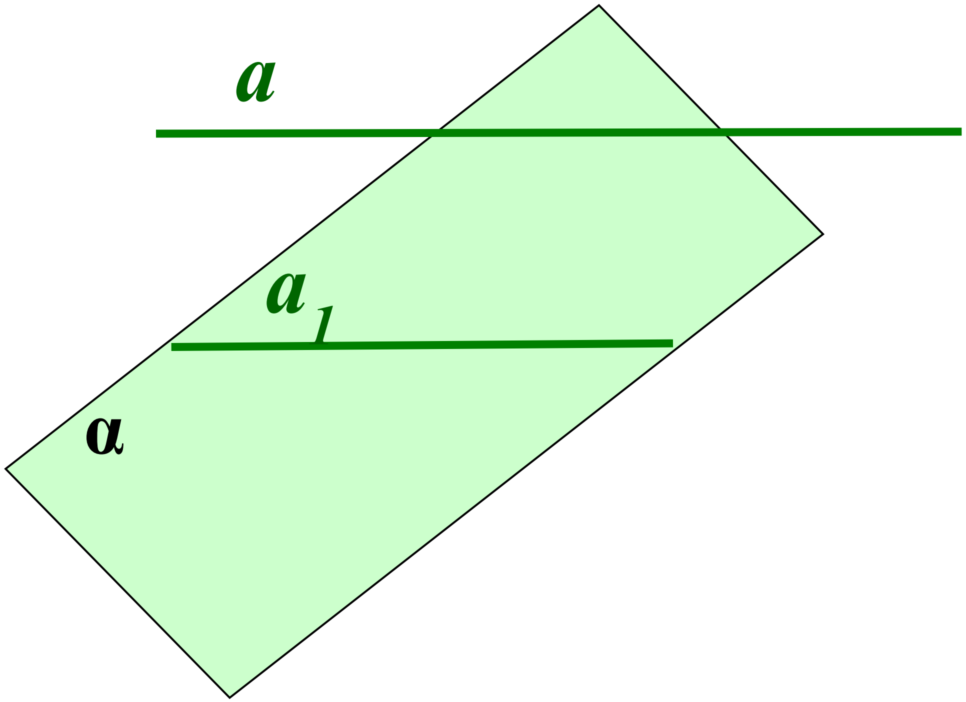
Докажем, что **a** и **b**

1) Лежат в одной плоскости
2) не пересекаются

Точка К и прямая **a** определяют плоскость.

Докажем, что прямая ***b*** лежит в этой плоскости.
Допустим, что прямая ***b*** пересекает плоскость α. Тогда по лемме ***c*** также пересекает α. По лемме и ***a*** также пересекает α . Это невозможно, т.к. ***a*** лежит в плоскости α

Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-нибудь Прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна и самой плоскости

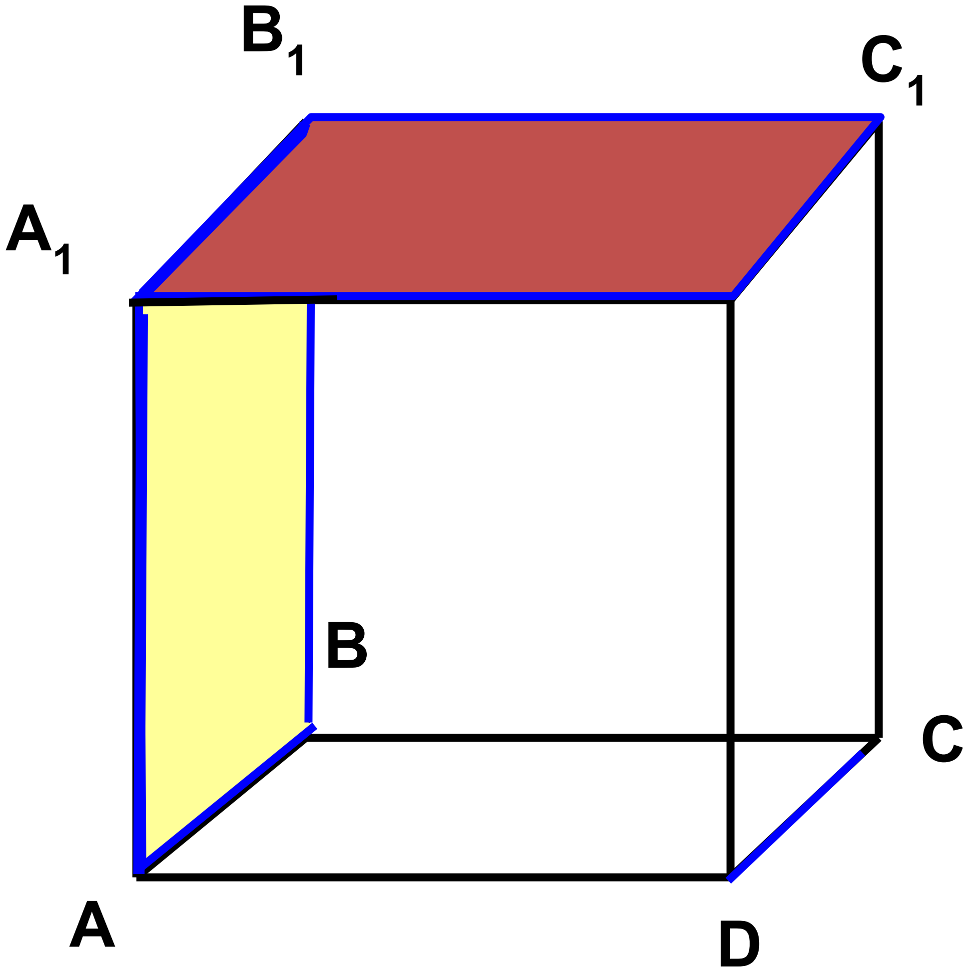


$$\left.\begin{array}{l} a \not\subset \alpha \\ a \parallel a_1 \\ a_1 \subset \alpha \end{array}\right| \quad a \parallel \alpha$$

На модели куба укажите плоскости, параллельные прямой DC, прямой DD_1

$DC \parallel (AA_1B_1)$

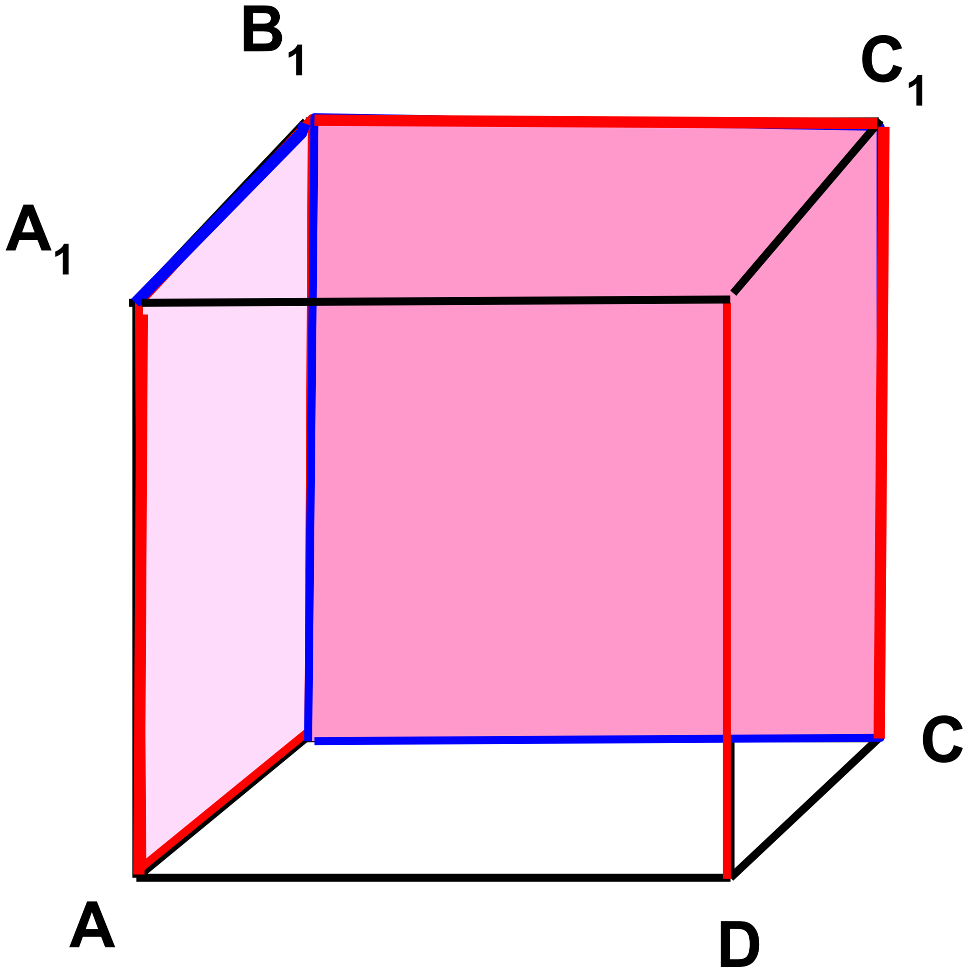
$DC \parallel (A_1B_1C_1)$



На модели куба укажите плоскости, параллельные прямой DC, прямой DD_1

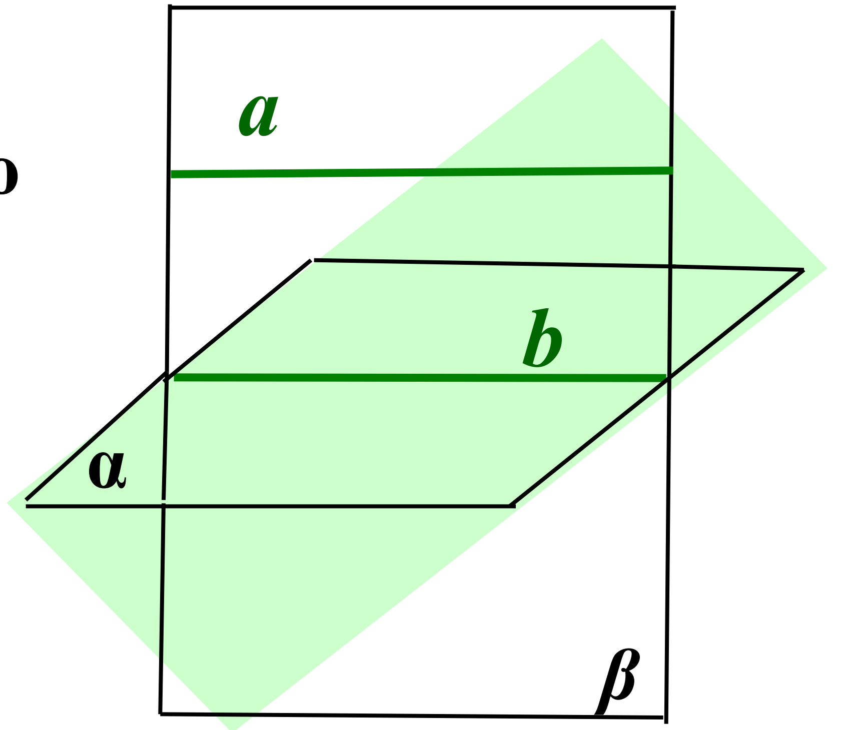
$DD_1 \parallel (AA_1B_1)$

$DD_1 \parallel (B_1C_1C)$



Утверждение 1

- **Если плоскость проходит через данную прямую, параллельную другой плоскости, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой**



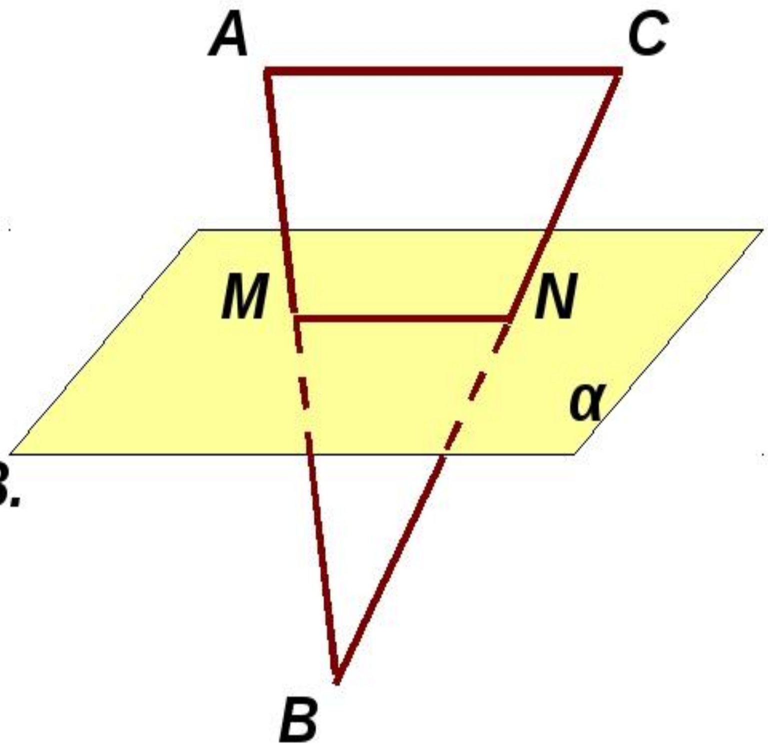
Решение задач

Задача1.

Дано: AC || α, AB ∩ α = M;

CB ∩ α = N.

Доказать: ΔABC подобен ΔMNB.



Доказательство

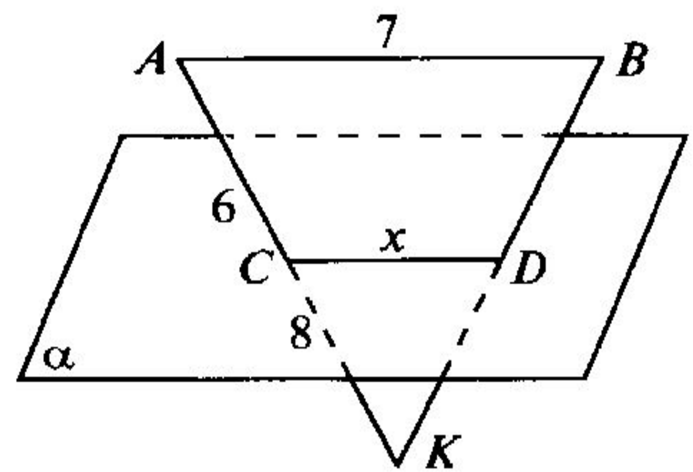
1. По утверждению 1° : MN || AC. Тогда угол A = углу BMN (как односторонние при параллельных прямых).

2. угол B - общий.

3. Таким образом, по двум углам треугольник ABC подобен треугольнику MBN.

Задача 2. Параллельность прямой и плоскости.

Дано: $AB \parallel \alpha$,
$AB = 7$,
$ABK \cap \alpha = CD$,
$AC = 6$, $CK = 8$.



1. Каково взаимное расположение прямых AB и CD?
2. Найдите CD.

Решение.

1. $AB \parallel CD$.
2. $\triangle AKB \backsim \triangle CKD$.

$\frac{7}{x} = \frac{14}{8}$, $x = 4$.

Приведите необходимые обоснования.

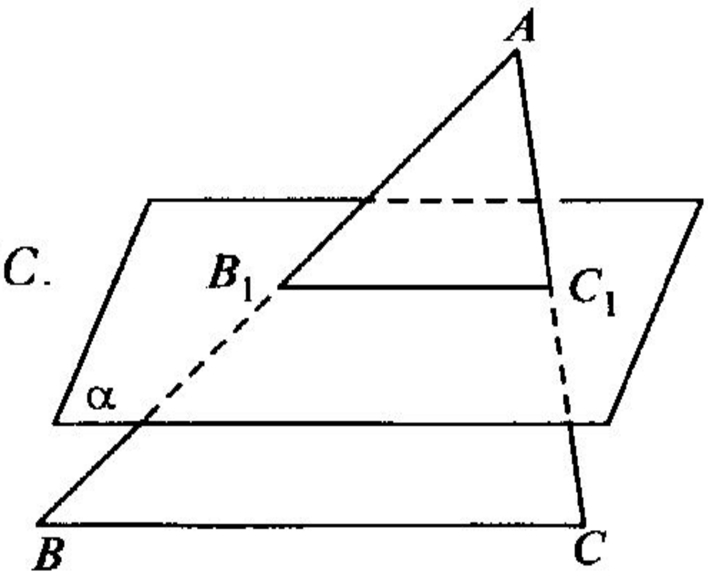
Задача 3. Плоскость α пересекает стороны AB и AC треугольника ABC соответственно в точках B_1 и C_1. Известно, что $BC \parallel \alpha$, $AB : B_1B = 8:3$, $AC = 16$ см.

1. Докажите, что $B_1C_1 \parallel BC$.
2. Найдите AC_1.

Решение.

Способ 1

1. $BC \parallel \alpha$, $ABC \cap \alpha = B_1C_1 \Rightarrow B_1C_1 \parallel BC$.
2. $AC_1 : C_1C = 5:3$,
   $5m + 3m = 16$, $m = 2$,
   $AC_1 = 5m$, $AC_1 = 10$.



Способ 2

$$\frac{AB_1}{AB} = \frac{AC_1}{AC}, \qquad \frac{5}{8} = \frac{AC_1}{16}, \qquad AC_1 = 10.$$

Дайте обоснование решения.

Задача 4.

Дано: $B \not\subset ADC$

$M \in BA, BM = MA$

$N \in BC, BN = NC$

$P \in BD, BP = PD$

$S_{ACD} = 48$ см^2

а) доказать: $(MNP) \parallel (ACD)$

б) найти: S_{MNP}

Доказательство:

MP — средняя линия ΔABD

PN — средняя линия ΔBCD

MN — средняя линия ΔABC

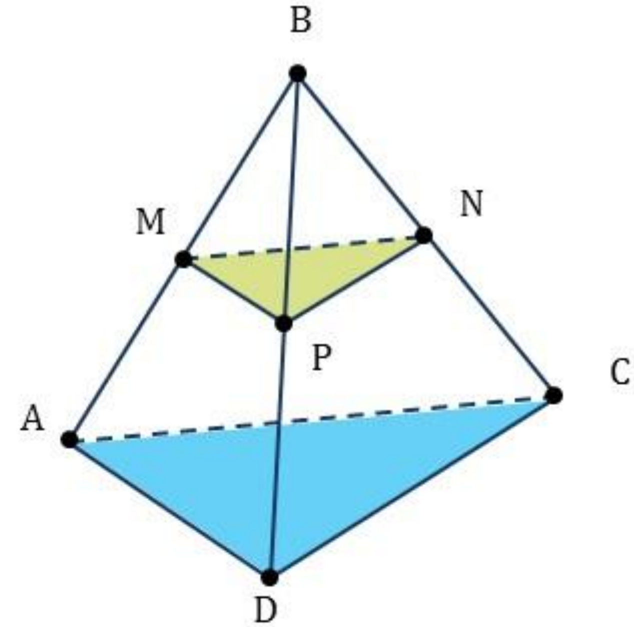
$$\left.\begin{array}{c} MN \cap MP = M \\ AC \cap AD = A \\ MN \parallel AC \\ MP \parallel AD \end{array}\right\} \Rightarrow MNP \parallel ACD$$

Решение:

$MN = \frac{1}{2}AC,\ MP = \frac{1}{2}AD,\ NP = \frac{1}{2}CD \ \Rightarrow k = 0{,}5$

$\angle MNP = \angle ACD, \angle MPN = \angle ADC, \angle NMP = \angle CAD \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta MNP \sim \Delta ACD$



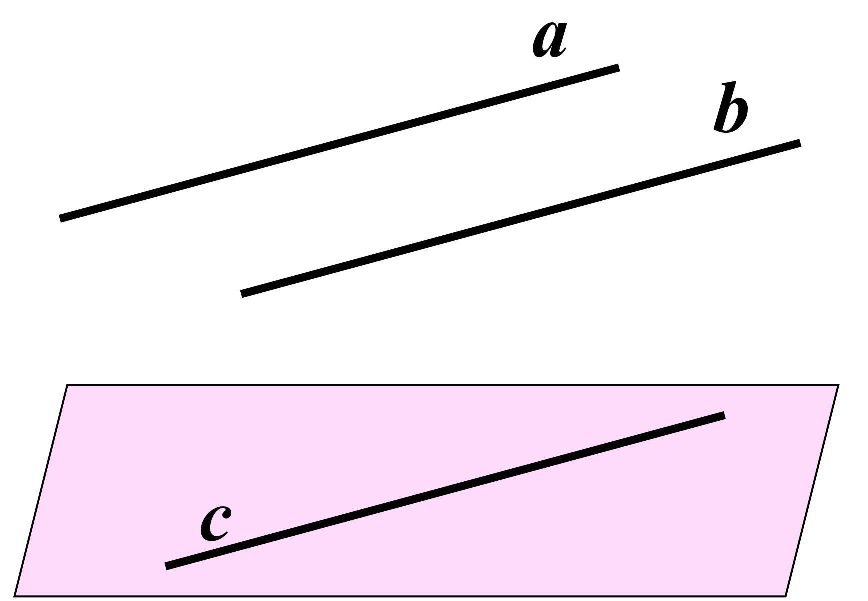
$$\frac{S_{MNP}}{S_{ACD}} = k^2$$

$S_{MNP} = S_{ACD} \cdot k^2 = 48 \cdot 0{,}25 = 12$ (см^2)

Ответ: $(MNP) \parallel (ACD)$, $S_{MNP} = 12$ см^2

Утверждение 2

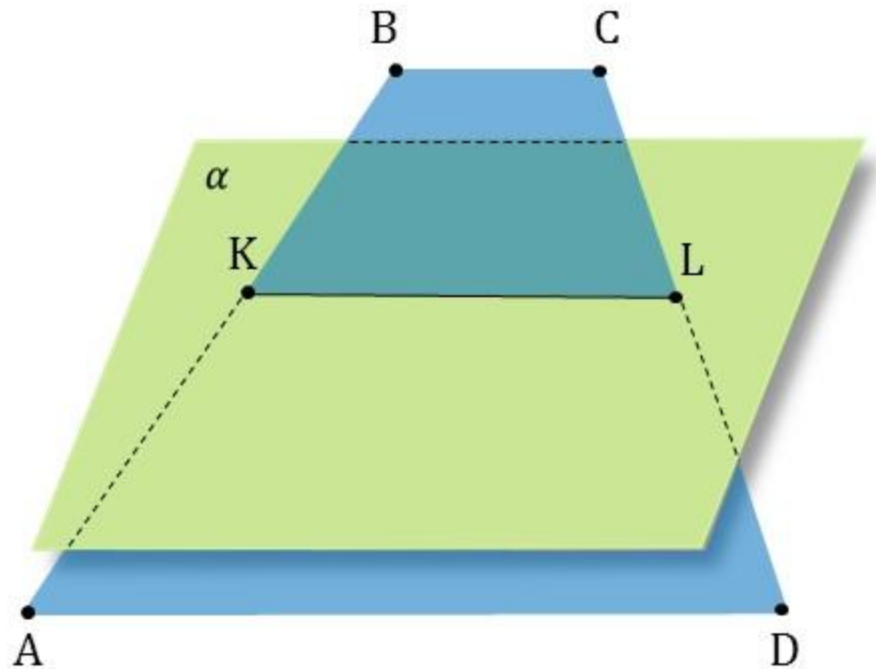
- **Если одна из двух параллельных прямых параллельна данной плоскости, то другая прямая либо также параллельна этой плоскости, либо лежит в этой плоскости**



РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

Задача 5.

Дано:
ABCD – трапеция;
KL – ср. линия трапеции;
$KL \in \alpha$;
Найти:
Пересекают ли прямые BC и AD плоскость ?



Решение:

$$\left.\begin{aligned} BC \parallel KL; \\ KL \in \alpha; \end{aligned}\right\} \Rightarrow BC \parallel \alpha;$$

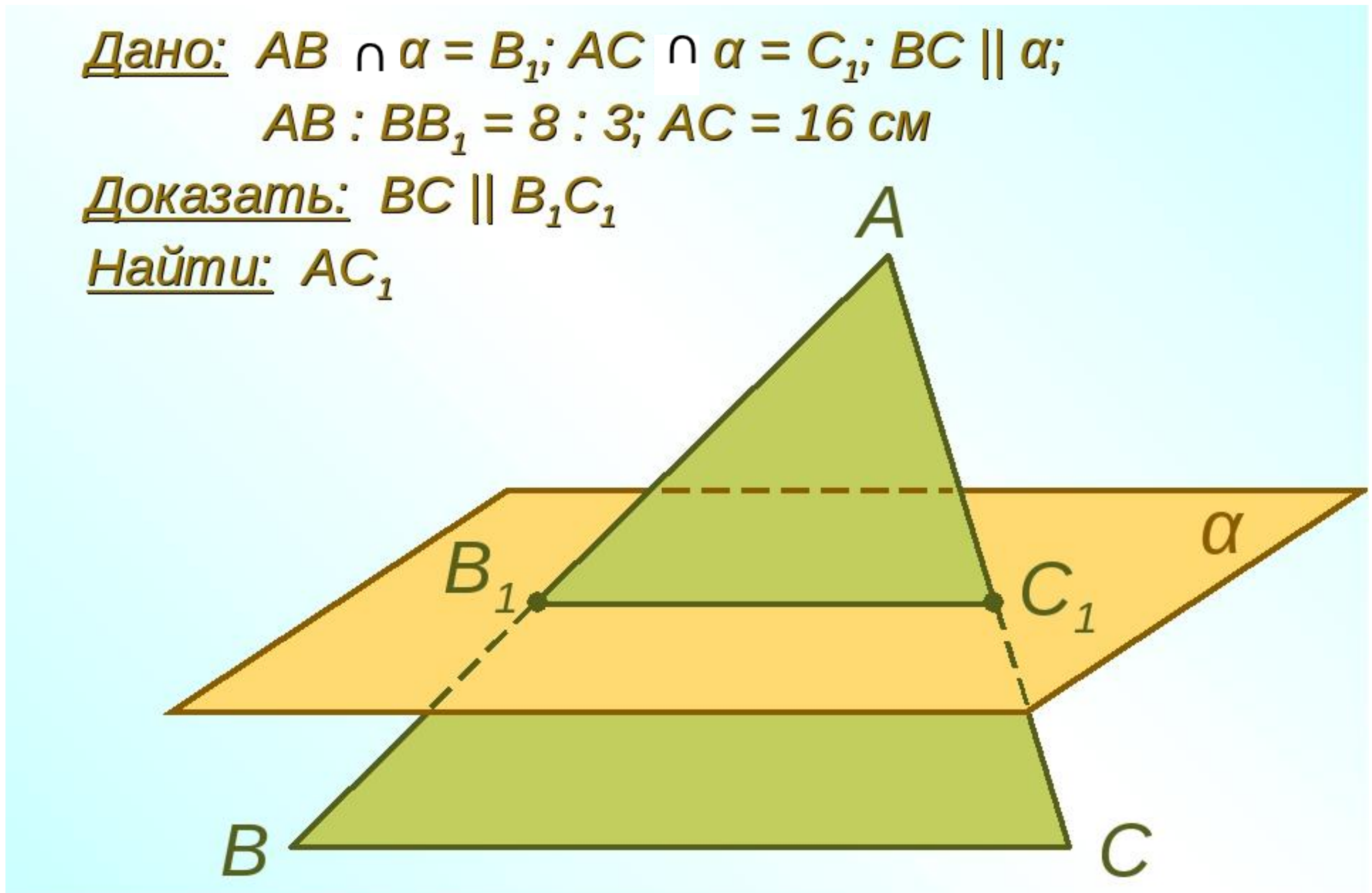
$$\left.\begin{aligned} AD \parallel KL; \\ KL \in \alpha; \end{aligned}\right\} \Rightarrow AD \parallel \alpha;$$

$\Rightarrow$ **BC** и **AD** не пересекают $\boldsymbol{\alpha}$;

Ответ: Нет.

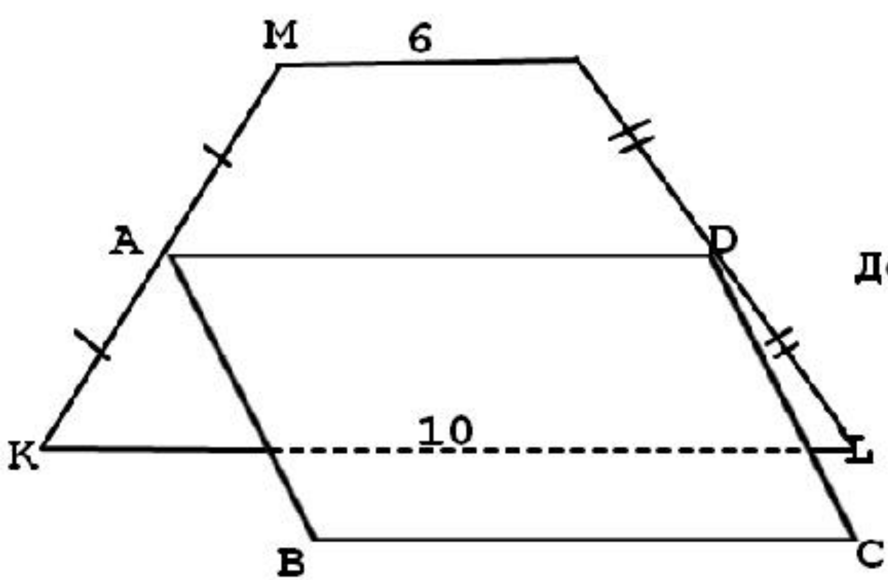
Решите самостоятельно:

Задача 6.



Решите самостоятельно:

Задача 7.



Дано: трапеция MNLK и квадрат ABCD не лежат в одной плоскости

AK=AM, ND=DL, MN=6, KL=10

Доказать: 1) KL параллельна BC

Найти: BC