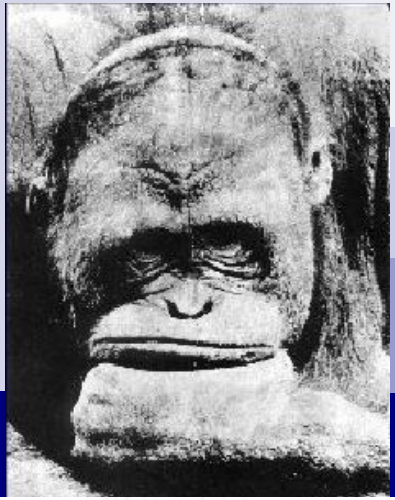
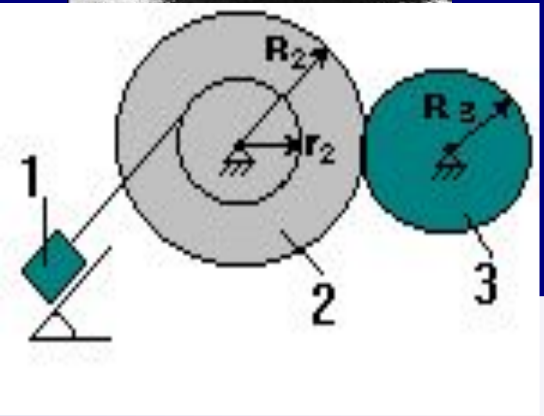
Поволжский государственный технологический университет
Кафедра сопротивления материалов и прикладной механики



Лоскутов Ю.В.

Курс лекций по теоретической механике



Кинематика

Электронный учебный курс написан на основе лекций, читавшихся автором для студентов, обучавшихся по специальностям СТР, ЭУН, ПЗ, АД, СУЗС и ТМО в ПГТУ (2001-2013 гг.).
Учебный материал соответствует календарным планам в объеме двух семестров.

Для полной реализации анимационных эффектов при презентации необходимо использовать средство просмотра Power Point не ниже, чем встроенный в Microsoft Office операционной системы Windows-XP Professional. Запуск презентации – F5, навигация – Enter, навигационные клавиши, щелчок мыши, кнопки.
Завершение – Esc.
Замечания и предложения можно послать по e-mail: loskutovyv@volgatech.net

Йошкар-Ола - 2014

Содержание

Рекомендуемая литература

1. Яблонский А.А. Курс теоретической механики. Ч.1. М.: Высшая школа. 1977 г. 368 с.
2. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. М.: Наука. 1986 г. 416 с.
3. Сборник заданий для курсовых работ /Под ред. А.А. Яблонского. М.:Высшая школа. 1985 г. 366 с.
4.

Лекция 1

Кинематика

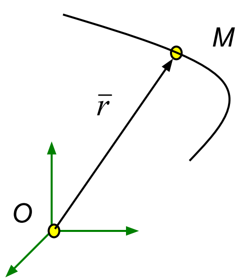
Кинематика точки | Кинематика твердого тела

- **Кинематика** – раздел теоретической механики, изучающий механическое движение без учета сил, вызывающих это движение
- **Кинематика точки –** изучает движение материальной точки, является базой для изучения движения точек твердого тела.
- Задание движения точки – необходимо иметь возможность определения положения точки в пространстве в любой момент времени (уравнения, геометрия механизма и известный закон движения ведущего звена).
- Траектория движения точки – совокупность положений точки в пространстве при ее движении. Линия, образованная геометрическими местами точки при движении

Три способа задания движения точки:

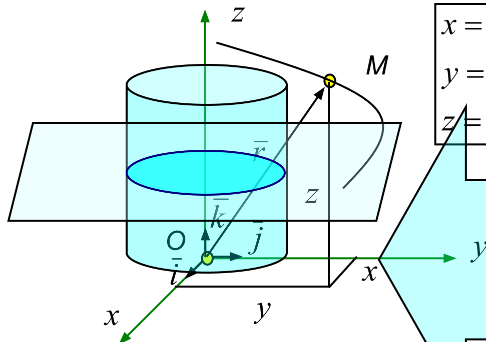
Векторный способ:
Задается величина и направление радиуса-вектора.

$\boxed{\bar{r} = \bar{r}(t)}$



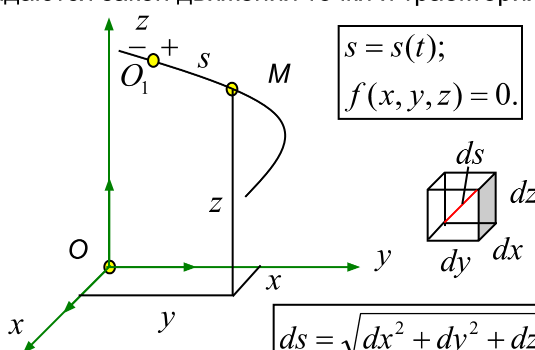
Координатный способ:
Задаются координаты положения точки.

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x(t); \\ y &= y(t); \\ z &= z(t). \end{aligned}}$$



Естественный способ:
Задаются закон движения точки и траектория.

$$\boxed{\begin{aligned} & s = s(t); \\ & f(x, y, z) = 0. \end{aligned}}$$



$$\boxed{ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}$$

Все три способа задания эквивалентны и связаны между собой:

1. Векторный и координатный – соотношением: $\boxed{\bar{r}(t) = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}}$

2. Координатный и естественный – соотношением: $\boxed{s(t) = \int \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt}$

3. Для получения уравнения траектории движения необходимо из уравнений движения координатного способа исключить время, т.к. траектория не зависит от времени:

$$\boxed{\begin{aligned} & x = x(t) \Rightarrow t = t(x); \\ & y = y(t) \Rightarrow y[t(x)] = y(x); \\ & z = z(t) \Rightarrow z[t(x)] = z(x). \end{aligned}}$$

Последние два уравнения представляют собой уравнения линейчатых поверхностей, линия пересечения которых и есть траектория движения точки.

$$\boxed{\begin{cases} y = y(x); \\ z = z(x). \end{cases}}$$

Например:

$$\boxed{\begin{aligned} & x = t \Rightarrow t = x \\ & y = \sqrt{R^2 - t^2} \Rightarrow \sqrt{R^2 - x^2} \quad \text{или} \quad x^2 + y^2 = R^2; \\ & z = c. \end{aligned}}$$

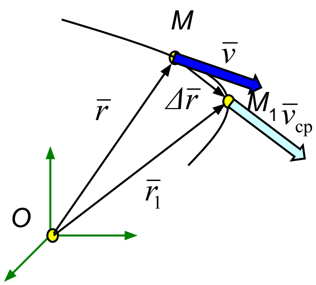
Последние два уравнения представляют собой уравнения цилиндрической поверхности радиуса *R* с образующей, параллельной оси *z*, и плоской поверхности, параллельной координатной плоскости *Oxy* и смещенной по оси *z* на величину *c*. Линия пересечения этих поверхностей (окружность радиуса *R*) - траектория движения точки.

Лекция 1 (продолжение – 1.2)

- **Скорость точки** – величина, характеризующая быстроту изменения положения точки в пространстве.

Три способа задания движения точки определяют способы определения скорости точки:

Векторный способ: Сравним два положения точки в моменты времени t и $t_1 = t + \Delta t$:



$$\begin{array}{ll} t & \Rightarrow \bar r; \\ t_1 = t + \Delta t & \Rightarrow \bar r_1 = \bar r + \Delta \bar r; \end{array}$$

$$\frac{\Delta \bar r}{\Delta t} = \bar{\mathrm v}_{\text{ср}}$$

- вектор средней скорости в интервале времени Δt, направлен по направлению вектора перемещения (хорде MM_1).

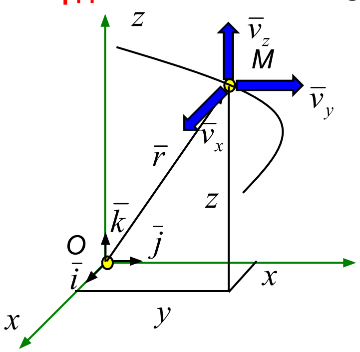
Устремим $\Delta t \to 0$ и перейдем к пределу: $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \bar r}{\Delta t} = \bar{\mathrm v}$

Предел отношения приращения функции к приращению приращения аргумента есть производная функции (по определению): $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \bar r}{\Delta t} = \dfrac{d\bar r}{dt}$

$$\bar{\mathrm v} = \frac{d\bar r}{dt}$$

- **вектор мгновенной скорости точки** (или просто **скорости точки**) **в момент времени** ***t***, направлен по касательной к траектории (при приближении M_1 к M хорда занимает положение касательной).

Координатный способ: Связь радиуса-вектора с координатами определяется выражением: $\bar r(t) = x(t)\bar i + y(t)\bar j + z(t)\bar k$



Используем векторную форму определения скорости:

$$\bar v = \frac{d\bar r(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[x(t)\bar i + y(t)\bar j + z(t)\bar k\right] = \frac{dx}{dt}\bar i + \frac{dy}{dt}\bar j + \frac{dz}{dt}\bar k = v_x \bar i + v_y \bar j + v_z \bar k$$

Компоненты (составляющие) вектора скорости:

$$\bar v_x = \dot x(t)\bar i; \quad \bar v_y = \dot y(t)\bar j; \quad \bar v_z = \dot z(t)\bar k.$$

Проекции скорости на оси координат:

$$v_x = \dot x; \quad v_y = \dot y; \quad v_z = \dot z$$

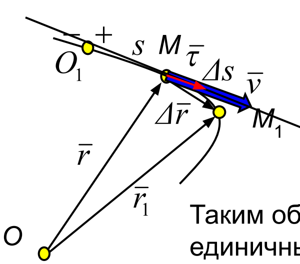
$$\mathrm v = \sqrt{\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2};$$

$$cos(\bar{\mathrm v}, x) = \frac{\dot x}{\mathrm v}; \quad cos(\bar{\mathrm v}, y) = \frac{\dot y}{\mathrm v}; \quad cos(\bar{\mathrm v}, z) = \frac{\dot z}{\mathrm v}.$$

Естественный способ: Представим радиус-вектор как сложную функцию: $\bar r(t) = \bar r[s(t)].$

Используем векторную форму определения скорости:

$$\bar v = \frac{d\bar r(t)}{dt} = \frac{d\bar r}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{d\bar r}{ds}\dot s$$



Представим производную радиуса-вектора как предел: $\dfrac{d\bar r}{ds} = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \dfrac{\Delta \bar r}{\Delta s}.$

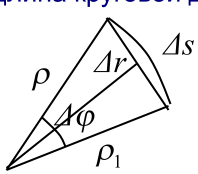
Вектор приращения радиуса-вектора направлен по хорде MM_1 и в пределе занимает положение касательной.

Величина производной радиуса-вектора по дуговой координате равна 1: $\left|\dfrac{d\bar r}{ds}\right| = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \left|\dfrac{\Delta \bar r}{\Delta s}\right| = \lim\limits_{\Delta \varphi \to 0} \dfrac{2\rho \sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\rho \Delta\varphi} = 1.$

При $\Delta s \to 0$ радиус кривизны $\rho_1 \to \rho$, угол между радиусами кривизны $\Delta\phi \to 0$, числитель - основание равнобедренного треугольника, знаменатель – длина круговой дуги радиуса ρ.

Таким образом, производная радиуса-вектора по дуговой координате есть единичный вектор, направленный по касательной к траектории.

Вектор скорости равен: $\bar v = \dot s \bar\tau.$ **Проекция скорости на касательную:** $v_\tau = \dot s$



При $\dot s > 0$ вектор скорости направлен в сторону увеличения дуговой координаты, в противном случае – в обратную сторону.

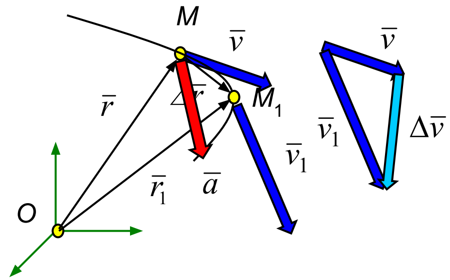
Лекция 2

- **Ускорение точки** – величина, характеризующая быстроту изменения скорости точки.

Три способа задания движения точки определяют способы определения ускорения точки:

Векторный способ: Сравним скорости точки в двух положениях точки в моменты времени t и $t_1 = t + \Delta t$:

$$t \Rightarrow \bar{v};\qquad t_1 = t + \Delta t \Rightarrow \bar{v}_1 = \bar{v} + \Delta\bar{v};$$



$$\frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t} = \bar{a}_{ср}$$ – вектор среднего ускорения в интервале времени Δt, направлен в сторону вогнутости траектории.

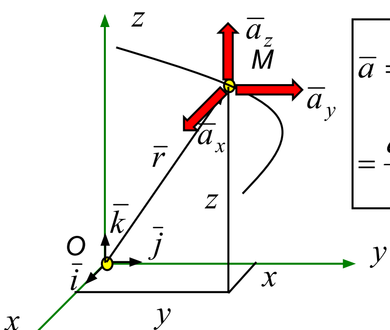
Переходя к пределу получаем:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t} = \bar{a}\qquad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t} = \frac{d\bar{v}}{dt}$$

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$$

– **вектор истинного ускорения точки в момент времени *t***, *лежит в соприкасающейся плоскости* (предельное положение плоскости, проведенной через касательную в точке *M* и прямую, параллельную касательной в точке M_1, при стремлении M_1 к *M*) *и направлен в сторону вогнутости траектории*.

Координатный способ: Используем полученное векторное выражение и связь радиуса-вектора с координатами $\bar{r}(t) = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}$



$$\bar{a} = \frac{d^2\bar{r}(t)}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}\left[x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}\right] = \frac{d^2x}{dt^2}\bar{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\bar{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\bar{k} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}$$

Компоненты (составляющие) вектора ускорения:

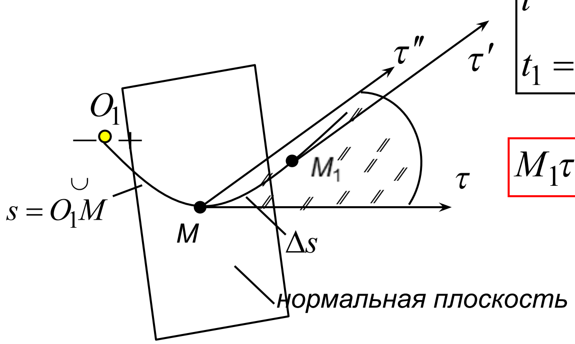
$$\bar{a}_x = \ddot{x}\bar{i};\quad \bar{a}_y = \ddot{y}\bar{j};\quad \bar{a}_z = \ddot{z}\bar{k}.$$

Проекции ускорения на оси координат:

$$a_x = \ddot{x};\quad a_y = \ddot{y};\quad a_z = \ddot{z}$$

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2};\quad \cos(\bar{a}, x) = \frac{\ddot{x}}{a};\quad \cos(\bar{a}, y) = \frac{\ddot{y}}{a}.$$

Естественные координатные оси (касательная, главная нормаль, бинормаль)



$$t \Rightarrow \text{т.}\, M \text{ и } s\qquad t_1 = t + \Delta t \Rightarrow \text{т.}\, M_1 \text{ и } s + \Delta s$$

$$M_1\tau' \parallel M\tau''$$

Нормальная плоскость - это плоскость, перпендикулярная к касательной *Mτ* к траектории в точке.

Соприкасающаяся плоскость представляет собой ту из бесконечного множества плоскостей, проходящих через касательную *Mτ*, которая наиболее тесно примыкает к траектории в окрестности точки *M*. В случае плоской траектории, соприкасающаяся плоскость совпадает с плоскостью траектории.

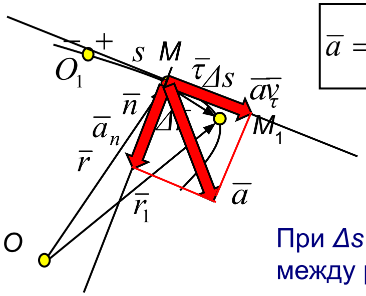
$$\bar{b} = \bar{\tau} \times \bar{n}$$

Спрямляющая плоскость - это плоскость, перпендикулярная к нормальной и касательной плоскостям.

b *спрямляющая плоскость*

Лекция 2 (продолжение 2.2)

Естественный способ: Используем векторное выражение для ускорения и выражение для скорости при естественной способе задания: $\boxed{\bar{v} = \dot{s}\bar{\tau}.}$

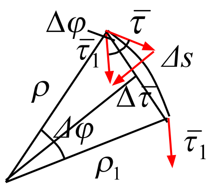


$$\boxed{\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{s}\bar{\tau}) = \ddot{s}\bar{\tau} + \dot{s}\frac{d\bar{\tau}}{dt}.}$$

Представим единичный касательный вектор как сложную функцию: $\boxed{\bar{\tau}(t) = \bar{\tau}[s(t)].}$

Производная единичного касательного вектора: $\boxed{\frac{d\bar{\tau}}{dt} = \frac{d\bar{\tau}}{ds}\frac{ds}{dt} = \dot{s}\frac{d\bar{\tau}}{ds}.}$

При $\Delta s \to 0$ радиус кривизны $\rho_1 \to \rho$, угол между радиусами кривизны $\Delta\phi \to 0$, числитель - основание равнобедренного треугольника, образованного единичными векторами τ_1 и τ, знаменатель – длина круговой дуги радиуса ρ.



Угол между приращением единичного вектора $\Delta\boldsymbol{\tau}$ и самим вектором $\boldsymbol{\tau}$ при $\Delta\phi \to 0$, стремится к 90^o.
Или $sin(\Delta\phi/2) \approx \Delta\phi/2$

Величина производной единичного касательного вектора по дуговой координате:

$$\boxed{\left|\frac{d\bar{\tau}}{ds}\right| = \lim_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\Delta\bar{\tau}}{\Delta s}\right| = \lim_{\Delta\varphi \to 0}\frac{|\bar{\tau}|2\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\rho\Delta\varphi} = \frac{1}{\rho}.}$$

Таким образом, производная единичного касательного вектора по дуговой координате есть вектор, направленный перпендикулярно касательной к траектории.

Введем единичный вектор ***n***, нормальный (перпендикулярный) к касательной, направленный к центру кривизны.
С использованием вектора ***n*** и ранее определенных величин ускорение представляется как сумма векторов: $\boxed{\bar{a} = \ddot{s}\bar{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\bar{n}.}$

Компоненты (составляющие) вектора ускорения: $\boxed{\bar{a}_\tau = \ddot{s}\bar{\tau}; \quad \bar{a}_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho}\bar{n}.}$

Проекции ускорения на оси *τ* и *n*: $\boxed{a_{\tau\tau} = \ddot{s}; \quad a_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho}.}$

Таким образом **полное ускорение точки есть векторная сумма двух ускорений**: **касательного**, направленного по касательной к траектории в сторону увеличения дуговой координаты, если $\boxed{\ddot{s} > 0}$ (в противном случае – в противоположную) и **нормального ускорения**, направленного по нормали к касательной в сторону центра кривизны (вогнутости траектории): $\boxed{\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n.}$

Модуль полного ускорения: $\boxed{a = \sqrt{a_\tau^{\ 2} + a_n^{\ 2}};}$

Лекция 2 (продолжение 2.3)

- **Равнопеременное движение точки** – движение точки по траектории, при котором касательное ускорение не изменяется по величине.

$\boxed{a_{\tau\tau} = \dot{v}_\tau = const.}$ Запишем выражение для касательного ускорения через проекцию скорости: $a_{\tau\tau} = \dot{v}_\tau = \frac{d}{dt} v_\tau = \frac{dv_\tau}{dt}$

Полученное выражение есть дифференциальное уравнение, которое легко решается разделением переменных и интегрированием левой и правой частей:

$$dv_\tau = a_{\tau\tau} dt \qquad \int_{v_{\tau 0}}^{v_\tau} dv_\tau = a_{\tau\tau} \int_0^t dt; \qquad v_\tau \Big|_{v_{\tau 0}}^{v_\tau} = a_{\tau\tau} t \Big|_0^t; \qquad v_\tau - v_{\tau 0} = a_{\tau\tau} t \qquad \boxed{v_\tau = v_{\tau 0} + a_{\tau\tau} t}$$

-скорость точки при равнопеременном движении

В свою очередь скорость точки также связывается с дуговой координатой дифференциальной зависимостью: $v_\tau = \frac{ds}{dt}$ или $ds = v_\tau dt.$

После подстановки выражения для скорости и интегрирования получаем :

$$\int_{s_0}^{s} ds = \int_0^t (v_{\tau 0} + a_{\tau\tau} t) dt; \qquad s \Big|_{s_0}^{s} = \left(v_{\tau 0} t + a_{\tau\tau} \frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^t; \qquad s - s_0 = v_{\tau 0} t + a_{\tau\tau} \frac{t^2}{2}. \qquad \boxed{s = s_0 + v_{\tau 0} t + a_{\tau\tau} \frac{t^2}{2}}$$

- дуговая координата точки при равнопеременном движении

- **Классификация движений точки**.

№ пп	$\bar{a}_\tau$	$\bar{a}_n$	Вид движения	
			Закон движения	Траектория
1	= 0 [t, t_1]	= 0 [t, t_1]	равномерное (v = const)	прямолинейное (ρ = ∞)
2	= 0 [t, t_1]	≠ 0 [t, t_1]	равномерное (v = const)	криволинейное (ρ ≠ ∞)
2.1	= 0 в момент времени t	= 0 [t, t_1]	неравномерное (v ≠ const), в момент времени t $v = max$	прямолинейное (ρ = ∞)
2.2		≠ 0 [t, t_1]		криволинейное (ρ ≠ ∞)
3	≠ 0 [t, t_1]	= 0 [t, t_1]	неравномерное (v ≠ const)	прямолинейное (ρ = ∞)
3.1		= 0 в момент времени t	перемена направления движения (v = 0 при t=t)	любая траектория
3.2			неравномерное (v ≠ const)	перегиб траектории (ρ = ∞ при t=t)
4	≠ 0 [t, t_1]	≠ 0 [t, t_1]	неравномерное (v ≠ const)	криволинейное (ρ ≠ ∞)
5	= const [t, t_1]	любое	равнопеременное	любая траектория