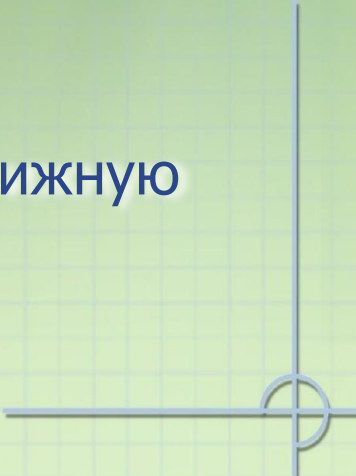




## Глава 7

# Элементарная теория удара

- § 1. Основные понятия теории удара
  - § 2. Действие ударной силы на материальную точку
  - § 3. Теорема об изменении количества движения механической системы при ударе
  - § 4. Теорема об изменении главного момента количеств движения при ударе (Теорема моментов)
  - § 5. Прямой центральный удар шара о неподвижную поверхность
- 

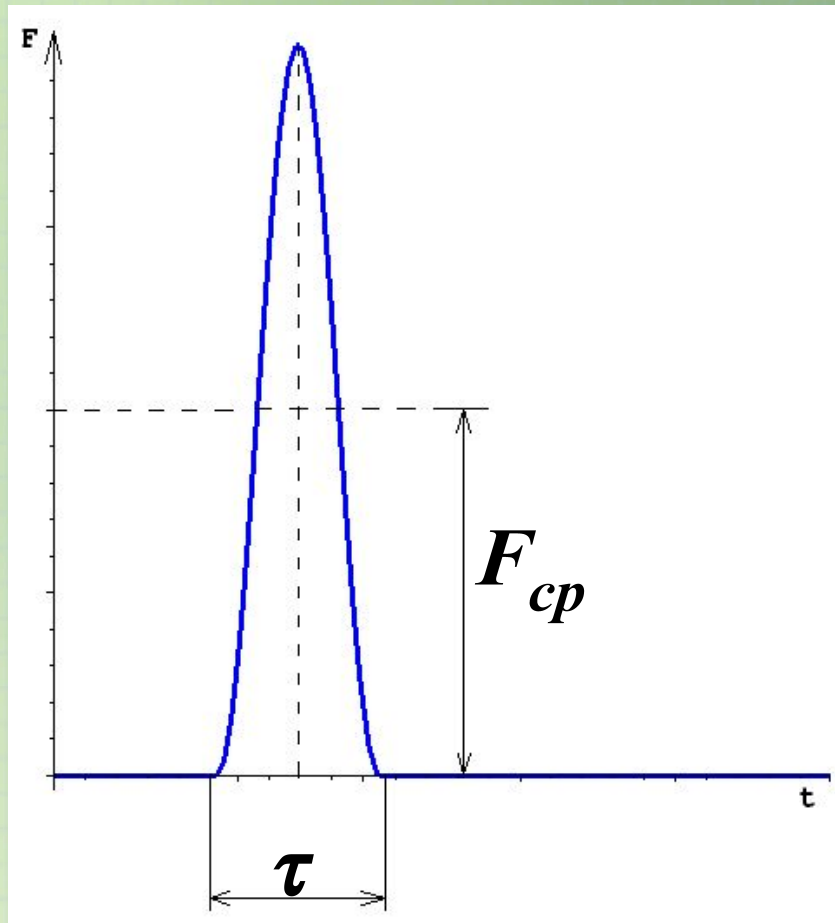
## § 1. Основные понятия теории удара

Явление, при котором за ничтожно малый промежуток времени скорости точек тела меняются на конечную величину, называется *ударом*

*Мгновенной* или *ударной* называют силу, которая действует в течение малого промежутка времени, но достигает таких больших значений, что её импульс за это время становится конечной величиной

$$(1) \quad \overline{S} = \int_0^{\tau} \overline{F} dt$$

$\overline{F}$  - ударная сила,  $\tau$  - время удара  
 $\overline{S}$  - ударный импульс

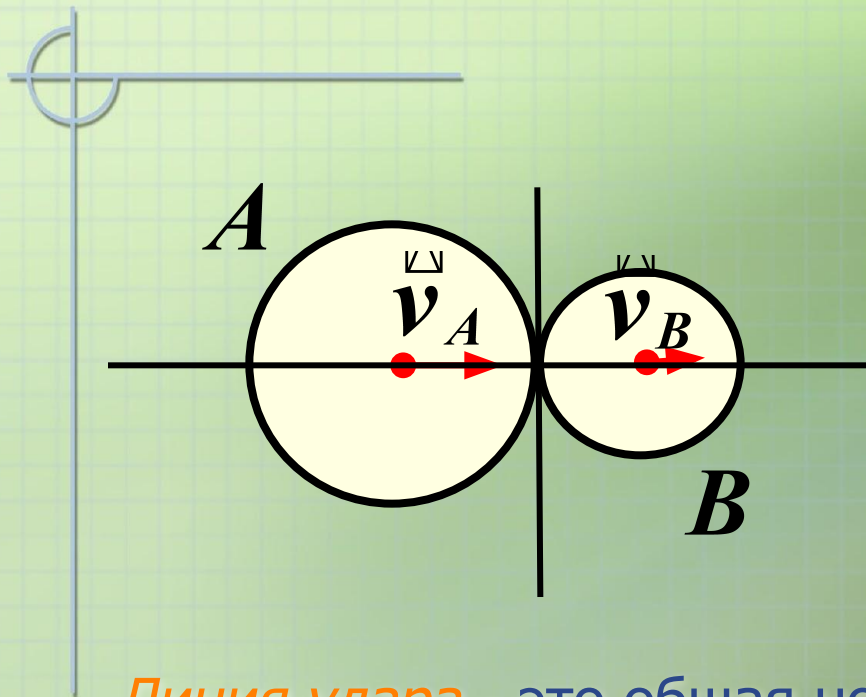


По теореме о среднем

$$\overline{S} = \overline{F}_{cp} \tau; \quad |S| = F_{cp} \tau$$

Поскольку  $\overline{S}$  - конечная величина, то

$$F \approx \frac{1}{\tau}$$

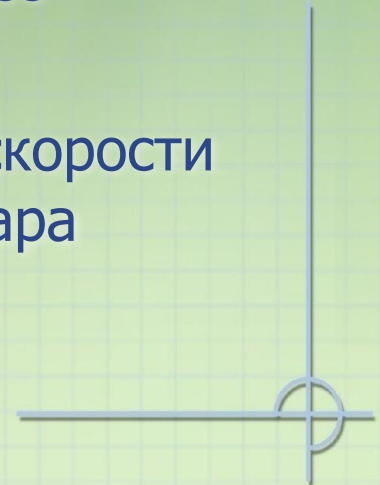


Пусть соударяются два тела:  
 $v_A > v_B$ , тела движутся  
поступательно

*Линия удара* - это общая нормаль к поверхностям соударяющихся тел в точке соприкосновения

Удар называют *центральной*, если центры масс соударяющихся тел лежат на линии удара

Центральный удар называется *прямым*, если скорости центров масс соударяющихся тел в начале удара направлены по линии удара



Рассмотрим подробнее процесс удара. Пусть А, В - абсолютно гладкие тела, удар прямой, центральный. После соприкосновения оба тела деформируются,  $v_B$  - увеличивается,  $v_A$  - уменьшается. Процесс деформации заканчивается, когда  $v_A = v_B$

Эта часть явления удара называется *фазой деформации*

Время этой фазы  $\tau_1$

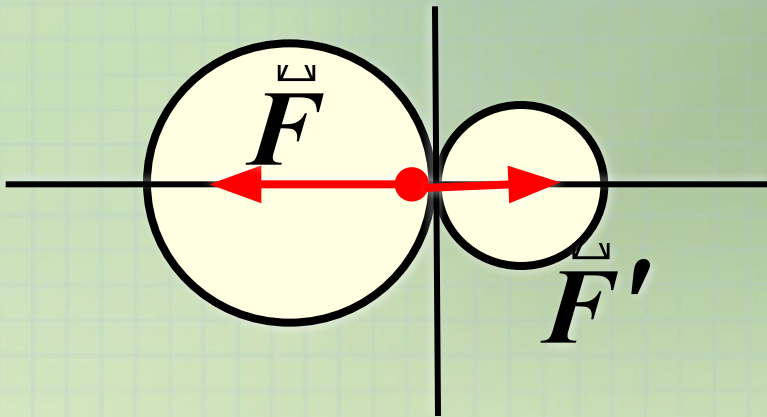
$$\vec{F}' = -\vec{F}$$

*Ударный импульс*

$$\vec{S}_1 = \int_0^{\tau_1} \vec{F} dt$$

$$\vec{S}'_1 = -\vec{S}_1$$

( $\vec{S}'_1$  - ударный импульс  $\vec{F}'$ )




После деформации тела восстанавливают свою форму целиком или частично. Это *фаза восстановления*

Время этой фазы -  $\tau_2$ . Фаза заканчивается в момент отделения тел друг от друга

$$S_2 = \int_{\tau_1}^{\tau_2} F dt$$

$\tau = \tau_1 + \tau_2$  - продолжительность удара



Упругость соударяющихся тел оценивается по отношению ударного импульса за фазу восстановления к ударному импульсу за фазу деформации

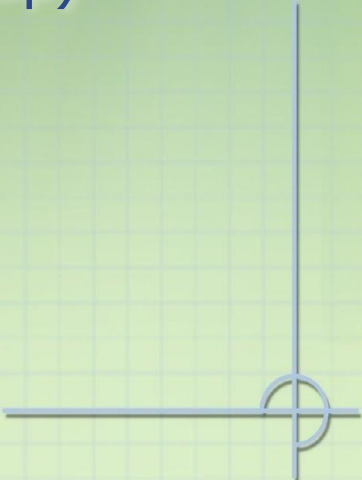
$$k = \frac{|S_2|}{|S_1|}$$

***k*** - коэффициент восстановления, определяется опытным путем

***k=0***  $\Rightarrow$  ***S<sub>2</sub>=0*** - фаза восстановления отсутствует (абсолютно неупругий удар)

***k=1*** - абсолютно упругий удар

***0 < k < 1*** - упругий удар



## § 2. Действие ударной силы на материальную точку

Пусть на точку действует конечная сила  $\vec{F}$  и ударная сила  $\vec{F}_k$ . Время действия ударной силы  $\tau$ .  $\vec{v}$  - скорость до удара,  $\vec{u}$  - скорость после удара

По теореме об изменении количества движения точки

$$m\vec{u} - m\vec{v} = \int_0^{\tau} \vec{F} dt + \int_0^{\tau} \vec{F}_k dt$$

$\vec{S}$   
 - ударный импульс

импульс конечной силы

$$\vec{S}_k = \vec{F}_k^{cp} \tau$$

по теореме о среднем малой величиной можно пренебречь



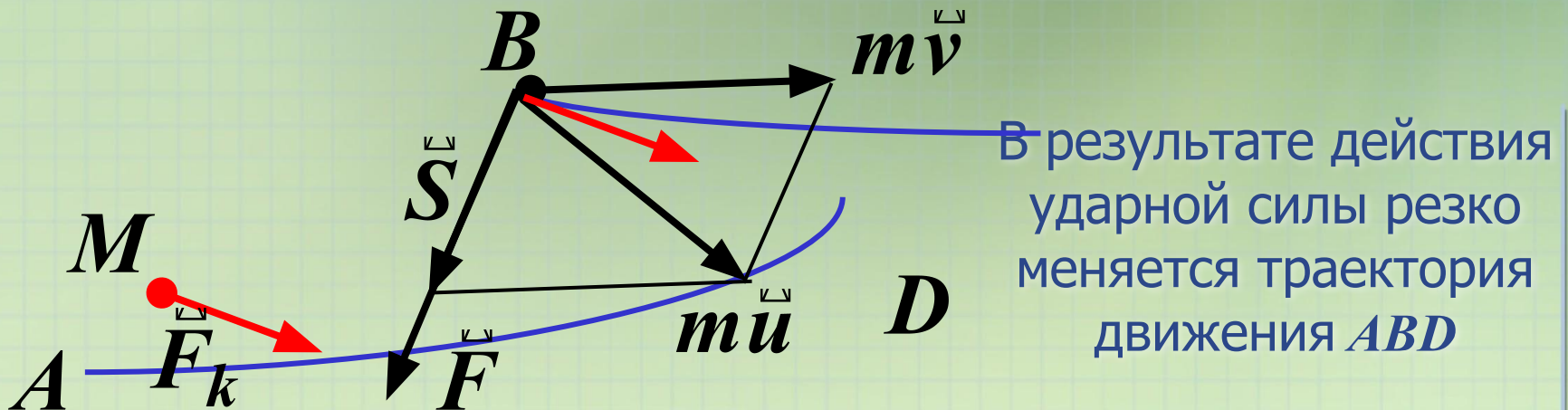
$$m\vec{u} - m\vec{v} = \vec{S} \quad (2)$$

Изменение количества движения точки за время удара равно ударному импульсу, приложенному к точке.

(2) – основное уравнение динамики точки при ударе,

$$\Rightarrow \vec{u} = \vec{v} + \frac{1}{m} \vec{S}$$

(в этой формуле все величины конечные)



$s = \int_0^{\tau} v dt$  - расстояние, пройденное за время удара,

$$s = v_{cp} \tau \Rightarrow s \approx 0$$

## Выводы

1. Действием конечных сил за время удара можно пренебречь
2. Перемещением точки за время действия ударных сил можно пренебречь
3. Действие ударных сил на точку выражается в быстром изменении величины и направления скорости

## § 3. Теорема об изменении количества движения механической системы при ударе

Для механической системы, состоящей из  $n$  материальных точек, на которую действуют как конечные, так и ударные силы, справедливо

$$\overset{\sphericalangle}{Q} - \overset{\sphericalangle}{Q}_0 = \sum_k \overset{\sphericalangle}{S}_k^e \quad (3)$$

Изменение количества движения механической системы за время удара равно сумме всех внешних ударных импульсов, действующих на систему

В проекциях:

$$\vec{Q}_x - \vec{Q}_{0x} = \sum_k \vec{S}_{kx}^e$$

$$\vec{Q}_y - \vec{Q}_{0y} = \sum_k \vec{S}_{ky}^e$$

$$\vec{Q}_z - \vec{Q}_{0z} = \sum_k \vec{S}_{kz}^e$$

Если  $\sum_k \vec{S}_k^e = 0$  , то  $\vec{Q} = \vec{Q}_0$

**Вывод:** Внутренние ударные импульсы не могут изменить количество движения системы

Если  $\vec{Q} = M\vec{u}_c$  и  $\vec{Q}_0 = M\vec{v}_c$  , то

$M\vec{u}_c - M\vec{v}_c = \sum_k \vec{S}_k^e$  - определяет изменение скорости центра масс при ударе

## § 4. Теорема об изменении главного момента количеств движения при ударе (Теорема моментов)

Рассмотрим систему из  $n$  материальных точек

$\overset{\square}{S}_k^e$  - равнодействующая внешних ударных импульсов

$\overset{\square}{S}_k^i$  - равнодействующая внутренних ударных импульсов, действующих на каждую точку,

$$\Downarrow$$
$$m_k \overset{\square}{u}_k - m_k \overset{\square}{v}_k = \overset{\square}{S}_k^e + \overset{\square}{S}_k^i$$

Векторы приложены к точке, которая за время удара не перемещается, тогда, по теореме Вариньона,

$$\overset{\boxtimes}{m}_0(\overset{\boxtimes}{m}_k \overset{\boxtimes}{u}_k) - \overset{\boxtimes}{m}_0(\overset{\boxtimes}{m}_k \overset{\boxtimes}{v}_k) = \overset{\boxtimes}{m}_0(\overset{\boxtimes}{S}_k^e) + \overset{\boxtimes}{m}_0(\overset{\boxtimes}{S}_k^i)$$

Теперь просуммируем

$$\begin{aligned} \sum \overset{\boxtimes}{m}_0(\overset{\boxtimes}{m}_k \overset{\boxtimes}{u}_k) - \sum \overset{\boxtimes}{m}_0(\overset{\boxtimes}{m}_k \overset{\boxtimes}{v}_k) = \\ \sum \overset{\boxtimes}{m}_0(\overset{\boxtimes}{S}_k^e) + \sum \overset{\boxtimes}{m}_0(\overset{\boxtimes}{S}_k^i) \end{aligned}$$



$$\overset{\boxtimes}{K}_{02} - \overset{\boxtimes}{K}_{01} = \sum \overset{\boxtimes}{m}_0(\overset{\boxtimes}{S}_k^e)$$

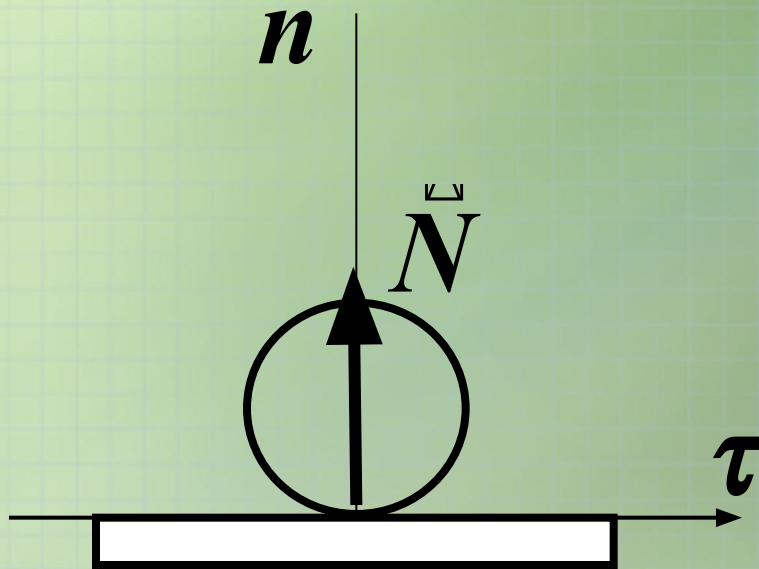
Изменение за время удара кинетического момента системы относительно какого-либо центра равно сумме моментов относительно того же центра всех действующих на систему внешних ударных импульсов

В проекциях:

$$\begin{aligned} \overset{\vee}{K}_{02x} - \overset{\vee}{K}_{01x} &= \sum \overset{\vee}{m}_{0x} (\overset{\vee}{S}_k^e) \\ \overset{\vee}{K}_{02y} - \overset{\vee}{K}_{01y} &= \sum \overset{\vee}{m}_{0y} (\overset{\vee}{S}_k^e) \\ \overset{\vee}{K}_{02z} - \overset{\vee}{K}_{01z} &= \sum \overset{\vee}{m}_{0z} (\overset{\vee}{S}_k^e) \end{aligned}$$

Внутренние ударные импульсы не меняют кинетический момент системы

## § 5. Прямой центральный удар шара о неподвижную поверхность



Масса шара –  $M$

Реакция плиты –  $\vec{N}$

Согласно теореме об изменении количества движения,

$$\vec{Q} - \vec{Q}_0 = S \Rightarrow M\vec{u} - M\vec{v} = S \quad (4)$$

$\vec{v}$  - скорость до удара;  $\vec{u}$  - скорость после удара



Проектируем на нормаль:  $Mu_n - Mv_n = S_n$

Т.к. удар прямой и  $u_n = u$   $v_n = -v$   $S_n = S$ , то

$$Mu + Mv = S \quad (5)$$

⇓

$$0 + Mv = S_1; \quad Mu - 0 = S_2$$

⇓

$$k = \frac{S_2}{S_1} = \frac{u}{v} \quad \Rightarrow \quad S = M(v + kv); \quad S = Mv(k + 1)$$

$S_1$  - ударный импульс за фазу деформации

$S_2$  - ударный импульс за фазу восстановления

Поскольку  $v = \sqrt{2gh}$  и  $u = \sqrt{2gh_1}$ , то  $k = \sqrt{\frac{h_1}{h}}$