МАТЕМАТИКА

СТРОИТЕЛЬСТВО

БАКАЛАВРИАТ

1 семестр

2020

3. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

3.1 Линии на плоскости и их уравнения

3.2 Прямая линия на плоскости

3.3 Кривые второго порядка

3.4 Уравнение поверхности и уравнения линии в пространстве

3.5 Плоскость

3.6 Прямая линия в пространстве

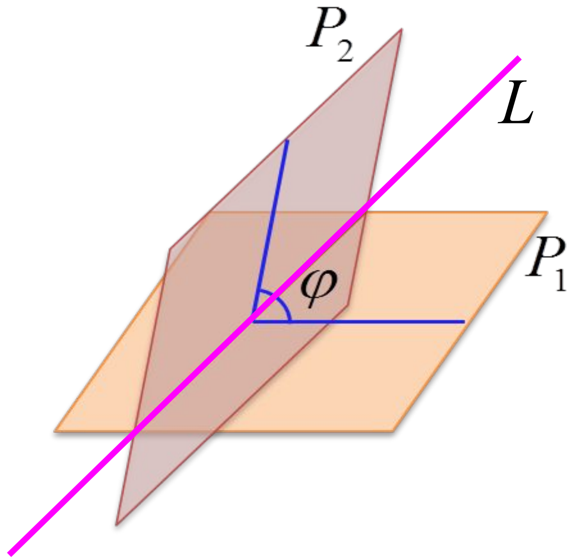
3.7 Взаимное расположение прямой и плоскости

3.6 ПРЯМАЯ ЛИНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

В предыдущем параграфе рассматривалось взаимное расположение плоскостей. Очевидно, что две непараллельные плоскости пересекаются по прямой линии:

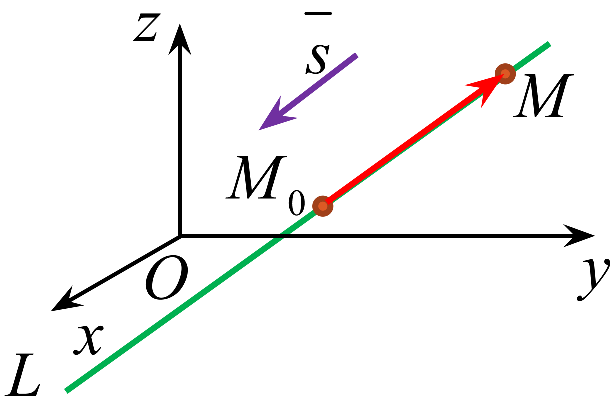
$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

общие уравнения прямой
в пространстве



3.6 ПРЯМАЯ ЛИНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Задача 1



Вывести уравнения прямой ***L***, проходящей через заданную точку, параллельно заданному вектору.

Дано: $M_0(x_0;y_0;z_0)\in L,\quad \bar{s}=\{s_x;s_y;s_z\}\parallel L$

Найти: ***L***

Решение:

Пусть $M(x;y;z)\in L$ – текущая точка, тогда $\overline{M_0M}=\{x-x_0;y-y_0;z-z_0\}$

$\bar{s}\parallel\overline{M_0M}$ $\Rightarrow$ их координаты пропорциональны $\Rightarrow$

$$\boxed{\frac{x-x_0}{s_x}=\frac{y-y_0}{s_y}=\frac{z-z_0}{s_z}}$$

канонические уравнения прямой

$\bar{s}=\{s_x;s_y;s_z\}$ – направляющий вектор

3.6 ПРЯМАЯ ЛИНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Замечание

$$\frac{x-x_0}{s_x}=\frac{y-y_0}{s_y}=\frac{z-z_0}{s_z}=t$$

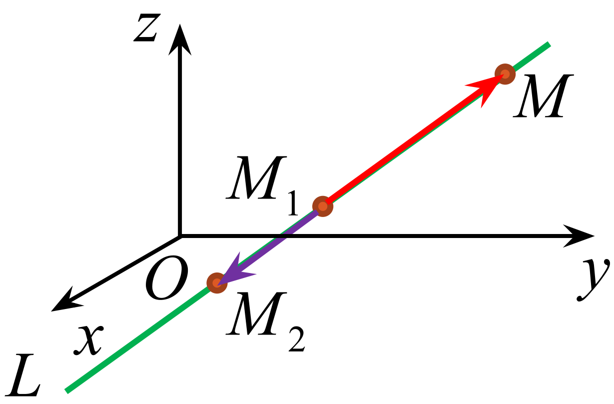
Пусть коэффициент пропорциональности равен ***t***, тогда

$$\begin{cases}\dfrac{x-x_0}{s_x}=t\\[2ex]\dfrac{y-y_0}{s_y}=t\\[2ex]\dfrac{z-z_0}{s_z}=t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-x_0=t\cdot s_x\\y-y_0=t\cdot s_y\\z-z_0=t\cdot s_z\end{cases}\Rightarrow\boxed{\begin{cases}x=x_0+t\cdot s_x\\y=y_0+t\cdot s_y\\z=z_0+t\cdot s_z\end{cases}}\quad t\in(-\infty;+\infty)$$

параметрические уравнения прямой

3.6 ПРЯМАЯ ЛИНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Задача 2



Вывести уравнения прямой ***L***, проходящей через две заданные точки.

Дано: $M_1(x_1;y_1;z_1)\in L,\ \ M_2(x_2;y_2;z_2)\in L$

Найти: ***L***

Решение:

$$\overline{M_1M_2}=\{x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1\}$$

Пусть $M(x;y;z)\in L$ – текущая точка, тогда $\overline{M_1M}=\{x-x_1;y-y_1;z-z_1\}$

$\overline{M_1M}\,||\,\overline{M_1M_2}$ $\Rightarrow$ их координаты пропорциональны $\Rightarrow$

$$\boxed{\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}}$$

уравнения прямой, проходящей через две заданные точки

3.6 ПРЯМАЯ ЛИНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Замечание

$$\frac{x-x_0}{s_x}=\frac{y-y_0}{s_y}=\frac{z-z_0}{s_z}$$

1

$$s_x=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{x-x_0}{0}=\frac{y-y_0}{s_y}=\frac{z-z_0}{s_z}$$

Прямая перпендикулярна оси ***Ox***

$$s_y=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{x-x_0}{s_x}=\frac{y-y_0}{0}=\frac{z-z_0}{s_z}$$

Прямая перпендикулярна оси ***Oy***

$$s_z=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{x-x_0}{s_x}=\frac{y-y_0}{s_y}=\frac{z-z_0}{0}$$

Прямая перпендикулярна оси ***Oz***

2

$$s_y=s_z=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{x-x_0}{s_x}=\frac{y-y_0}{0}=\frac{z-z_0}{0}$$

Прямая параллельна оси ***Ox***

$$s_x=s_z=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{x-x_0}{0}=\frac{y-y_0}{s_y}=\frac{z-z_0}{0}$$

Прямая параллельна оси ***Oy***

$$s_x=s_y=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{x-x_0}{0}=\frac{y-y_0}{0}=\frac{z-z_0}{s_z}$$

Прямая параллельна оси ***Oz***

3.6 ПРЯМАЯ ЛИНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

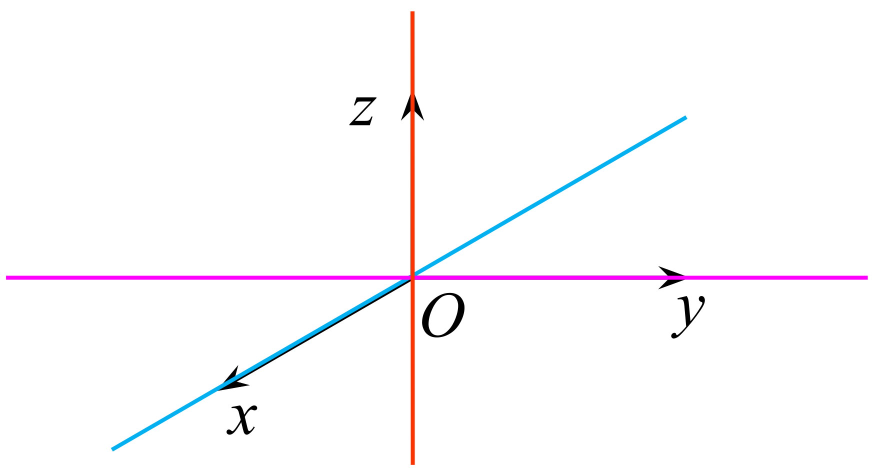
Замечание

3

$$\frac{x-x_0}{s_x}=\frac{y}{0}=\frac{z}{0}\ \text{или}\ \frac{x}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z}{0}\ \text{или}\ \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$$ Ось ***Ox***

$$\frac{x}{0}=\frac{y-y_0}{s_y}=\frac{z}{0}\ \text{или}\ \frac{x}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{0}\ \text{или}\ \begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$$ Ось ***Oy***

$$\frac{x}{0}=\frac{y}{0}=\frac{z-z_0}{s_z}\ \text{или}\ \frac{x}{0}=\frac{y}{0}=\frac{z}{1}\ \text{или}\ \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$ Ось ***Oz***



3.6 ПРЯМАЯ ЛИНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Обобщение

Мы получили несколько типов (форм записи) уравнений прямой в пространстве, которые отличаются по внешнему виду:

1) общие уравнения,
2) канонические уравнения,
3) параметрические уравнения,
4) уравнения прямой, проходящей через две точки.

Очевидно, что с помощью алгебраических преобразований можно легко перейти от одной формы записи к другой.

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{x - x_0}{s_x} = \frac{y - y_0}{s_y} = \frac{z - z_0}{s_z}$$

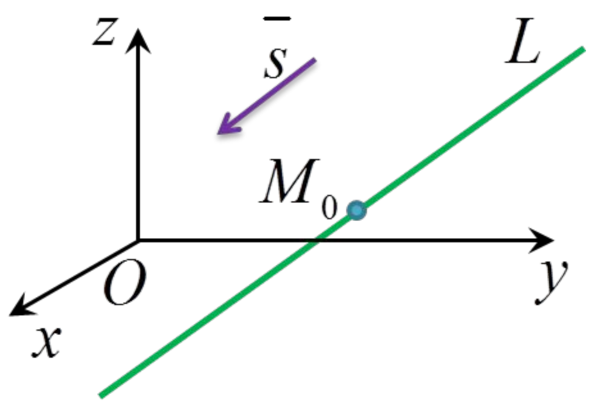
$$\begin{cases} x = x_0 + t \cdot s_x \\ y = y_0 + t \cdot s_y \\ z = z_0 + t \cdot s_z \end{cases}$$

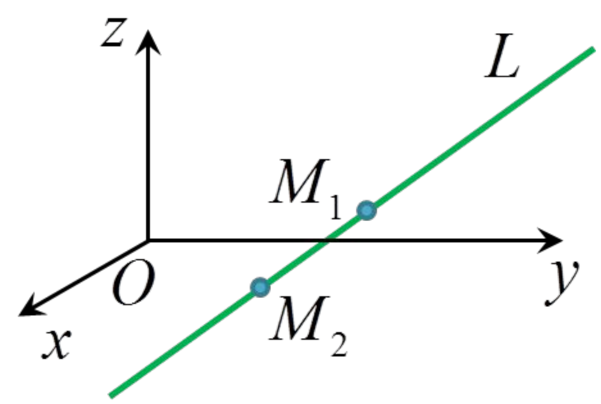
$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

3.6 ПРЯМАЯ ЛИНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Указания к составлению уравнений прямой в пространстве

Дано	Выбор формулы
Точка и параллельный вектор	$\dfrac{x-x_0}{s_x}=\dfrac{y-y_0}{s_y}=\dfrac{z-z_0}{s_z}$
Две точки	$\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$





3.6 ПРЯМАЯ ЛИНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

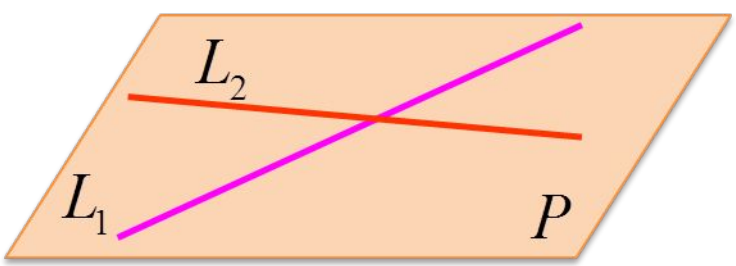
Взаимное расположение прямых в пространстве

Рассмотрим две прямые, заданные каноническими уравнениями, и соответствующие им направляющие векторы:

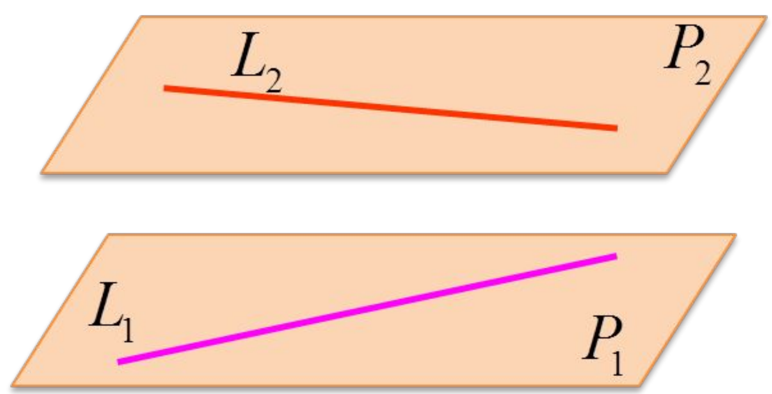
$$L_1: \frac{x-x_1}{s_{1x}} = \frac{y-y_1}{s_{1y}} = \frac{z-z_1}{s_{1z}} \qquad \overline{s_1} = \left\{s_{1x}; s_{1y}; s_{1z}\right\} \parallel L_1$$

$$L_2: \frac{x-x_2}{s_{2x}} = \frac{y-y_2}{s_{2y}} = \frac{z-z_2}{s_{2z}} \qquad \overline{s_2} = \left\{s_{2x}; s_{2y}; s_{2z}\right\} \parallel L_2$$

Прямые могут лежать в одной плоскости.



Прямые могут быть скрещивающимися.



3.6 ПРЯМАЯ ЛИНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Взаимное расположение прямых на плоскости

1

Параллельность прямых

Две параллельные прямые всегда лежат в одной плоскости.

$$L_1 \parallel L_2 \iff \overline{s_1} \parallel \overline{s_2} \iff \frac{s_{1x}}{s_{2x}} = \frac{s_{1y}}{s_{2y}} = \frac{s_{1z}}{s_{2z}}$$

2

Совпадение прямых

К условию параллельности прямых добавляется требование того, что хотя бы одна точка первой прямой принадлежит второй прямой.

3

Перпендикулярность прямых

Две перпендикулярные прямые могут лежать в одной плоскости или могут быть скрещивающимися.

$$L_1 \perp L_2 \iff \overline{s_1} \perp \overline{s_2} \iff \overline{s_1} \cdot \overline{s_2} = 0 \iff s_{1x} \cdot s_{2x} + s_{1y} \cdot s_{2y} + s_{1z} \cdot s_{2z} = 0$$

3.6 ПРЯМАЯ ЛИНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Взаимное расположение прямых на плоскости

4 Угол между прямыми

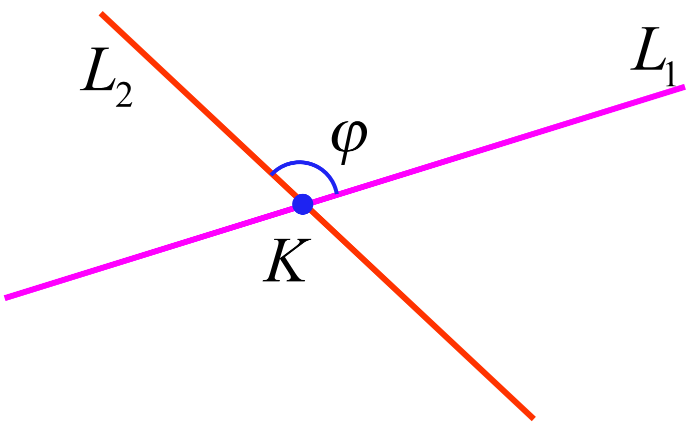
$$\cos\angle(L_1;L_2)=\cos\angle(\overline{s_1};\overline{s_2})=\frac{\overline{s_1}\cdot\overline{s_2}}{|\overline{s_1}|\cdot|\overline{s_2}|}=\frac{s_{1x}\cdot s_{2x}+s_{1y}\cdot s_{2y}+s_{1z}\cdot s_{2z}}{\sqrt{s_{1x}^2+s_{1y}^2+s_{1z}^2}\cdot\sqrt{s_{2x}^2+s_{2y}^2+s_{2z}^2}}$$

$$\angle(L_1;L_2)=\arccos\frac{s_{1x}\cdot s_{2x}+s_{1y}\cdot s_{2y}+s_{1z}\cdot s_{2z}}{\sqrt{s_{1x}^2+s_{1y}^2+s_{1z}^2}\cdot\sqrt{s_{2x}^2+s_{2y}^2+s_{2z}^2}}=\varphi$$

5 Пересечение прямых

Только для прямых, лежащих в одной плоскости.

$$K(x_k;y_k;z_k):\begin{cases}\dfrac{x-x_1}{s_{1x}}=\dfrac{y-y_1}{s_{1y}}=\dfrac{z-z_1}{s_{1z}}\\[2ex]\dfrac{x-x_2}{s_{2x}}=\dfrac{y-y_2}{s_{2y}}=\dfrac{z-z_2}{s_{2z}}\end{cases}$$



3.7 ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

Пусть прямая задана каноническими уравнениями, а плоскость – общим уравнением.

$$L: \frac{x-x_0}{s_x} = \frac{y-y_0}{s_y} = \frac{z-z_0}{s_z} \qquad \bar{s} = \{s_x; s_y; s_z\} \parallel L$$

$$P: Ax + By + Cz + D = 0 \qquad \bar{n} = \{A; B; C\} \perp P$$

1 Параллельность прямой и плоскости

$$L \parallel P \Leftrightarrow \bar{s} \perp \bar{n} \Leftrightarrow \bar{s} \cdot \bar{n} = 0 \Leftrightarrow s_x \cdot A + s_y \cdot B + s_z \cdot C = 0$$

2 Прямая лежит в плоскости

К условию параллельности прямой и плоскости добавляется требование того, что хотя бы одна точка прямой принадлежит плоскости.

3 Перпендикулярность прямой и плоскости

$$L \perp P \Leftrightarrow \bar{s} \parallel \bar{n} \Leftrightarrow \frac{s_x}{A} = \frac{s_y}{B} = \frac{s_z}{C}$$

3.7 ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

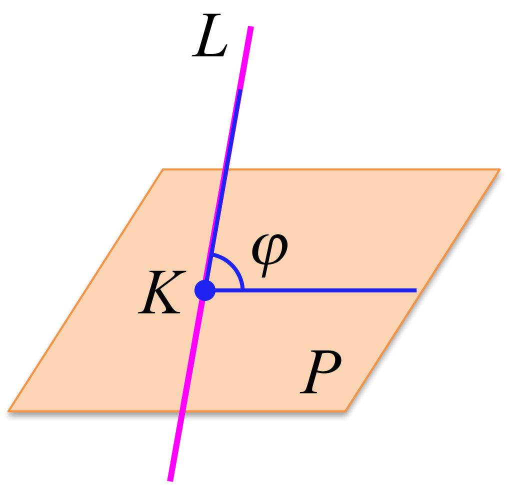
4 Угол между прямой и плоскостью

$$\sin\angle(L;P) = \left|\cos\angle(\bar{s};\bar{n})\right| = \frac{\left|\bar{s}\cdot\bar{n}\right|}{\left|\bar{s}\right|\cdot\left|\bar{n}\right|} = \frac{\left|s_x\cdot A + s_y\cdot B + s_z\cdot C\right|}{\sqrt{s_x^2+s_y^2+s_z^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$\angle(L;P) = \arcsin\frac{\left|s_x\cdot A + s_y\cdot B + s_z\cdot C\right|}{\sqrt{s_x^2+s_y^2+s_z^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \varphi$$

5 Точка пересечения прямой и плоскости

$$K(x_k;y_k;z_k):\ \begin{cases}\dfrac{x-x_0}{s_x}=\dfrac{y-y_0}{s_y}=\dfrac{z-z_0}{s_z}\\ Ax+By+Cz+D=0\end{cases}$$



Лекция выложена впервые.

Если Вы заметили ошибку, то сообщите мне на эл. почту.