Лекція № 6. * Елементи спеціальної теорії відносності

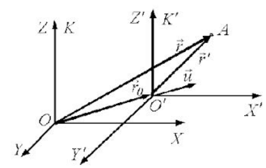
1. Перетворення координат Галілея та їх інваріанти. Принцип відносності в класичній механіці.
2. Передумови спеціальної теорії відносності.
3. Постулати Ейнштейна.
4. Перетворення координат Лоренца.
5. Релятивістський закон додавання швидкостей. Відносність довжин та проміжків часу. Інтервал між подіями.
6. Основний закон релятивістської динаміки. Релятивістський імпульс. Взаємозв’язок маси та енергії.
7. Границі застосовності класичної механіки.

Лекція № 6. * Елементи спеціальної теорії відносності.

1. **Перетворення координат Галілея та їх інваріанти. Принцип відносності в класичній механіці.**
2. **Передумови спеціальної теорії відносності.**
3. **Постулати Ейнштейна.**
4. **Перетворення координат Лоренца.**
5. **Релятивістський закон додавання швидкостей. Відносність довжин та проміжків часу. Інтервал між подіями.**
6. **Основний закон релятивістської динаміки. Релятивістський імпульс. Взаємозв'язок маси та енергії.**
7. **Границі застосовності класичної механіки.**

1. Перетворення координат Галілея та їх інваріанти. Принцип відносності в класичній механіці.

Якщо інерціальна нерухома система K' рухається відносно системи K рівномірно і прямолінійно із швидкістю $\vec{u}$ (рис.) то $\vec{r}_0 = \vec{u}t$. Відлік часу починають з моменту, коли початки координат обох систем збігаються.



Зв'язок між координатами довільної точки A в обох системах називають ***перетворенням координат Галілея***:

$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{r}_0 = \vec{r}\,' + \vec{u}t,$$

або в проекціях на осі координат:

$$x = x' + u_x t,$$

$$y = y' + u_y t,$$

$$z = z' + u_z t.$$

У класичній механіці передбачається, що хід часу не залежить від відносного руху систем відліку: $t = t'$.

Записані вище співвідношення мають місце лише в класичній механіці $(u << c)$.

Отримаємо правило додавання швидкостей в класичній механіці:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}\,'}{dt} + \vec{u}, \quad \vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}\,' + \vec{u}.$$

Прискорення в системі відліку K

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d(\vec{\upsilon}\,' + \vec{u})}{dt} = \frac{d\vec{\upsilon}\,'}{dt} = \vec{a}\,'.$$

Сила $\vec{F}$, що діє на частинку в системі K, збігається з силою $\vec{F}'$, що діє на частинку в системі K': $\vec{F} = \vec{F}'$. Це пов'язано з тим, що сила залежить від відстані між даною частинкою і частинками, які діють на неї або їх відносними швидкостями руху, а вони в ньютонівській механіці вважаються однаковими у всіх інерціальних системах, як і маса.

Рівняння динаміки не змінюються при переході від однієї інерціальної системи відліку до іншої, тобто є інваріантними відносно перетворення координат, тобто, як зазначив Галілей зазначив, ніякими механічними дослідами, проведені в даній інерціальній системі відліку, не можна встановити, чи знаходиться вона в стані спокою, чи рухається рівномірно і прямолінійно – ***механічний принцип відносності****.*

2. Передумови спеціальної теорії відносності.

Принцип відносності вперше був сформульований Галілеєм. Відкидаючи застарілу концепцію руху Аристотеля, він стверджував, що рух, принаймні рівномірний та прямолінійний, відбувається "відносно чогось", і немає ніякої абсолютної системи відліку, відносно якої можна було б відштовхуватись в проведенні фізичних вимірювань. Галілей сформулював певний набір перетворень, які дозволяли переходити між системами відліку, та отримали назву перетворень Галілея.

Після Галілея Ньютон сформулював свої три закони, які добре пояснювали рух матеріальних тіл, але не пояснювали рух світла, природа якого на той час була не відома. Ньютон вірив, що світло є "корпускулярним", тобто складається з частинок, але пізніше фізики зрозуміли, що модель поперечних світла хвиль дозволяє пояснити природу світа. Аналогічно тому, як механічні хвилі розповсюджуються в певному середовищі, так і хвилі світла повинні були мати його для свого розповсюдження. Це гіпотетичне середовище отримало назву "світлового ефіру". Ідея ефіру була, в якомусь розумінні, відродженням ідеї абсолютної системи відліку – стаціонарної відносно ефіру.

На початку XIX століття, світло, електрику та магнетизм стали розуміти як різні аспекти електромагнітного ефірного поля. Рівняння Максвелла доводили, що рух заряджених об'єктів продукує електромагнітне випромінювання, швидкість розповсюдження якого завжди є швидкістю світла. Ці рівняння базувалися на ідеї існування ефіру, в якому швидкість розповсюдження такого випромінювання не змінюється зі зміною швидкості джерела. Зрозуміло, що фізики намагались виміряти швидкість Землі відносно ефіру. Результати цих експериментів зійшлись в одному: швидкість світла не змінюється зі зміною швидкості спостерігача, тобто має бути інваріантною для всіх спостерігачів.

Ще до появи СТВ, Хендрік Лоренц та інші помітили, що прояви електромагнітного поля можуть бути різними в залежності від стану спостерігача. Наприклад, один спостерігач може не спостерігати магнітного поля, а інший спостерігач, який рухається відносно першого, може.

Коли Лоренц запропонував свої правила перетворень, як альтернативу Галілеєвим, завданням Ейнштейна було вивести їх із фундаментальних закономірностей без урахування існування ефіру. Ейнштейну намагався встановити, що є інваріантним відносно кожного спостерігача. В спеціальній теорії відносності формули перетворень Лоренца виводяться просто з основ геометрії та теореми Піфагора. Оригінальна теорія була опублікована в праці "До електродинаміки тіл, що рухаються" (1905). Термін "відносність" був запропонований Максом Планком для визначення процесів зміни фізичних законів для спостерігачів, які рухаються один відносно одного.

3. Постулати Ейнштейна.

Спеціальна теорія відносності – це сучасна фізична теорія простору і часу, яку називають релятивістською теорією, а явища, що описуються у цій теорії, – релятивістськими ефектами, які проявляються при швидкостях руху тіл, близьких за величиною до швидкості світла у вакуумі $c \approx 3\cdot 10^8 \frac{м}{с}$.

Релятивістською механікою називається механіка рухів з релятивістськими швидкостями, яка ґрунтується на спеціальній теорії відносності.

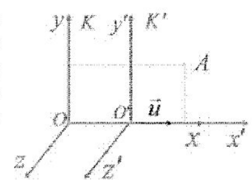
В основі спеціальної теорії відносності лежать ***два постулати Ейнштейна***:

I. ***Принцип відносності****: ніякі досліди (механічні, електричні, оптичні), які проведені всередині даної інерціальної системи відліку, не дають можливості виявити, чи знаходиться ця система в стані спокою чи рухається рівномірно і прямолінійно: всі закони природи інваріантні відносно переходу від однієї інерціальної системи відліку до іншої.*

II. ***Принцип інваріантності швидкості світла****: швидкість світла у вакуумі не залежить від швидкості руху джерела світла або спостерігача і однакова у всіх інерціальних системах відліку.*

4. Перетворення координат Лоренца.

Розглянемо дві інерціальні системи відліку: K і K', яка рухається відносно K вздовж осі Ox з швидкістю $\vec{u}$ (див. рис.). Нехай в початковий момент часу $t = t' = 0$, коли початки O і O' збігаються, випромінюється світловий імпульс. Швидкість світла в обох системах одна і та сама і дорівнює c. Тому, якщо за час t в системі K сигнал дійде до деякої точки A, пройшовши відстань



$$x = ct,$$

то в системі K' координата світлового імпульсу в момент досягнення точки A

$$x' = ct', \; x' - x = c(t' - t).$$

Оскільки $x' \neq x$, тому що система K' переміщається відносно до системи K, то $t' \neq t$. В результаті відлік часу має відносний характер.

Ейнштейн показав, що в теорії відносності перехід від однієї інерціальної системи відліку до іншої описується перетвореннями Лоренца:

$$x = \frac{x' + ut'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + \frac{ux'}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}};$$

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{ux}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}; \text{ де } \beta = \frac{u}{c}.$$

Перетворення Лоренца переходять у перетворення Галілея, якщо $u << c$.

5. Релятивістський закон додавання швидкостей. Відносність довжин та проміжків часу. Інтервал між подіями.

Розглянемо рух матеріальної точки в системі K', яка рухається відносно системи K із швидкістю u. Якщо в системі K рух точки в кожний момент часу t визначається координатами x, y, z, а в системі K' в момент часу t – координатами x', y', z', то

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt},\ \upsilon_y = \frac{dy}{dt},\ \upsilon_z = \frac{dz}{dt},$$
$$\upsilon'_{x'} = \frac{dx'}{dt'},\ \upsilon'_{y'} = \frac{dy'}{dt'},\ \upsilon'_{z'} = \frac{dz'}{dt'}$$

є проекціями вектора швидкості точки відносно систем K і K' на відповідні координатні осі. Використаємо перетворення Лоренца

$$dx = \frac{dx' + u\,dt'}{\sqrt{1-\beta^2}},\ dy = dy',\ dz = dz',$$
$$dt = \frac{dt' + \frac{u}{c^2}dx'}{\sqrt{1-\beta^2}},\ \beta = \frac{u}{c}.$$

Розділимо перші три рівності на четверту:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx' + u\,dt'}{dt' + \frac{u}{c^2}dx'} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + u}{1 + \frac{u}{c^2}\frac{dx'}{dt'}},$$
$$\frac{dy}{dt} = dy'\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{dt' + \frac{u}{c^2}dx'} = \frac{dy'}{dt'}\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{u}{c^2}\frac{dx'}{dt'}},$$
$$\frac{dz}{dt} = dz'\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{dt' + \frac{u}{c^2}dx'} = \frac{dz'}{dt'}\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{u}{c^2}\frac{dx'}{dt'}}.$$

В результаті отримуємо формули перетворення швидкостей при переході від однієї системи відліку до іншої:

$$\upsilon_x = \frac{\upsilon'_{x'} + u}{1 + \frac{u}{c^2}\upsilon'_{x'}},\ \upsilon_y = \frac{\upsilon'_{y'}\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{u}{c^2}\upsilon'_{x'}},\ \upsilon_z = \frac{\upsilon'_{z'}\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{u}{c^2}\upsilon'_{x'}}.$$

Аналогічно

$$\upsilon'_{x'} = \frac{\upsilon_x - u}{1 - \frac{u}{c^2}\upsilon_x},\ \upsilon'_{y'} = \frac{\upsilon_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{u}{c^2}\upsilon_x},\ \upsilon'_{z'} = \frac{\upsilon_z\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{u}{c^2}\upsilon_x}.$$

Якщо матеріальна точка рухається паралельно осі Ox, то швидкість υ відносно системи K збігається з υ_x, а швидкість υ' відносно K' – з υ'_x. Тоді

$$\upsilon = \frac{\upsilon' + u}{1 + \frac{\upsilon' u}{c^2}},\ \upsilon' = \frac{\upsilon - u}{1 - \frac{\upsilon' u}{c^2}}.$$

Якщо швидкості υ, υ' і u малі порівняно з швидкістю c, то

$$\upsilon = \upsilon' + u,\ \upsilon' = \upsilon - u.$$

Якщо $\upsilon' = c$, то

$$\upsilon = \frac{c + u}{1 + \frac{cu}{c^2}} = \frac{c + u}{c + u}c = c.$$

Нехай $\upsilon' = u = c$.

$$\upsilon = \frac{c + c}{1 + \frac{c \cdot c}{c^2}} = c.$$

При додаванні довільних швидкостей їх сума не може перевищити швидкості світла c у вакуумі.

Нехай в системі K в точках з координатами x_1 і x_2 в моменти часу t_1 і t_2 відбуваються дві події. В системі K', яка рухається відносно K з швидкістю $\vec{u}$ вздовж осі Ox, цим подіям відповідають координати x'_1 і x'_2 в моменти часу t'_1 і t'_2 (рис.). Якщо події в системі K відбуваються в одній точці $(x_1 = x_2)$ і є одночасними $(t_1 = t_2)$, то згідно з перетвореннями Лоренца

$$x'_1 = x'_2 \text{ і } t'_1 = t'_2,$$

тобто ці події є одночасними і такими, що просторово збігаються для довільної інерціальної системи відліку.

Якщо події в системі K просторово розділені $(x_1 \neq x_2)$, але одночасні $(t_1 = t_2)$, то в системі K'

$$x'_1 = \frac{x_1 - ut}{\sqrt{1-\beta^2}},\ x'_2 = \frac{x_2 - ut}{\sqrt{1-\beta^2}},$$
$$t'_1 = \frac{t - \frac{u}{c^2}x_1}{\sqrt{1-\beta^2}},\ t'_2 = \frac{t - \frac{u}{c^2}x_2}{\sqrt{1-\beta^2}},$$
$$x'_1 = x'_2,\ t'_1 \neq t'_2.$$

Отже, *в системі K' ці події, залишаючись просторово розділеними, виявляються і неодночасними.*

Знак різниці $t'_2 - t'_1$ визначається знаком виразу $u(x_1 = x_2)$, тому в різних точках системи K' (при різних u) різниця $t'_2 - t'_1$ буде неоднаковою за величиною і за знаком.

Нехай в деякій точці, яка нерухома в системі K, відбувається подія, тривалість якої $\tau = t_2 - t_1$. Тривалість цієї події в системі K'

$$\tau' = t'_2 - t'_1 = \frac{t_2 - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{t_1 - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

або

$$\tau' = \frac{\tau}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Отже, $\tau < \tau'$ *і тривалість події, що відбувається в деякій точці, найменша в тій інерціальній системі відліку, відносно якої ця точка нерухома.*

Отже, годинники, які рухаються відносно інерціальної системи відліку, йдуть повільніше від нерухомих годинників.

Нехай деяке тіло (наприклад, стержень) розміщене вздовж осі Ox', рухається разом з системою відліку K' і має в цій системі довжину $l_0 = x'_2 - x'_1$, де x'_1 і x'_2 – координати початку і кінця стержня, які не змінюються з часом t'. Визначимо довжину стержня в системі K, відносно якої він рухається зі швидкістю u. Для цього треба виміряти координати його кінців x_1 і x_2 в системі K в один і той самий момент часу t:

$$l_0 = x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - ut}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{x_1 - ut}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

тобто

$$l = l_0\sqrt{1-\beta^2}.$$

Отже, *довжина стрижня, яка виміряна в системі, відносно якої він рухається, є меншою від довжини, виміряної в системі, відносно якої стрижень знаходиться у стані спокою.*

Поперечні розміри тіла не залежать від швидкості його руху і однакові у всіх інерціальних системах відліку.

6. Основний закон релятивістської динаміки. Релятивістський імпульс. Взаємозв'язок маси та енергії.

Другий закон Ньютона для матеріальної точки

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} \quad \text{або} \quad \vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{\upsilon}),$$

в якому маса m точки вважається сталою і однаковою у всіх інерціальних системах відліку, виявляється не інваріантним по відношенню до перетворення Лоренца. Отже, цей закон не може служити основою релятивістської динаміки.

У релятивістській механіці, як і в ньютонівській, імпульс $\vec{p}$ матеріальної точки пропорційний до її маси m і збігається за напрямком з швидкістю $\vec{\upsilon}$ цієї точки. Проте, на відміну від ньютонівської механіки, імпульс матеріальної точки є нелінійною функцією її швидкості:

$$\vec{p} = m\vec{\upsilon} = \frac{m_0\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}},$$

де $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}$ – релятивістська маса,

а m_0 – маса спокою матеріальної точки, тобто маса, яка виміряна в тій інерціальній системі відліку, відносно якої матеріальна точка знаходиться в стані спокою.

Основний закон релятивістської динаміки: *швидкість зміни імпульсу матеріальної точки дорівнює силі $\vec{F}$, що діє на цю точку, тобто*

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\vec{\upsilon}\right) = \vec{F}.$$

Елементарна робота сили $\vec{F}$ на малому переміщенні $d\vec{r}$ точки її прикладення дорівнює:

$$dA = \left(\vec{F}, d\vec{r}\right) = \left(\vec{F}, \vec{\upsilon}\,dt\right) = \left(\vec{\upsilon}, d\vec{p}\right) = \upsilon\left\{\frac{m_0 d\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} + \frac{m_0\vec{\upsilon}\left(\frac{\vec{\upsilon}\,d\vec{\upsilon}}{c^2}\right)}{\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{3/2}}\right\} = \frac{m_0 d\left(\frac{\upsilon^2}{2}\right)}{\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{3/2}} = \frac{m_0 c^2 d\left(\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)}{2\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{3/2}} = c^2 d\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right),$$

враховуючи, що $\upsilon\,d\upsilon = d\left(\upsilon^2/2\right)$.

Приріст кінетичної енергії $dE_к$ матеріальної точки дорівнює роботі dA:

$$dE_к = c^2 d\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right) = c^2 dm.$$

Інтегруючи отримане співвідношення, маємо:

$$E_к = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} + C.$$

При $\upsilon = 0$, $E_k = 0$ і $C = -m_0 c^2$.

Отже, ***релятивістський вираз для кінетичної енергії частинки має вигляд***:

$$E_к = m_0 c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} - 1\right) = mc^2 - m_0 c^2.$$

При $\upsilon << c$, $\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}$ розкладемо в ряд, обмежившись членами другого порядку малості:

$$\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}} \approx \frac{1}{1+\frac{1}{2}\frac{\upsilon^2}{c^2}}.$$

Тоді

$$E_к = m_0 c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} - 1\right) \approx m_0 c^2\left(1+\frac{1}{2}\frac{\upsilon^2}{c^2} - 1\right) = \frac{m_0\upsilon^2}{2}.$$

Ейнштейн узагальнив положення $dE_к = c^2 dm$, передбачивши, що воно справедливе не лише для кінетичної енергії матеріальної точки, але і для повної енергії, а саме: довільна зміна маси Δm супроводжується зміною повної енергії матеріальної точки:

$$\Delta E = c^2 \Delta m.$$

Звідси Ейнштейн отримав універсальну залежність між повною енергією тіла E і його масою m – ***закон взаємозв'язку маси і енергії***:

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}.$$

Знайдемо релятивістську залежність між повною енергією й імпульсом частинки:

$$E^2 = m^2 c^4 = \frac{m_0^2 c^4}{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}} = \frac{m_0^2 c^4\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)}{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}} + \frac{m_0^2\upsilon^2 c^2}{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}} = m_0^2 c^4 + \frac{m_0^2\upsilon^2 c^2}{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}} = \; = m_0^2 c^4 + m^2\upsilon^2 c^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2$$

і

$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2}.$$

Якщо тіло нерухоме, то

$$E_0 = m_0 c^2,$$

де E_0 енергія спокою тіла.

7. Границі застосовності класичної механіки.

Класична механіка дає точні результати для систем, які ми зустрічаємо в повсякденні. Але вони стають некоректними для систем, швидкість яких наближається до швидкості світла. Тоді класична механіка замінюється релятивістською механікою, або для дуже малих систем квантовою механікою.