Бесконечно большие последовательности

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Числовая последовательность* $\{x_n\}$ *называется* ***бесконечно большой***, *если* $\forall M>0$ $\exists N\in\mathbb{N}$ *такое, что*

$$|x_n|>M,\ \forall n>N.$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Расширим множество $\mathbb{R}$.

I способ. Дополним множество $\mathbb{R}$ элементами, обозначаемыми $+\infty$ и $-\infty$ (называют: «плюс бесконечность» и «минус бесконечность»)

При этом справедливо: $-\infty < r < +\infty$, $\forall r\in\mathbb{R}$.

II способ. Дополним множество $\mathbb{R}$ элементом, обозначаемыми ∞ (называют: «бесконечность»)

При этом ∞ не связана с действительными числами отношением порядка.

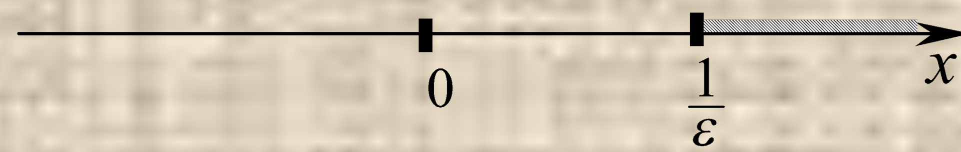
Множество $\mathbb{R}\cup\{-\infty, +\infty\}$ и $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ называют ***расширенным множеством действительных чисел*** (способ расширения всегда понятен из контекста).

Обозначают: $\overline{\mathbb{R}}$.

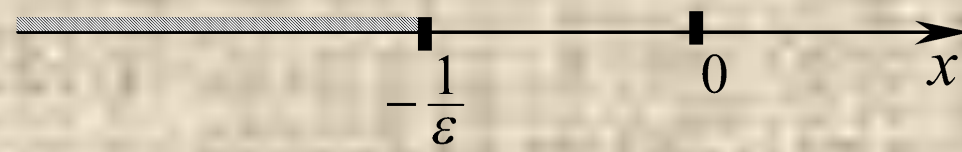
Элементы $-\infty$, $+\infty$, ∞ называют бесконечно удаленными точками числовой прямой.

ε-окрестностью точек $-\infty$, $+\infty$, ∞ считают следующие множества:

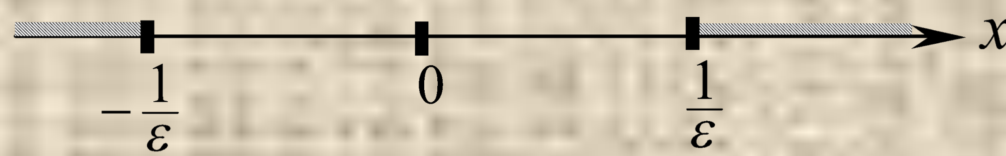
$U(+\infty, \varepsilon) = \{ x\in\mathbb{R} \mid x > 1/\varepsilon\}$



$U(-\infty, \varepsilon) = \{ x\in\mathbb{R} \mid x < -1/\varepsilon\}$



$U(\infty, \varepsilon) = \{ x\in\mathbb{R} \mid |x| > 1/\varepsilon\}$



Частные случаи бесконечно больших последовательностей:

1) $\{x_n\}$ – бесконечно большая и $x_n \geq 0$, $\forall n$.

Тогда $|x_n| = x_n > M$, $\forall n > N$

$\Rightarrow$ все члены последовательности, за исключением может быть конечного их числа, находятся в любой ε-окрестности точки + ∞.

Записывают: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty, \quad x_n \to \infty$

Говорят: «последовательность $\{x_n\}$ стремиться к + ∞».

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty, \quad x_n \to +\infty$$

2) $\{x_n\}$ – бесконечно большая и $x_n \leq 0$, $\forall n$.

Записывают:

Говорят: «последовательность $\{x_n\}$ стремиться к – ∞».

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty, \quad x_n \to -\infty$$

СВОЙСТВА БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

1) Если $\{x_n\}$ – б.б., то последовательность $\{1/x_n\}$ – б.м.
Если последовательность $\{\alpha_n\}$ – б.м, то $\{1/\alpha_n\}$ – б.б.

2) Если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ – б.б. последовательности одного знака, то их сумма $\{x_n + y_n\}$ – б.б. того же знака.

3) Если $\{x_n\}$ – б.б., а $\{y_n\}$ – ограниченна, то их сумма $\{x_n + y_n\}$ – б.б. последовательность.

4) Если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ – б.б., то их произведение $\{x_n \cdot y_n\}$ – б.б. последовательность.

5) Если $\{x_n\}$ – б.б., $\{y_n\}$ – сходящаяся, причем то их произведение $\{x_n \cdot y_n\}$ – б.б. последовательность.

6) Если $\{x_n\}$ – ограниченная и отделимая от нуля, $\{y_n\}$ – б.б., то их произведение $\{x_n \cdot y_n\}$ – б.б. последовательность.

7) Если последовательность $\{x_n\}$ – б.б. и для любого $n \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство

$$|x_n| < |y_n| \quad (|x_n| \leq |y_n|),$$

то последовательность $\{y_n\}$ тоже является б.б.

8) Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ – б.б. одного знака и для любого $n \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство $x_n \leq z_n \leq y_n$.
Тогда последовательность $\{z_n\}$ тоже является б.б. того же знака.

Бесконечно малые функции

Функция ***y = f(x)*** называется бесконечно малой при

$x \to x_0 \quad (x \to \infty)$ если $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x) = 0$

Бесконечно малые функции часто называют бесконечно малыми величинами; обозначают обычно греческими буквами ***α, β*** и т. д.

Например: $\lim\limits_{x \to 0}(\sin x) = 0 \quad \Rightarrow$

$\alpha(x) = \sin x$ - бесконечно малая функция при $x \to 0$

Теорема

Если функция ***y = f(x)*** имеет предел, равный ***A***, то ее можно представить как сумму числа ***A*** и бесконечно малой функции ***α(x)***

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = A + \alpha(x)$$

Свойства бесконечно малых

- Произведение двух бесконечно малых есть бесконечно малая высшего порядка по сравнению с сомножителями:

$$\gamma = \alpha \cdot \beta \quad \Rightarrow \quad \gamma = o(\alpha); \quad \gamma = o(\beta)$$

- Бесконечно малые эквивалентны тогда и только тогда, когда их разность является бесконечно малой высшего порядка относительно ***α*** и ***β*** .

$$\left[\gamma = \alpha - \beta; \gamma = o(\alpha); \gamma = o(\beta)\right] \Rightarrow \alpha \sim \beta$$

- Если отношение двух бесконечно малых имеет предел, то этот предел не изменится при замене каждой из бесконечно малых эквивалентной ей бесконечно малой.

$$\left[\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha}{\beta} = A; \quad \alpha \sim \alpha_1; \quad \beta \sim \beta_1\right] \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha_1}{\beta_1} = A$$

Полезно иметь в виду **эквивалентность** следующих бесконечно малых при $x \to 0$

$$\sin x \sim x; \qquad e^x - 1 \sim x; \qquad (1+x)^m - 1 \sim mx;$$
$$tgx \sim x; \qquad a^x - 1 \sim x \cdot \ln a; \qquad 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}.$$
$$\arcsin x \sim x; \qquad \ln(x+1) \sim x;$$
$$arctg\ x \sim x; \qquad \log_a(x+1) \sim x \cdot \log_a e;$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\sqrt[4]{1+x} - 1} = \left[\frac{0}{0}\right] \qquad \left(\begin{array}{l} \sin x \sim x \\ (1+x)^{\frac{1}{4}} - 1 \sim \frac{1}{4}x \end{array}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x}{0.25x} = 4$$

Непрерывность функции в точке

Пусть функция ***y = f(x)*** определена в некоторой окрестности точки x_0, и в самой точке x_0.

Функция ***y = f(x)*** называется непрерывной в точке x_0 , если существует предел функции в этой точке и он равен значению функции в этой точке:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \qquad (1)$$

Равенство ***(1)*** означает выполнение трех условий:

1 Функция ***y = f(x)*** определена в точке x_0 и в ее окрестности.

2 Функция ***y = f(x)*** имеет предел при $x \to x_0$

3 Предел функции в точке x_0 равен значению функции в этой точке.

Непрерывность функции в точке

Так как $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$ то равенство **(1)** можно записать в виде:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(\lim_{x \to x_0} x) = f(x_0)$$

Это значит, что при нахождении предела непрерывной функции можно перейти к пределу под знаком функции:

$$\lim_{x \to 0} e^{\frac{\sin x}{x}} = e^{\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}} = e^1 = e$$

Равенство справедливо в силу непрерывности функции ***y = e^x***

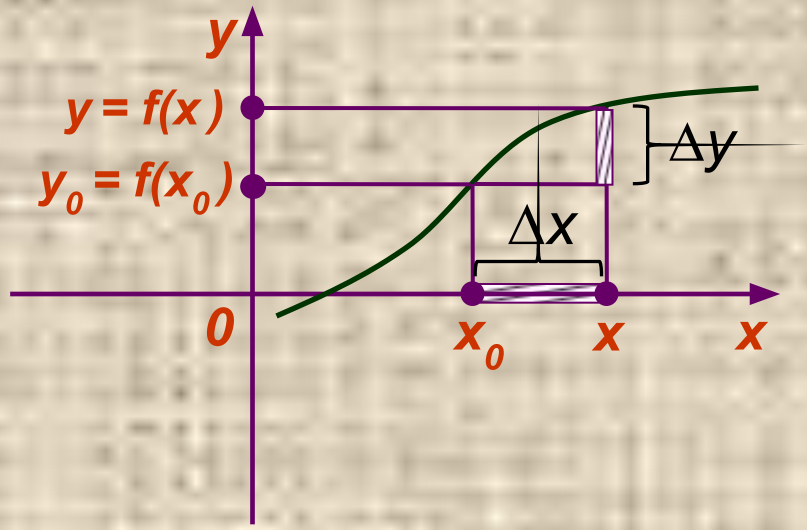
Непрерывность функции в точке

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой интервале $(a; b)$.

Возьмем произвольную точку $x_0 \in (a; b)$

Разность $x - x_0$ называется <u>*приращением аргумента*</u> x в точке x_0 и обозначается:

$$\Delta x = x - x_0$$

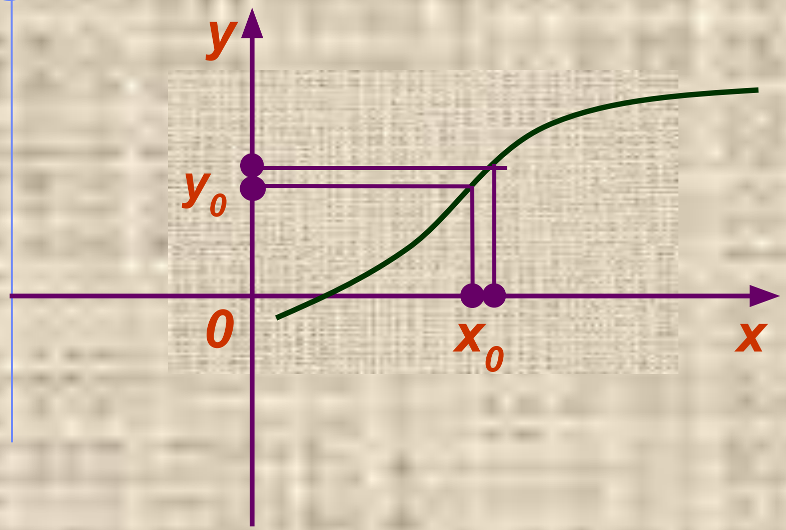


Разность соответствующих значений функций $f(x) - f(x_0)$ называется <u>*приращением функции*</u> $f(x)$ в точке x_0 и обозначается:

$$\Delta y = f(x) - f(x_0)$$

Приращения Δx и Δy могут быть положительными и отрицательными.

Непрерывность функции в точке



Преобразуем равенство **(1)**:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \quad \Rightarrow$$

$$\lim_{x - x_0 \to 0} \left[f(x) - f(x_0) \right] = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0}$$

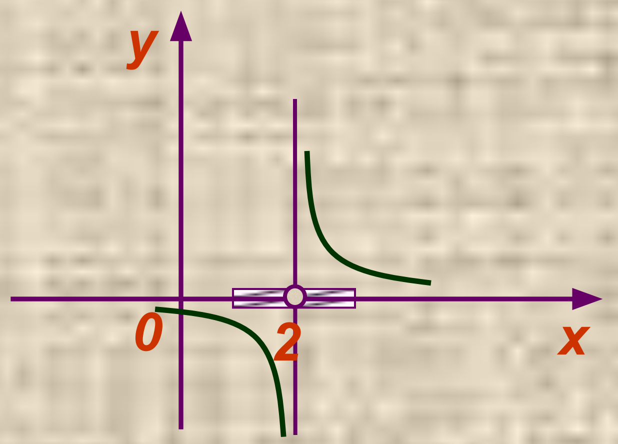
Полученное равенство является еще одним определением непрерывности функции в точке:

Функция ***y = f(x)*** называется ***непрерывной*** в точке x_0 , если она определена в точке x_0 и ее окрестности и бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

Точки разрыва функции

Точки, в которых нарушается непрерывность функции, называется ***точками разрыва функции***.

Если $x = x_0$ – точка разрыва функции, то в ней не выполняется по крайней мере одно из условий первого определения непрерывности, а именно:



1 Функция $f(x)$ определена в окрестности точки x_0, но не определена в самой точке x_0:

Функция $$y = \frac{1}{x-2}$$

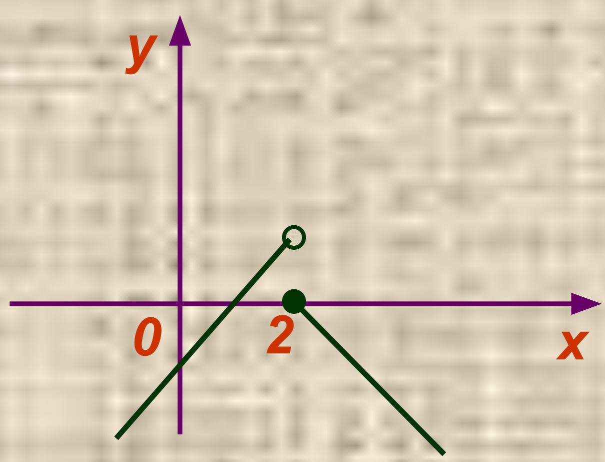
не определена в точке $x = 2$, но определена в любой окрестности этой точки, поэтому $x = 2$ - точка разрыва.

Точки разрыва функции

2 Функция $f(x)$ определена в точке x_0 и в ее окрестности, но не существует предела $f(x)$ при $x \to x_0$

Функция $y = \begin{cases} x-1; & x<2 \\ 2-x; & x \geq 2 \end{cases}$

определена в точке $x = 2$, но но не имеет предела при $x \to 2$:



$$\lim_{x\to 2-0} f(x) = 1 \qquad \lim_{x\to 2+0} f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to 2-0} f(x) \neq \lim_{x\to 2+0} f(x) \quad \Rightarrow$$

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ не существует, значит

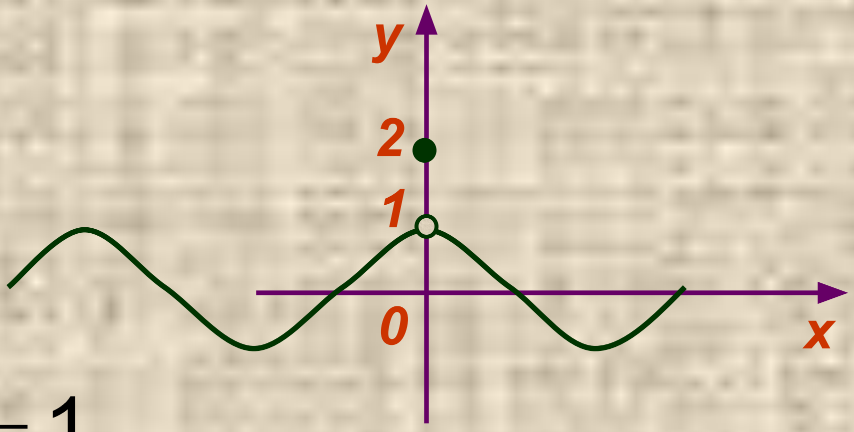
$x = 2$ - точка разрыва

Точки разрыва функции

3 Функция $f(x)$ определена в точке x_0 и в ее окрестности, существует предела $f(x)$ при $x \to x_0$, но этот предел не равен значению функции в точке x_0.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$$

$$y = \begin{cases} \cos x; & x \neq 0 \\ 2; & x = 0 \end{cases}$$



$$\lim_{x \to 0-0} f(x) = \lim_{x \to 0+0} f(x) = 1$$

$$f(0) = 2$$

$$\lim_{x \to 0-0} f(x) = \lim_{x \to 0+0} f(x) \neq f(0) \Rightarrow$$ $x = 0$ -точка разрыва

Точки разрыва функции

Точка разрыва x_0 называется ***точкой разрыва 1 рода*** функции $f(x)$, если в этой точке существуют конечные пределы слева и справа: $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A_1$ $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A_2$

При этом:

а) если $A_1 = A_2$, то x_0 - ***точка устранимого разрыва***
(в примере 3: $x = 0$ – точка устранимого разрыва 1 рода)

б) если $A_1 \neq A_2$, то x_0 - ***точка конечного разрыва***

Величину $\left| A_1 - A_2 \right|$ называют ***скачком функции*** в точке разрыва 1 рода.

(в примере 2: $x = 2$ – точка разрыва 1 рода, скачек функции равен: $\left| 1 - 0 \right| = 1$)

Точки разрыва функции

Точка разрыва x_0 называется ***точкой разрыва 2 рода*** функции $f(x)$, если по крайней мере один из односторонних пределов не существует или равен бесконечности.

В примере 1: $$y = \frac{1}{x-2}$$

$$\lim_{x \to 2-0} \frac{1}{x-2} = -\infty \qquad \lim_{x \to 2+0} \frac{1}{x-2} = +\infty$$

$x = 2$ – точка разрыва 2 рода.

Основные теоремы о непрерывных функциях

Теорема 1

Сумма, произведение и частное непрерывных функций есть функция непрерывная (для частного за исключением тех значений аргумента, где знаменатель равен нулю)

Теорема 2

Пусть функция $u = g(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $y = f(u)$ непрерывна в точке $u_0 = g(x_0)$. Тогда сложная функция $y = f(g(x))$ непрерывна в точке x_0.

Можно доказать, что все ***основные элементарные функции*** непрерывны при всех значениях x, при которых эти функции определены.

Поэтому из приведенных выше теорем вытекает: ***всякая элементарная функция непрерывна в каждой точке, в которой она определена.***

Непрерывность функции в интервале и на отрезке.

Функция ***y = f(x)*** называется ***непрерывной на интервале (a; b)***, если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Функция ***y = f(x)*** называется ***непрерывной на отрезке*** **[*a; b*]**, если она непрерывна на интервале ***(a; b)***, и в точке ***x = a*** непрерывна справа:

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = f(a)$$

а в точке ***x = b*** непрерывна слева:

$$\lim_{x \to b-0} f(x) = f(b)$$

Свойства функций, непрерывных на отрезке

Теорема (Вейерштрасса)

Если функция непрерывна на отрезке, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значения

Теорема (Больцано - Коши)

Если функция ***y = f(x)*** непрерывна на отрезке **[*a; b*]** и принимает на его концах неравные значения ***f(a) = A, f(b) = B***, то на этом отрезке она принимает все значения между ***A*** и ***B***.

Следствие

Если функция ***y = f(x)*** непрерывна на отрезке **[*a; b*]** и принимает на его концах значения разных знаков, то внутри отрезка найдется хотя бы одна точка ***c***, в которой данная функция обращается в ноль: ***f(c) = 0***