

«Методы и алгоритмы  
цифровой обработки сигналов  
на базе MATLAB»

*Моделирование алгоритмов  
вейвлет-преобразования.*

*Гармонические вейвлеты*

Клионский Д.М. — к.т.н., доцент кафедры  
математического обеспечения и применения ЭВМ (МОЭВМ)

# ГАРМОНИЧЕСКИЕ ВЕЙВЛЕТЫ (1)

**Спектральная плотность базисного вейвлета  
на нулевом уровне ( $j=0$ )**

$$W(\omega) = \begin{cases} 1/2\pi, & 2\pi \leq \omega < 4\pi \\ 0, & \omega < 2\pi, \omega \geq 4\pi \end{cases}$$

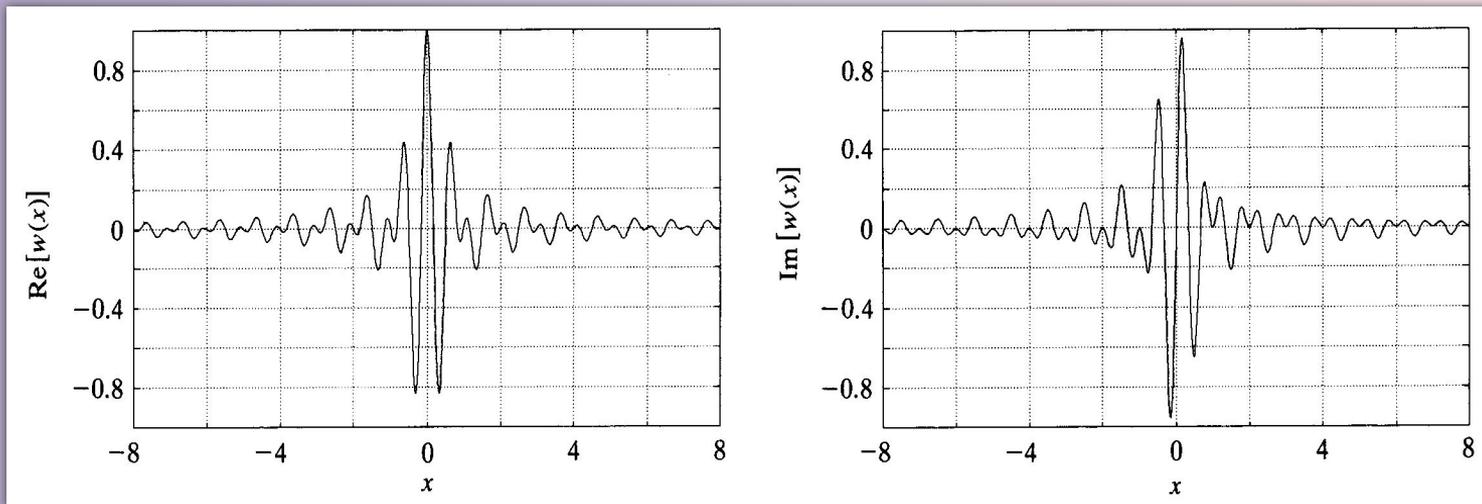
**Вид базисной функции во временной области**

$$w(x) = \frac{e^{i4\pi x} - e^{i2\pi x}}{i2\pi x}$$



# ГАРМОНИЧЕСКИЕ ВЕЙВЛЕТЫ (2)

## Вещественная и мнимая части базисной функции



# ГАРМОНИЧЕСКИЕ ВЕЙВЛЕТЫ (3)

**Спектральная плотность базисного вейвлета для  $k$ -го уровня разложения**

$$W(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} 2^{-j} e^{-\frac{i\omega k}{2^j}}, & 2\pi 2^j \leq \omega < 4\pi 2^j \\ 0, & \omega < 2\pi 2^j, \omega \geq 4\pi 2^j \end{cases}$$

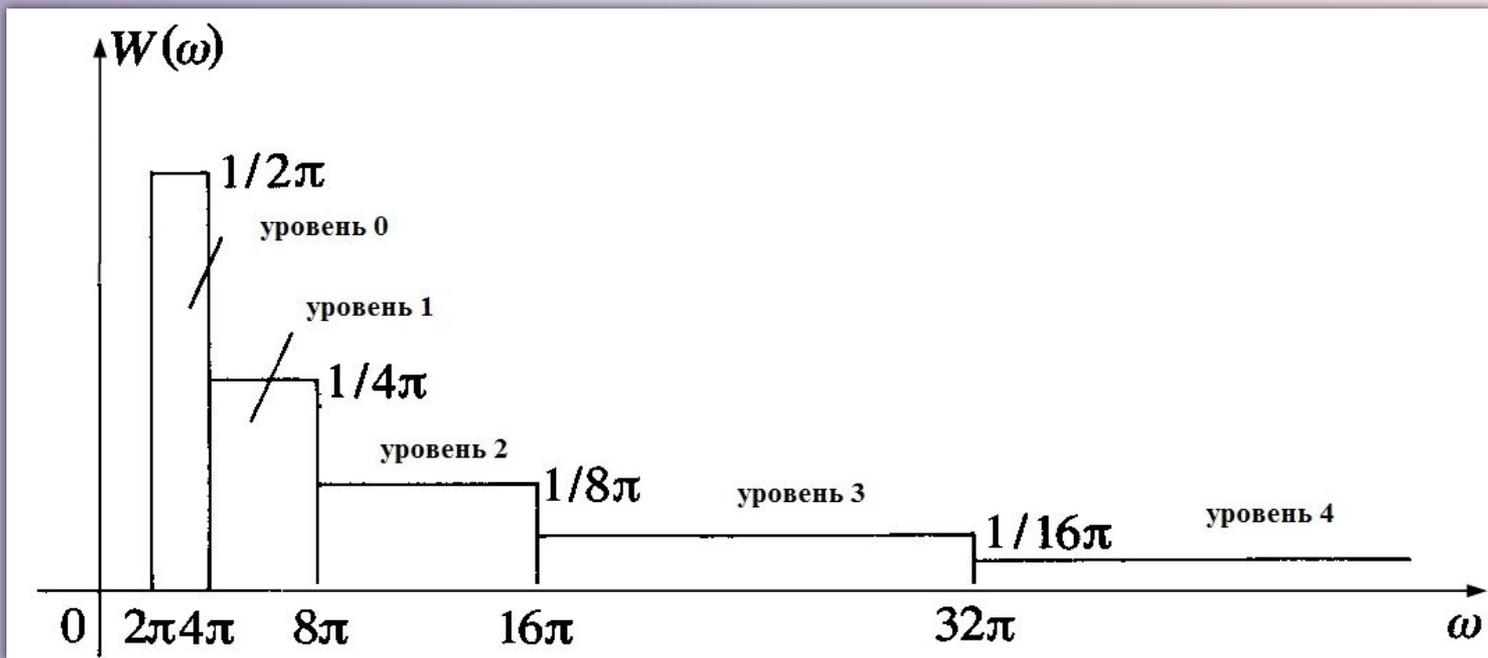
**Базисный вейвлет во временной области**

$$w(2^j x - m) = \frac{e^{i4\pi(2^j x - m)} - e^{i2\pi(2^j x - m)}}{i2\pi(2^j x - m)}$$



# ГАРМОНИЧЕСКИЕ ВЕЙВЛЕТЫ (4)

## Диадический (октавный) банк фильтров



# ГАРМОНИЧЕСКИЕ ВЕЙВЛЕТЫ (5)

## Спектральная плотность масштабирующей функции

$$W(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} e^{-i\omega m}, & 0 \leq \omega < 2\pi \\ 0, & \omega < 0, \omega \geq 2\pi \end{cases}$$

## Масштабирующая функция во временной области

$$\phi(x - m) = \frac{e^{i2\pi(x-m)} - 1}{i2\pi(x - m)}$$



# ГАРМОНИЧЕСКИЕ ВЕЙВЛЕТЫ (6)

## Соотношения для базисного вейвлета

### (соотношения ортогональности)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w(2^j x - m) w(2^r x - s) dx = 0 \quad \forall j, m, r, s \quad (j, r \geq 0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w(2^j x - m) w^*(2^r x - s) dx = 0 \quad \forall j, m, r, s \quad (j, r \geq 0; r \neq j; s \neq m)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |w(2^j x - m)|^2 dx = 1 / 2^j$$

Аналогичные соотношения справедливы для **масштабирующей функции (соотношения ортогональности)**.

Масштабирующая функция и базисный вейвлет являются **стационарными**.

# ГАРМОНИЧЕСКИЕ ВЕЙВЛЕТЫ (7)

## Свойства гармонического вейвлет-преобразования

- 1) сохраняет энергию сигнала (при переходе в вейвлет-область);
- 2) обладает свойством линейности.

## Функциональный ряд для функции $f(x)$

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left( a_{\phi,k} \phi(x-m) + \tilde{a}_{\phi,m} \phi^*(x-m) \right) +$$

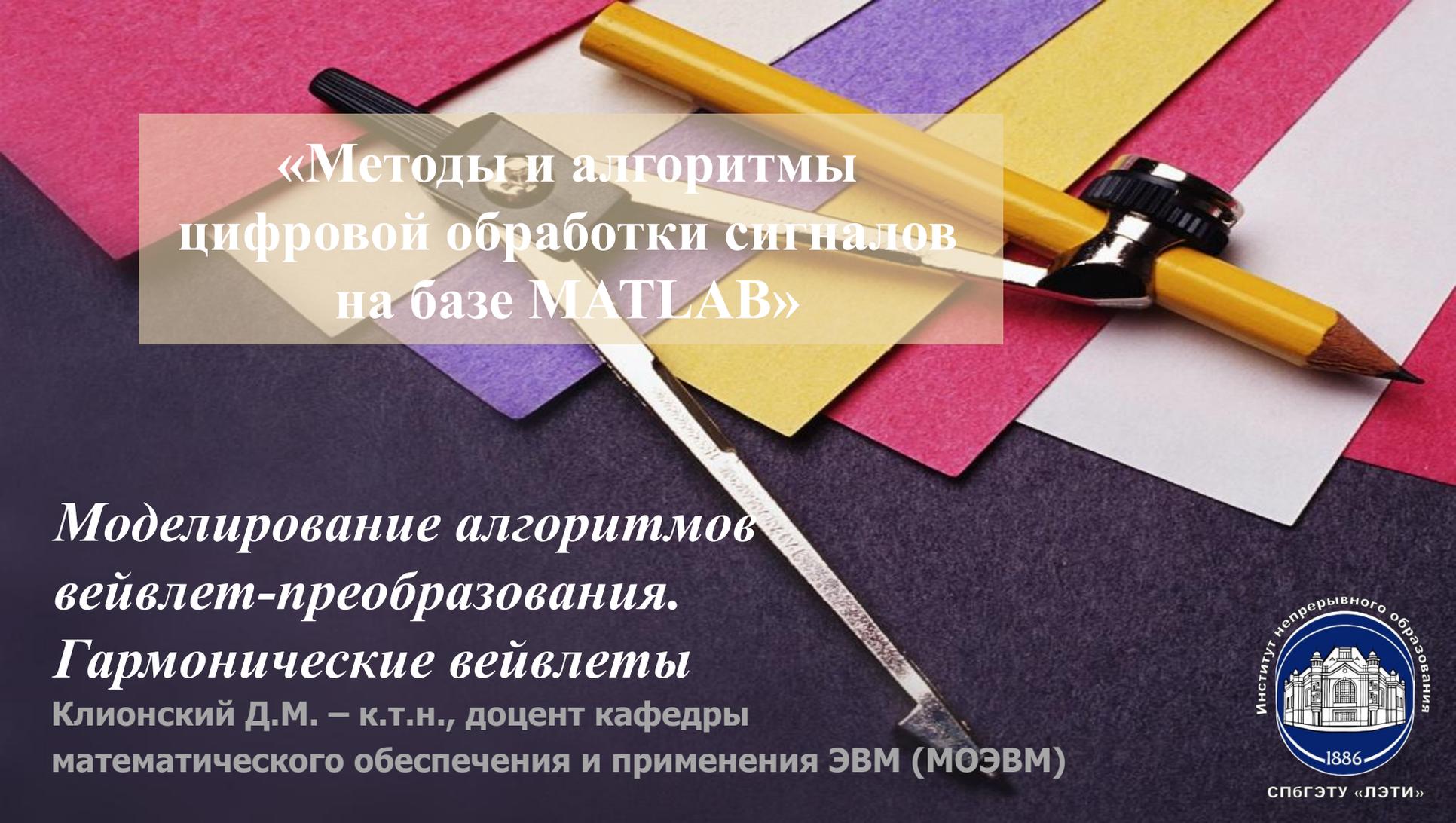
$$+ \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left( a_{j,m} w(2^j x - m) + \tilde{a}_{j,m} w^*(2^j x - m) \right)$$



# ГАРМОНИЧЕСКИЕ ВЕЙВЛЕТЫ (8)

## Свойства гармонических вейвлетов (выводы)

- 1) гармонические вейвлеты имеют *компактный носитель* в частотной области;
- 2) существуют и применяются на практике **быстрые алгоритмы вычисления вейвлет-коэффициентов** и восстановления сигнала во временной области, основанные на ДПФ, которое вычисляется с помощью алгоритмов БПФ.



«Методы и алгоритмы  
цифровой обработки сигналов  
на базе MATLAB»

*Моделирование алгоритмов  
вейвлет-преобразования.*

*Гармонические вейвлеты*

Клионский Д.М. — к.т.н., доцент кафедры  
математического обеспечения и применения ЭВМ (МОЭВМ)