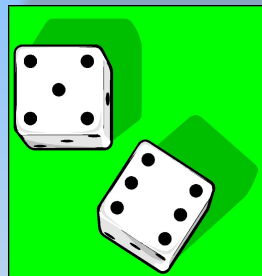


## Лекція 2



# ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ІГОР



Кафедра інформатики та комп'ютерних технологій  
доцент Бесклінська О.П.

# **Зміст**

- 1. Ігрові моделі прийняття рішення**
- 2. Термінологія і означення**
- 3. Класифікація ігор**
- 4. Обмеження і допущення, що застосовуються в теорії гри**
- 5. Прямокутні матричні ігри**

**За умов ринкової економіки все частіше мають місце конфліктні ситуації, коли два або більше колективів (індивідуумів) мають протилежні цілі та інтереси, причому результат дії кожної із сторін залежить від дії супротивника.**

**Класичний приклад—це відношення *продавець—покупець* .**



Математична теорія ігор привернула до себе пильну увагу лише після опублікування в 1944 році книги Неймана і Моргенштерна "Теорія ігор і економічна поведінка".



Нейман Джон  
(1903-1957)



Оскар  
Моргентштерн  
(1902-1977)

## **2.Термінологія і означення**

**Теорія ігор** являє собою математичну теорію конфліктних ситуацій.

**Грою** називається спрощена формалізована модель конфліктної ситуації.

**Формалізована модель** гри означає строгий перелік правил, що визначають, як можуть діяти учасники гри і який їх вигреш в залежності від обраних дій.

**Правилами гри в теорії ігор називається система умов, яка включає:**

- 1) можливі варіанти дій сторін;**
- 2) об'єм інформації кожної сторони про поведінку іншої;**
- 3) послідовність чергування ходів, тобто окремих рішень, які приймаються в ході гри;**
- 4) результат гри, до якого приводить дана сукупність ходів.**

Сторони, які приймають участь в конфліктній ситуації, називаються гравцями, а результат зіткнення їх інтересів - виграшем.





**Ходом** в теорії ігор називається вибір одного з передбачених правилами гри варіантів.

Ходи поділяються на **особисті** і **випадкові**.

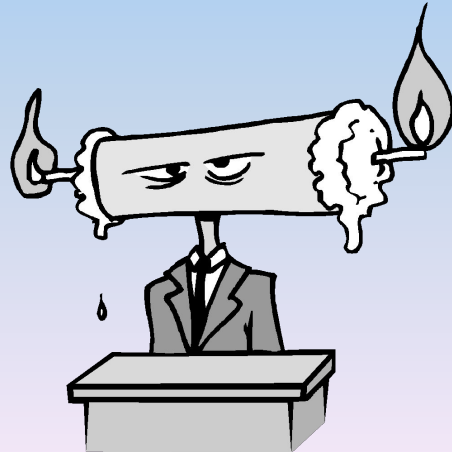
**Особистим ходом** називається свідомий вибір одним з гравців одного з можливих в даній ситуації ходів і його здійснення.



**Випадковим ходом** називається вибір із ряду можливостей, здійснюваний не рішенням гравця, а якимось механізмом вибору



**Стратегією** гравця називається сукупність **правил**, які однозначно визначають вибір при кожному особистому ході даного гравця в залежності від ситуації, яка склалася в процесі гри.



# **3.Класифікація ігор**

- 1) за кількістю гравців;**
- 2) за результатом гри;**
- 3) за кількістю ходів;**
- 4) за кількістю інформації про характер ситуації, що склалася, і про наміри противника;**
- 5) за кількістю стратегій;**
- 6) за характером взаємовідносин;**
- 7) за видом функції виграшів.**

**За кількістю гравців**

**парні**

**множинні**



**За результатом  
гри**

```
graph TD; A[За результатом гри] --> B[Ігри з нульовою сумою]; A --> C[Ігри з ненульовою сумою];
```

**Ігри з нульовою  
сумою**

**Ігри з ненульовою  
сумою**

# За кількістю інформації

Ігри з повною  
інформацією



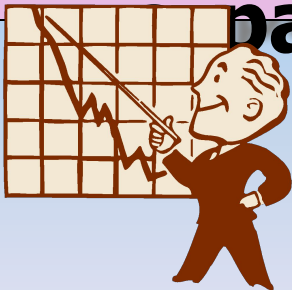
Ігри з  
неповною  
інформацією





# За кількістю стратегій

Ігри з  
скінченною  
кількістю  
стратегій



Ігри з  
нескінченною  
кількістю  
стратегій



# За характером взаємовідносин

**Безкоаліційні**



**Кооперативні,  
коаліційні**



# **За виглядом функцій виграшів**

**Матричні**

**Біматричні**

**Неперервні**

**Опуклі**

**Сепарабельні**

**Типу дуелей**

***Матрична гра*** - це скінчена гра двох гравців з нульовою сумою, в якій задаються виграші першого гравця у вигляді матриці (рядки матриці відповідають номеру застосованої стратегії першого гравця, стовпці - номеру застосування стратегії другого гравця; на перетині рядка і стовпця матриці знаходиться виграш першого гравця, якій відповідає застосованим стратегіям). Програш другого гравця дорівнює виграшу першого.

***Біматрична гра***—це скінчена гра двох гравців з ненульовою сумою, в якій виграші кожного гравця задаються матрицями окремо для відповідного гравця.

“Родинна суперечка”.

**Д1**-регбі; **Д2**-балет.

Якщо обрати **Д1**, то при однаковому виборі **Жінка** одержує **1**-корисності,

**Чоловік-2** одиниці корисності.

Якщо обрати **Д2**, то при однаковому виборі **Жінка** одержує **2**-корисності,

**Чоловік-1** одиницю корисності.

Якщо гравці обрали різні дії, то виграш кожного дорівнює **0**.

Жінка



Чоловік

	Д1	Д2		Д1	Д2
Д1	1	0	Д1	2	0
Д2	0	2	Д2	0	1

***Неперервною*** вважається така гра, в якій функція вигравів кожного гравця є неперервною в залежності від стратегій.

**Якщо** функція вигравів є опуклою, то така гра називається ***опуклою***.



## **4. Обмеження і допущення, що застосовуються в теорії гри**

До *допущень* відносяться наступні моменти:

**1)** кожний гравець знає можливості (виражені у відповідних стратегіях), які є у нього і його противника, і знає, як результат гри залежить від вибору цих можливостей, тобто він знає платіжну матрицю;

**2)** якщо в грі приймає участь випадковий механізм (тобто мають місце випадкові ходи), то кожному гравцю відомі різні можливості цих випадкових ходів і відповідні їм імовірності виходів;

**3) кожний гравець для будь-якої пари ісходів або віддає перевагу одному виходу (коли, наприклад, один виграш більший, ніж інший), або байдужий до них;**

**4) кожний гравець знає подібну систему призначень свого противника у відношенні результатів гри.**

***Обмеження***, які мають місце в теорії гри:

**1)** в теорії гри не враховуються елементи ризику, неминуче присутні в кожній реальній стратегії, а також можливі прорахунки і помилки, кожного з гравців (вважається, що обидва гравця грають ідеально);

**2)** виграш зводиться до одного-єдиного числа.

# 5. Прямокутні матричні ігри

# Платіжна матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Елемент цієї матриці  $a_{ij}$  — це виграш гравця А, якщо він вибрав стратегію  $A_i$ , а гравець В — стратегію  $B_j$ .

**Оптимальною стратегією гравця називається така стратегія, яка при багатократному повторенні гри забезпечує даному гравцю максимально можливий середній виграш (або, що теж саме, мінімально можливий середній програш).**

**Кожна вибрана стратегія першого  
або другого гравця називається  
*чистою стратегією.***



$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij}$$

Стратегія гравця А називається *максимінною*, а величина гарантованого виграшу цього гравця називається *нижньою ціною гри*.

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij}$$

Стратегія гравця В називається *мінімаксною*, а величина його програшу—*верхньою ціною гри*

Якщо  $\alpha = \beta = v$ , то гра називається *цілком визначеною*.

В такому разі виграш гравця А (програш гравця В) називається *значенням гри*.

Цілком визначені ігри називаються *іграми з сідловою точкою*, а елемент платіжної матриці, значення якого дорівнює виграву гравця А (програву гравця В) – *сідловою точкою*.

**Приклад.** Фірма виготовляє устаткування для легкої промисловості. Експертами виробничого відділу фірми розглядаються три конструкторські варіанти устаткування: *A-1*, *A-2*, *A-3*. Для спрощення допустимо, що за технічними характеристиками ці три типи майже ідентичні, однак залежно від зовнішнього вигляду та зручності використання кожен тип може мати три модифікації: *M-1*, *M-2*, *M-3* залежно від закупленої технології виробництва. Собівартість виготовлення устаткування наведена в таблиці:

$$\alpha = \max_j \min_i a_{ij} = \max\{5; 7; 5\} = 7$$

$$\max_{j=1} a_{ij} = \max\{10; 8; 7\} = 10$$

$$\beta = \min_i \max_j a_{ij} = \min\{10; 7; 9\} = 7$$

$$a_{ij} = \max\{6; 7; 5\} = 7$$

$$\min_{i=3} a_{ij} = \min\{7; 5; 8\} = 5$$

-2

$$\max_{J=3} a_{ij} = \max\{5; 9; 8\} = 9$$

A-1	10	6	5	5
A-2	8	7	9	7
A-3	7	5	8	5
$\beta_j$	10	7	9	7

Стратегії, яким відповідають однакові значення платіжної матриці (тобто матриця містить однакові рядки (стовпці), називаються *дублюючими*. Якщо всі елементи  $i$ -го рядка (стовпця) платіжної матриці перевищують значення елементів  $j$ -го рядка (стовпця), то кажуть, що  $i$ -та стратегія гравця А (гравця В) є *домінуючою* над  $j$ -ою.

# Гравець В

Гравець А

6	3	8	5	9
6	5	7	6	6
2	1	5	4	7
4	4	3	8	8



	B1	B2	B3	B4	$\alpha_i$
A1	6	3	8	5	3
A2	6	5	7	6	5
A3	4	4	3	8	3
$\beta_j$	6	5	8	8	5

## Завдання.

1. Спростити матрицю і знайти  $\alpha$  і  $\beta$ :

	B1	B2	B3	B4	B5
A1	2	4	7	5	8
A2	7	6	8	7	9
A3	5	3	4	1	5
A4	7	6	8	7	9

2. Навести приклад гри.