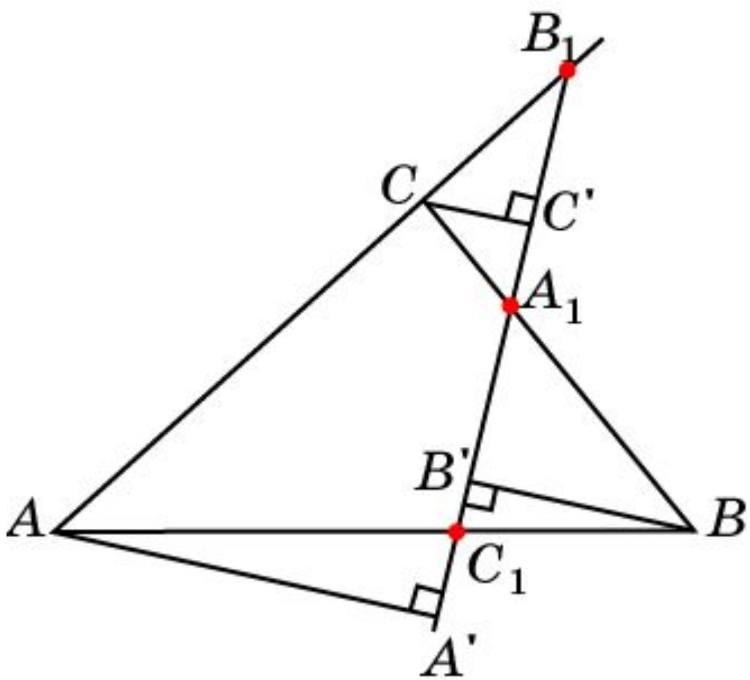
Теорема Менелая

Пусть на сторонах AB, BC и продолжении стороны AC треугольника ABC взяты соответственно точки C_1, A_1 и B_1. Точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда выполняется равенство

(*) $$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$$



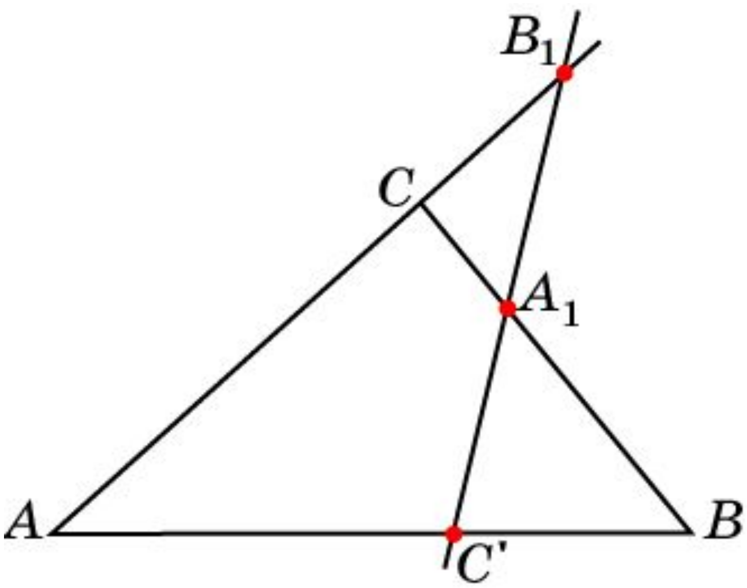
Доказательство: Пусть точки A_1, B_1, C_1 принадлежат одной прямой a. Опустим из вершин треугольника ABC перпендикуляры AA', BB', CC' на эту прямую. Треугольники AC_1A' и BC_1B' подобны и, следовательно, $\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{AA'}{BB'}$.

Аналогичным образом показывается, что $\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{BB'}{CC'}$ и $\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{CC'}{AA'}$.

Перемножая эти три равенства, будем иметь требуемое равенство.

Продолжение

Докажем обратное. Пусть на сторонах AB, BC и продолжении стороны AC треугольника ABC взяты соответственно точки C_1, A_1 и B_1, для которых выполняется равенство (*). Предположим, что прямая A_1B_1 пересекает прямую AB в некоторой точке C'. По доказанному, выполняется равенство $$\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$$



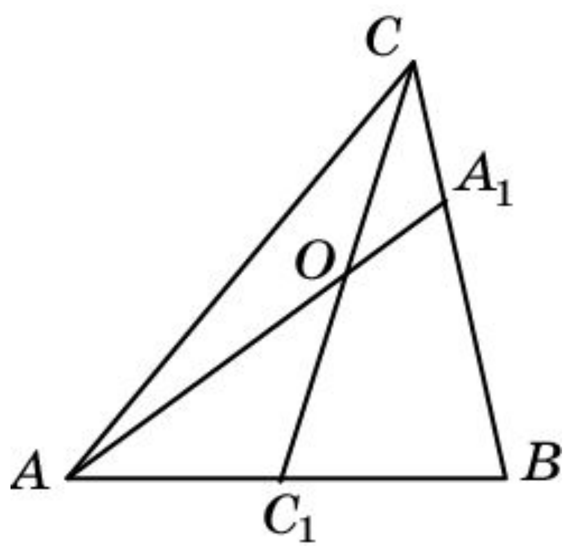
Учитывая равенство (*), получаем равенство $$\frac{AC'}{C'B}=\frac{AC_1}{C_1B}.$$

Прибавим к его обеим частям единицу и приведем к общему знаменателю. Получим равенство $$\frac{AB}{C'B}=\frac{AB}{C_1B},$$

из которого следует, что C' и C_1 совпадают. Следовательно, точки A_1, B_1, C_1 принадлежат одной прямой.

Упражнение 1

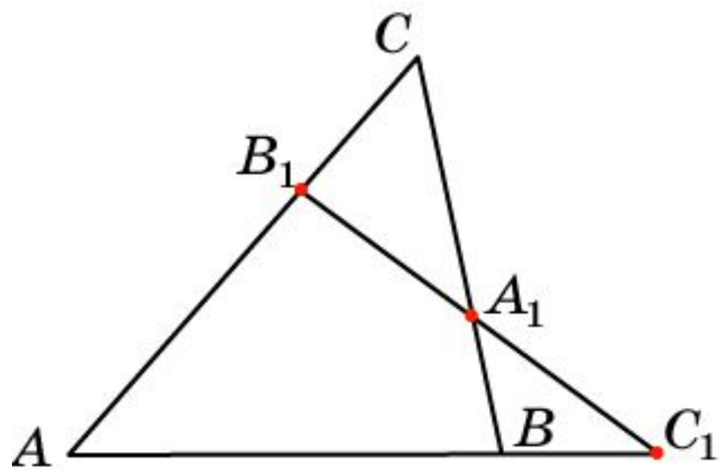
Точка C_1 – середина стороны AB треугольника ABC. Точка O – середина отрезка CC_1. В каком отношении делит прямая AO сторону BC?



Ответ: 2:1.

Упражнение 2

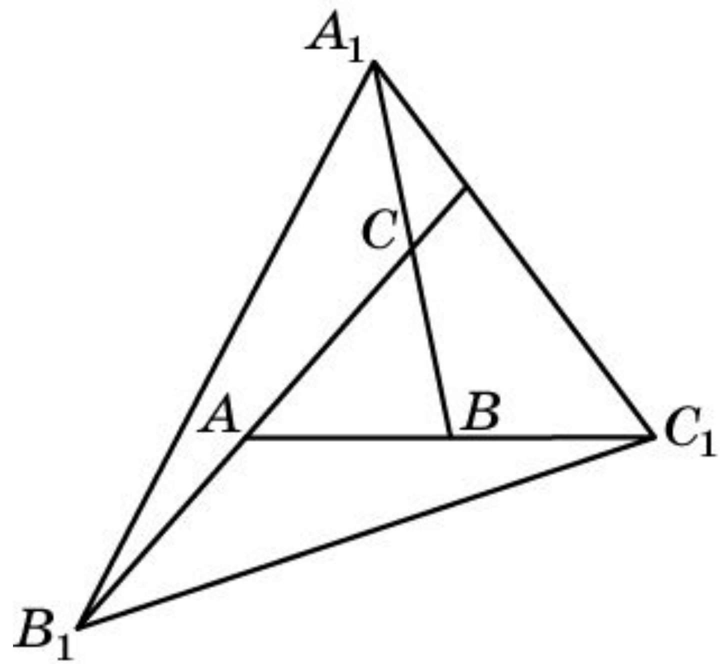
Точка A_1 делит сторону BC треугольника ABC в отношении 1:2. Точка B_1 делит сторону AC в отношении 2:1. Прямая A_1B_1 пересекает продолжение стороны AB в точке C_1. Найдите отношение $AB:BC_1$.



Ответ: 3:1.

Упражнение 3

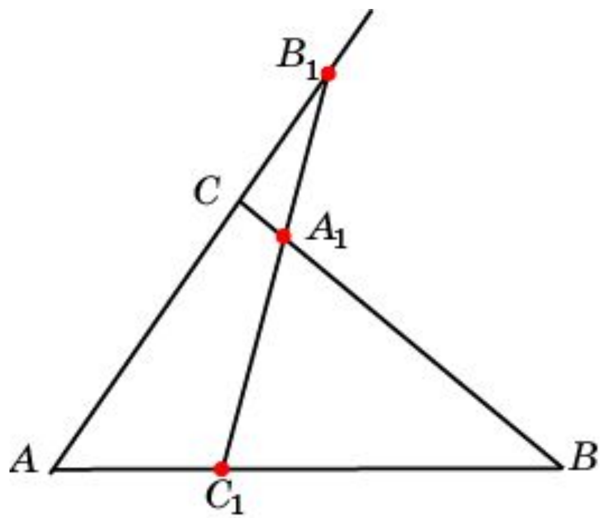
На продолжениях сторон AB, BC и CA треугольника ABC взяты соответственно точки C_1, A_1 и B_1 так, что $AB = BC_1$, $BC = CA_1$, $CA = AB_1$. Найдите отношение, в котором прямая AB_1 делит сторону A_1C_1 треугольника $A_1B_1C_1$.



Ответ: 1:2.

Упражнение 4

Точка C_1 делит сторону AB треугольника ABC в отношении 1:2. Точка B_1 лежит на продолжении стороны AC и $AC = 2CB_1$. В каком отношении делит прямая B_1C_1 сторону BC?

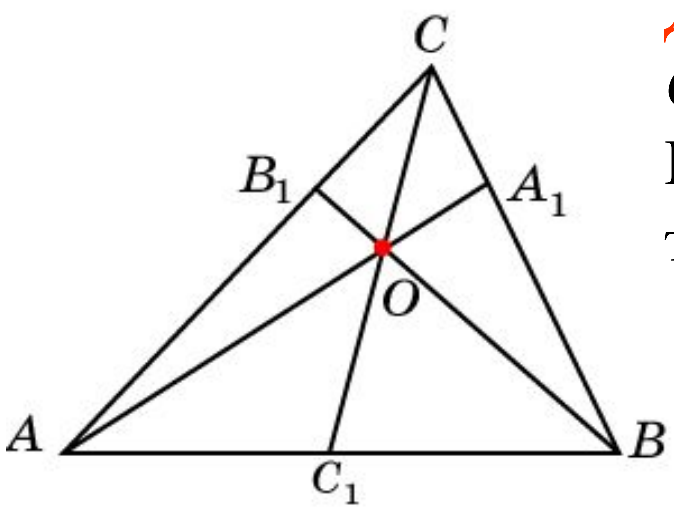


Решение: По условию $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{1}{2}, \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{1}{3}.$, используя теорему Менелая, находим $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{6}{1}.$

Теорема Чевы

Пусть на сторонах AB, BC и AC треугольника ABC взяты соответственно точки C_1, A_1 и B_1. Прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$(*) \quad \frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$



Доказательство. Пусть прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке. Применим теорему Менелая к треугольнику BCC_1 и прямой AA_1. Получим

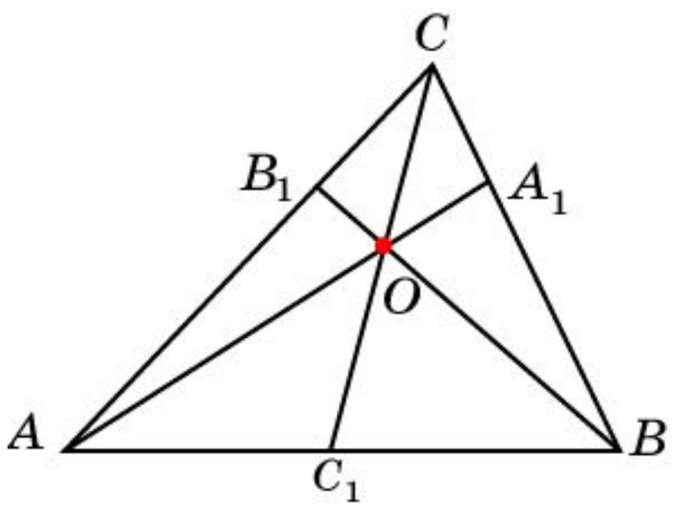
$$\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CO}{OC_1} \cdot \frac{C_1A}{AB} = 1.$$

Аналогично, применяя теорему Менелая к треугольнику AC_1C и прямой BB_1, получим $$\frac{C_1O}{OC} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AB}{BC_1} = 1.$$

Перемножая эти два равенства, получим искомое равенство (*).

Продолжение

Докажем обратное. Пусть на сторонах AB, BC и AC треугольника ABC взяты соответственно точки C_1, A_1 и B_1, для которых выполняется равенство (*). Предположим, что прямые AA_1 и BB_1 пересекаются в точке O. Проведем прямую CO и обозначим C' ее точку пересечения со стороной AB. Докажем, что C' совпадает с C_1.



Для точек A_1, B_1, C' выполняется равенство

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

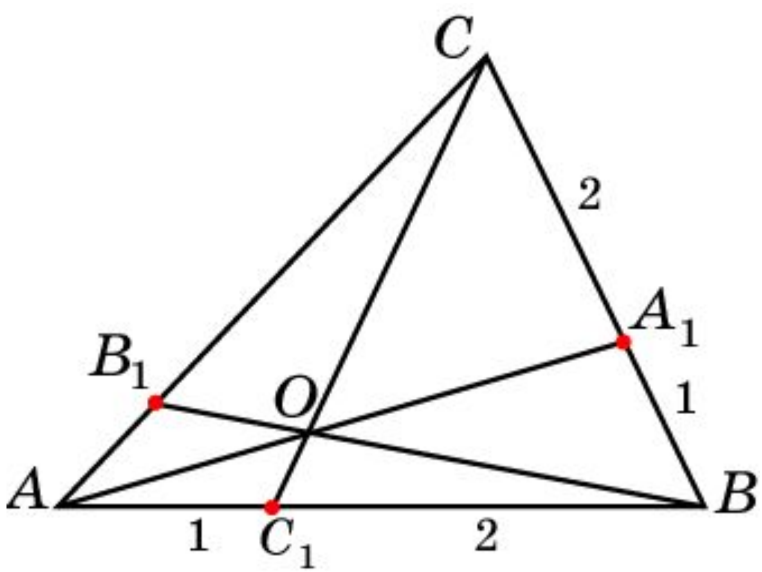
Учитывая равенство (*), получаем равенство

$$\frac{AC'}{C'B} = \frac{AC_1}{C_1B},$$

из которого следует, что точки C' и C_1 совпадают, значит, прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке.

Упражнение 6

Точки C_1 и A_1 делят стороны AB и BC треугольника ABC в отношении 1:2. Прямые CC_1 и AA_1 пересекаются в точке O. Найдите отношение, в котором прямая BO делит сторону CA.



Решение: По условию

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{1}{2}.$$

Используя теорему Чевы, находим $\dfrac{CB_1}{B_1A} = 4.$

Упражнение 7

Точки C_1, B_1, A_1 делят стороны AB, AC, BC, соответственно, в отношениях 4:1, 2:1, 1:2. Выясните, пересекаются ли прямые AA_1, BB_1, CC_1 в одной точке.

Ответ: Да.

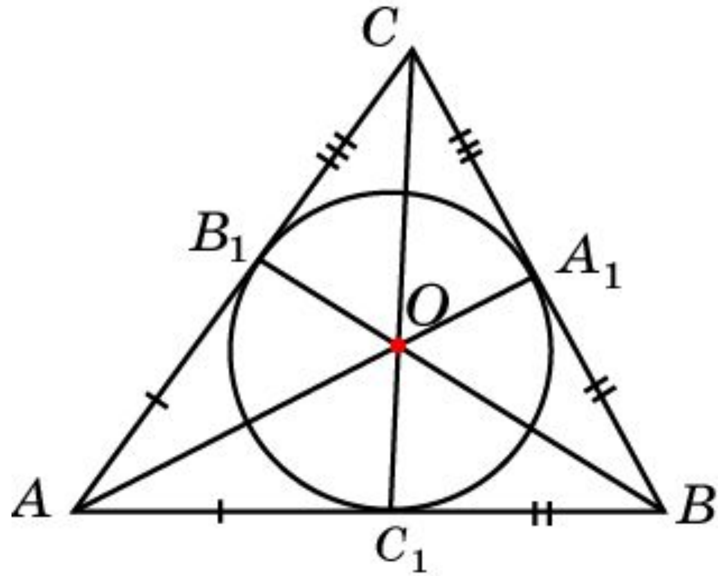
Упражнение 8

Точка A_1 делит сторону BC треугольника ABC в отношении 1:3. В каком отношении должна делить точка B_1 сторону AC, чтобы точка пересечения прямых AA_1 и BB_1 принадлежала медиане CC_1 треугольника ABC?

Ответ: 1:3.

Упражнение 9

Докажите, что прямые, проходящие через вершины треугольника и точки касания вписанной окружности пересекаются в одной точке, называемой точкой Жергона.

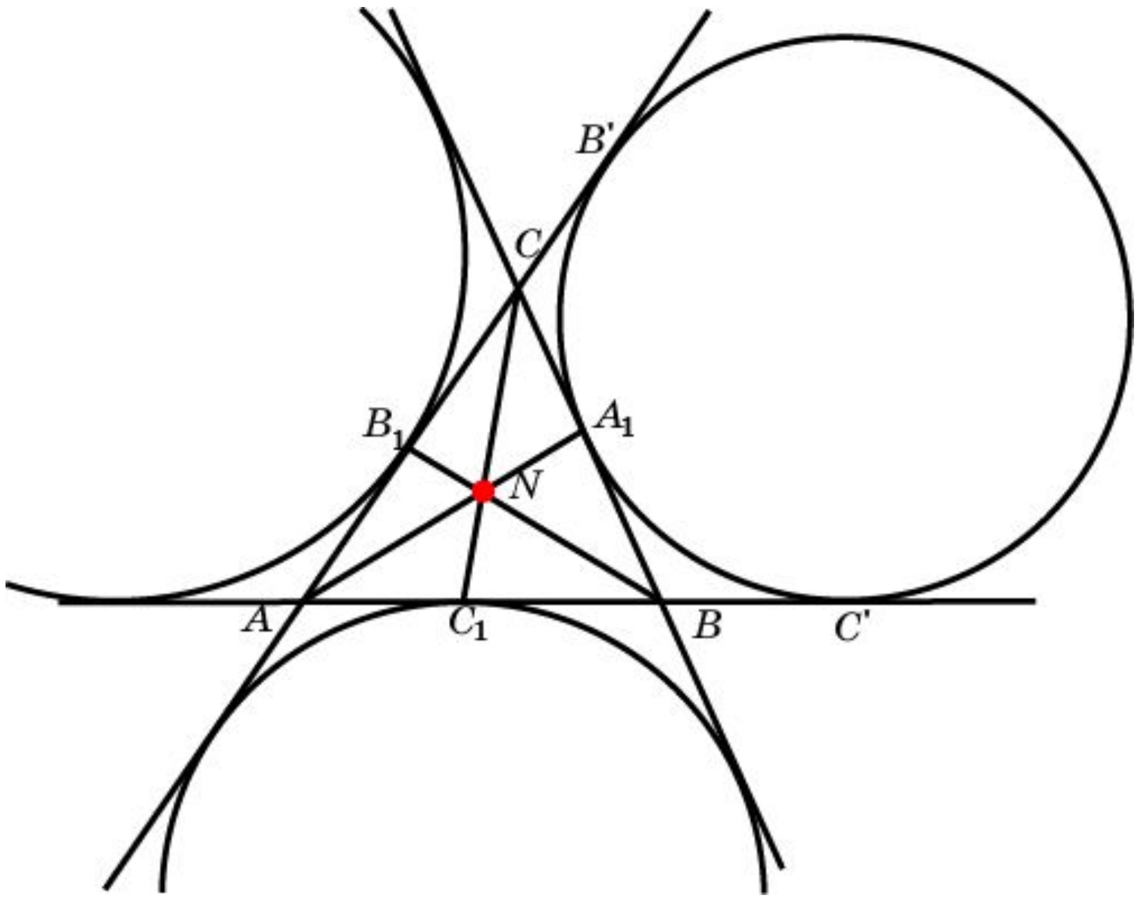


Решение: Пусть окружность касается сторон треугольника ABC соответственно в точках A_1, B_1, C_1. Тогда $AB_1 = AC_1$, $BC_1 = BA_1$, $CA_1 = CB_1$. Следовательно, $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$

По теореме Чевы, прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке.

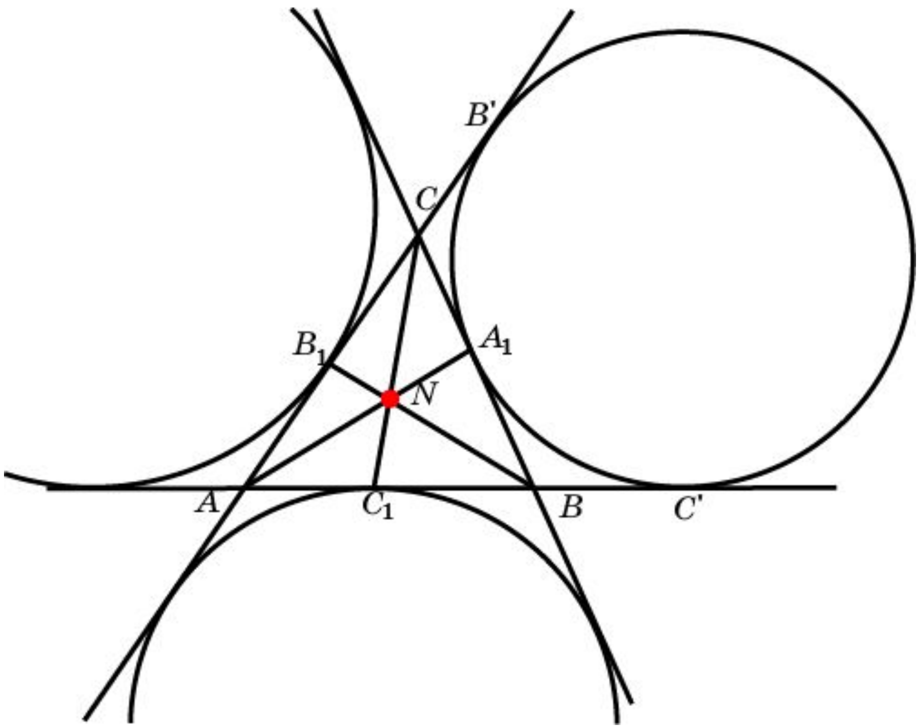
Упражнение 10

Докажите, что прямые, проходящие через вершины треугольника и точки касания вневписанных окружностей пересекаются в одной точке, называемой точкой Нагеля.



Решение

Пусть окружность касается стороны BC и продолжения сторон AC и AB треугольника ABC соответственно в точках A_1, B', C'. Тогда $CA_1 = CB'$, $BA_1 = BA'$, $AB' = AC'$. Обозначим $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, p – полупериметр треугольника ABC. Имеем $AB' = AC' = p$ и, следовательно, $BA_1 = BC' = p - c$, $A_1C = CB' = p - b$.



Аналогично, для точек касания B_1 и C_1 имеем: $AC_1 = p - b$, $C_1B = p - a$; $CB_1 = p - a$, $C_1A = p - b$. Следовательно, выполняется равенство

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

По теореме Чевы, прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке.